

ИССЛЕДОВАНИЕ НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМЫ ПОСРЕДСТВОМ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Апостол Обретенов, Боян Димитров
и Михаил Узунов

В настоящей статье рассматривается вопрос, известный в теории надежности как „дублирование с восстановлением в случае нагруженного резерва“.

Рассмотрим систему из n элементов, каждый из которых в начальный момент рассмотрения $t_0=0$ работает. Предположим, что длительность работы Z_i i -того элемента, $i=1, 2, \dots, n$, распределена по показательному закону с параметром λ_i , т. е.

$$F_i(x) = P(Z_i < x) = 1 - e^{-\lambda_i x}.$$

Допустим еще, что после каждого отказа элемент мгновенно начинает восстанавливаться (ремонтиться), причем время восстановления имеет случайный характер. Вероятность, что i -тый элемент восстановится за время, меньшее чем x , обозначим через $G_i(x)$, $i=1, 2, \dots, n$, где $G_i(x)$ непрерывные функции и $G_i(0)=0$. Длительности времен восстановления элементов примем независимыми от их моментов отказа. Элементы работают независимо друг от друга. Система работает, если по крайней мере один из элементов работает.

Аналогичные системы рассмотрены Гнеденко, Беляевым и Соловьевым [1], но только в случае, когда элементы однотипны, а длительность работы отдельного элемента распределена произвольно с функцией распределения (ф. р.) $F(x)$.

Проблема о действии такой системы в стационарном режиме и в случае экспоненциальных времен работы и ремонта элементов рассмотрена в [1], а также в работе Капочинского [2].

Для описанной системы из n элементов мы рассматриваем некоторые вероятностные характеристики. Эти характеристики определяют состояние системы в произвольный момент t , данного промежутка времени $(0, T)$, или в стационарном случае, который получается при $t \rightarrow \infty$. С этой цели рассмотрим в деталях случай работы только одного элемента и определим некоторые характеристики. Они использованы потом для нахождения этих характеристик для системы.

Процесс работы одного элемента представляет собой вероятностный процесс на полуоси времени. Мы находим этот процесс и его дифференциальное уравнение методами, подобными использованным Токачем [3].

В случае одного элемента получены некоторые оценки о скорости стабилизации процесса, т. е. о скорости достижения его стационарного состояния. В случае системы из двух или больше элементов дать такую оценку трудно.

1. Случай одного элемента. Виртуальное время состояния

Рассмотрим работу одного элемента, соответствующую следующей схеме. Элемент начинает работать в момент $t_0=0$. Предположим, что продолжительность работы Z элемента подчиняется показательному закону с параметром λ , т. е.

$$P(Z < x) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Допустим, что после отказа элемент мгновенно начинает восстанавливаться (ремонтиться), время ремонта имеет случайный характер и вероятность восстановления за время, меньшее чем x , означим через $G(x)$, где $G(x)$ непрерывная функция и $G(0)=0$. Продолжительность времени восстановления не зависит от моментов отказа.

Процесс работы элемента будет вероятностный процесс на оси времени $(0, \infty)$. Определим этот процесс следующим образом.

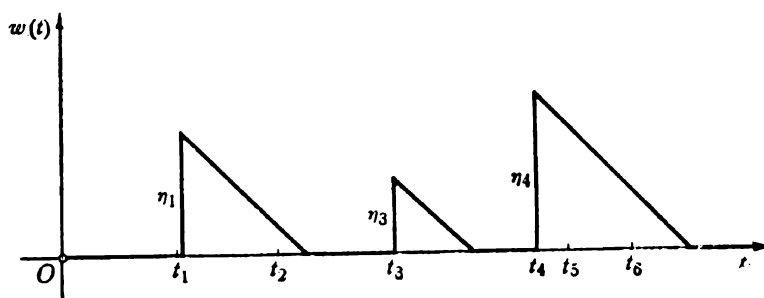
Пусть $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ представляет собой одну произвольную реализацию Пуассоновского процесса ξ_t с параметром λ и $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dots$ — последовательность взаимно независимых и независимых от процесса ξ_t случайных величин с одной и той же функцией распределения $G(x)$.

Определим случайный процесс $w(t)$ так:

$$(1.1) \quad w(t) = \begin{cases} w(t_n) - (t - t_n), & \text{если } t - t_n < w(t_n), \\ 0, & \text{если } t - t_n > w(t_n), \\ \eta_n I_{\{w(t_n-0)=0\}} + w(t_n-0), & \text{если } t = t_n, \end{cases}$$

где I — индикатор.

Величину $w(t)$ будем называть виртуальным временем состояния элемента. Она представляет продолжительность восстановления (ремонта) элемента, начиная с момента t и определена на оси времени. Для $t=0$



Фиг. 1

принимает $w(t)=0$. В моменте t_1 , величина $w(t)$ делает скачок от 0 до η_1 , а потом линейно уменьшается с угловым коэффициентом -1 до нуля и никогда не становится отрицательной. $w(t)$ имеет скачок только в тех точках t_n , для которых $w(t_n-0)=0$. Точки t_n , для которых $w(t_n-0) \neq 0$,

назовем фиктивными моментами аварии (фиг. 1). Будем говорить, что элемент работает в момент t , когда $w(t)=0$.

Эта вероятностная схема соответствует описанной в начале постановке о работе одного элемента. Это легко увидеть, благодаря лемме, которую докажем.

Пусть $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n, \dots$ означает последовательные промежутки времен работы элемента, а $\eta_1, \eta_2, \dots$ — последовательные промежутки времен ремонта. $\{\eta_n\}$ является подпоследовательностью первоначально данной последовательности $\{\zeta_n\}$. Она соответствует этим точкам, в которых $w(t)$ делает скачок. Очевидно, величины $\{\eta_n\}$ тоже независимы. Покажем, что каждая из величин ζ_n , $n=1, 2, \dots$ подчиняется экспоненциальному закону с параметром λ . Для этого докажем следующую лемму:

Лемма 1. Пусть случайная величина ξ имеет экспоненциальное распределение с параметром λ и η — неотрицательная случайная величина, независимая от ξ . Тогда

$$P(\xi - \eta \leq t | \xi > \eta) = P(\xi \leq t).$$

Доказательство базируется на том факте, что распределение ξ экспоненциально. Действительно, если $H(y)$ является функцией распределения η , то

$$\begin{aligned} P(\xi - \eta \leq t | \xi > \eta) &= \frac{P(\xi - \eta \leq t, \xi > \eta)}{P(\xi > \eta)} \\ &= \frac{\int_0^\infty P(\xi - y \leq t, \xi > y) dH(y)}{\int_0^\infty P(\xi > y) dH(y)} = \frac{\int_0^\infty P(y < \xi \leq t + y) dH(y)}{\int_0^\infty P(\xi > y) dH(y)} \\ &= \frac{\int_0^\infty (e^{-\lambda y} - e^{-\lambda(t+y)}) dH(y)}{\int_0^\infty e^{-\lambda y} dH(y)} = 1 - e^{-\lambda t} = P(\xi \leq t). \end{aligned}$$

Если $\eta = \text{const}$, лемма отражает известное свойство „отсутствия последствия“ для пуассоновского процесса.

Возьмем теперь $\xi = t_n - t_{n-1}$, где t_n — момент скачка $w(t)$, и пусть $\eta = w(t_{n-1} - 0)$. При этих ξ и η для величины ζ_n в точности

$$P(\xi - \eta \leq t | \xi > \eta) = P(\zeta \leq t)$$

и утверждение о распределении ζ_n вытекает сразу из леммы 1.

Означим через $F(t, x) = P(w(t) < x)$ фамилию функций распределения процесса $w(t)$. Из предположения $w(0+) = 0$ имеем $F(0, x) = 1$ для каждого $x \geq 0$. При $x = 0$ $F(t, 0)$ дает вероятность того, чтобы элемент работал в

момента t . Покажем, что $F(t, x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1.2) \quad \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} - \lambda F(t, 0) + \lambda G(x) F(t, 0).$$

Рассмотрим возможные состояния элемента в промежутке $(t, t + \Delta t)$, где t — произвольный момент. Вероятность события будем записывать с точностью до $o(\Delta t)$. Событие $\{w(t + \Delta t) < x\}$ выражается как сумма следующих несовместимых событий:

1) В промежутке $(t, t + \Delta t)$ нет аварии (в этом промежутке нет точки t_k пуассоновского процесса). В таком случае $w(t) < x + \Delta t$. Вероятность этого равна

$$[1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)] P(w(t) < x + \Delta t).$$

2) В промежутке $(t, t + \Delta t)$ есть авария, в моменте t элемент работает ($w(t) = 0$) и в моменте аварии $w(t)$ делает скачок, не больше чем x . Вероятность этого равна

$$\lambda \Delta t F(t, 0) G(x) + o(\Delta t).$$

3) В промежутке $(t, t + \Delta t)$ есть фиктивная авария, т. е. элемент ремонтируется и имеем попадание пуассоновского процесса. В этом случае $w(t)$ не делает скачка. Вероятность этого равна

$$\lambda \Delta t [F(t, x + \Delta t) - F(t, 0)].$$

4) В промежутке $(t, t + \Delta t)$ имеем больше одного попадания пуассоновского процесса. Вероятность этого равна $o(\Delta t)$.

Так как $F(t + \Delta t, x) = P(w(t + \Delta t) < x)$, то из вышесказанного получаем

$$F(t + \Delta t, x) = F(t, x + \Delta t) [1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)] + \lambda \Delta t F(t, 0) G(x) + \lambda \Delta t [F(t, x + \Delta t) - F(t, 0)] + o(\Delta t)$$

и после раскрытия скобок

$$F(t + \Delta t, x) = F(t, x + \Delta t) - \lambda \Delta t F(t, 0) [1 - G(x)] + o(\Delta t),$$

из которого получим

$$(1.2^*) \quad \frac{F(t + \Delta t, x) - F(t, x)}{\Delta t} = \frac{F(t, x + \Delta t) - F(t, x)}{\Delta t} - \lambda F(t, 0) [1 - G(x)] + o(\Delta t).$$

Если примем $F(t, -0) = 0$, то, исключая скачок $F(t, x)$ в точке $x = 0$, можно доказать, что функция $F(t, x)$ непрерывна и дифференцируема, потому что она монотонная функция $x > 0$. После предельного перехода при $\Delta t \rightarrow 0$ получаем дифференциальное уравнение (1.2).

Покажем, что уравнение (1.2) имеет единственное решение $F(t, x)$, для которого $F(0, x) = 1$. Для этой цели используем трансформацию Лапласа — Стильтьеса функции $F(t, x)$ относительно x :

$$f(t, s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} d_x F(t, x).$$

Тогда для функции $f(t, s)$ из (1.2) получаем уравнение

$$(1.3) \quad \frac{\partial f(t, s)}{\partial t} = sf(t, s) - F(t, 0)[s + \lambda(1 - g(s))].$$

где

$$g(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dG(x).$$

Если считаем $F(t, 0)$ известной функцией t , то (1.3) представляет обыкновенное линейное дифференциальное уравнение для функции $f(t, s)$. Тогда

$$(1.4) \quad f(t, s) = e^{st} \left\{ 1 - [s + \lambda(1 - g(s))] \int_0^t e^{-su} F(u, 0) du \right\}.$$

Отсюда видно, что когда $F(t, 0)$ известно, функция $f(t, s)$ однозначно определена.

Мы найдем трансформацию Лапласа функции $F(t, 0)$, которая однозначно дает нам и $F(t, 0)$. Из (1.4) находим

$$(1.4*) \quad \int_0^t e^{-su} F(u, 0) du = \frac{1 - f(t, s)e^{-st}}{s + \lambda[1 - g(s)]}.$$

Функция $f(t, s)$ ограничена, так как $f(t, s) = E e^{-s\omega(t)}$ и $\omega(t) \geq 0$. Тогда при $t \rightarrow \infty$ из (1.4*) получаем

$$(1.5) \quad \int_0^{\infty} e^{-su} F(u, 0) du = \frac{1}{s + \lambda[1 - g(s)]},$$

которое является трансформацией Лапласа функции $F(t, 0)$. Из (1.5) эффективно можно определить $F(t, 0)$, используя формулу обращения трансформации Лапласа при заданной $G(x)$.

Пример. Если время ремонта η подчиняется экспоненциальному закону с параметром μ , т. е. если $G(x) = 1 - e^{-\mu x}$, тогда $g(s) = \frac{\mu}{\mu + s}$ и (1.5) принимает вид

$$\int_0^{\infty} e^{-su} F(u, 0) du = \frac{\mu + s}{s(\mu + \lambda + s)}.$$

Отсюда находим, что

$$F(t, 0) = \frac{\mu + \lambda e^{-(\lambda + \mu)t}}{\lambda + \mu}.$$

Этот результат совпадает с выражением коэффициента готовности, найденным в [1].

Теперь докажем следующую теорему:

Теорема 1. Если ф. р. $G(x)$ имеет конечный первый момент

$$\alpha = \int_0^{\infty} x dG(x),$$

то ф. р. $F(t, x)$ сходится при $t \rightarrow \infty$ и

$$(1.6) \quad \tilde{F}(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} F(t, x) = \frac{1}{1 + \lambda \alpha} \left[1 + \lambda \int_0^x [1 - G(u)] du \right], \quad x \geq 0.$$

Стационарное состояние процесса $w(t)$ характеризуется функцией распределения $\tilde{F}(x)$.

Доказательство. Из равенства (1.4) по теореме Лопиталья видно, что $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t, s)$ существует, если существует $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t, 0)$. Покажем, что $F(t, 0)$

имеет предел при $t \rightarrow \infty$ и найдем его.

Так как $F(0, 0) = 1$, то выполнено

$$(1.7) \quad F(t, 0) = 1 + \int_0^t dF(u, 0).$$

Интеграл $\int_0^t dF(u, 0)$ при $t \rightarrow \infty$ стремится к полной вариации $F(u, 0)$,

для которой из (1.5) получаем $\frac{1}{1 + \lambda \alpha} - 1$. Действительно, из (1.5) путем интегрирования по частям находим равенство

$$\int_0^{\infty} e^{-su} dF(u, 0) = \frac{1}{1 + \lambda \frac{1 - g(s)}{s}} - 1,$$

которое при $s = 0$ дает

$$\int_0^{\infty} dF(u, 0) = \frac{1}{1 + \lambda \alpha} - 1.$$

Из (1.7) при $t \rightarrow \infty$ для предела $F(t, 0)$ получаем

$$(1.8) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} F(t, 0) = 1 + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t dF(u, 0) = \frac{1}{1 + \lambda \alpha}.$$

Теперь найдем предел $f(t, s)$ при $t \rightarrow \infty$. Из (1.4) путем применения правила Лопиталья

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} f(t, s) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - \{s + \lambda[1 - g(s)]\} \int_0^t e^{-su} F(u, 0) du}{e^{-st}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-[s + \lambda(1 - g(s))]F(t, 0)}{-s} \\ &= \frac{1}{1 + \lambda \alpha} \frac{s + \lambda[1 - g(s)]}{s} = \tilde{f}(s), \end{aligned}$$

т. е. мы получили для каждого $s > 0$

$$(1.9) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t, s) = \tilde{f}(s).$$

Из непосредственной проверки видно, что функцию $\tilde{f}(s)$ можно представить как трансформацию Лапласа — Стильтьеса:

$$(1.10) \quad \tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} d\tilde{F}(x),$$

где

$$\tilde{F}(x) = \frac{1}{1 + \lambda \alpha} \left\{ 1 + \lambda \int_0^x [1 - G(u)] du \right\}.$$

Очевидно $\tilde{F}(x)$ — функция распределения и в силу теоремы непрерывности Леви — Хинчина из соотношения (1.8) и (1.9) заключаем, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t, x) = \tilde{F}(x).$$

Функцию $\tilde{F}(x)$ формально можно получить, если в уравнении (1.2) вместо $\partial F(t, x)/\partial t$ напомним ноль и заставим $t \rightarrow \infty$. Тогда мы получим обыкновенное дифференциальное уравнение для $\tilde{F}(x)$, которое и дает (1.6).

Пример. Рассмотрим снова случай, когда $G(x) = 1 - e^{-\mu x}$. Формула (1.6) дает точное выражение для $\tilde{F}(x)$:

$$\tilde{F}(x) = 1 - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-\mu x}.$$

Мы определим $F(t, 0)$ через ее трансформацию (1.5), но она неудобна для пользования.

Покажем, что функция $F(t, 0)$ удовлетворяет интегральному уравнению, которое получим, используя вид ее трансформации Лапласа (1.5). Обозначим

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-su} F(u, 0) du.$$

Из (1.5) имеем

$$s f(s) + \lambda f(s) [1 - g(s)] = 1$$

и отсюда

$$f(s) = \frac{1}{s} - \lambda f(s) \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s} g(s) \right],$$

где $g(s)$ — трансформация Лаплас — Стильтьеса для $G(x)$. Переходя в последнем равенстве к обыкновенным трансформациям Лапласа, получим выражение, которое естественно дает

$$(1.11) \quad F(t, 0) = 1 - \lambda \int_0^t F(t-x, 0) [1 - G(x)] dx.$$

Уравнение вида (1.11) получил Такач в [4].

§ 2. Оценки для скорости достижения стационарного режима

В теории надежности в качестве характеристики надежности одного элемента вводится понятие коэффициента готовности $k(t)$, который равен вероятности, что в моменте t элемент работает. При наших обозначениях очевидно, что $k(t) = F(t, 0)$. Вопрос, который поставим в этом разделе, сводится к следующему: с какой скоростью $k(t)$ приближается к своему предельному значению $1/(1 + \lambda a)$. Для этой цели сначала исследуем подробно уравнение (1.11). Это уравнение является интегральным типа Вольтера с замкнутым циклом. Хорошо известно, что его решение определяется однозначно и дается формулой

$$(2.1) \quad F(t, 0) = 1 + \int_0^t \Phi(x) dx,$$

где $\Phi(x)$ — резольвента уравнения. Функция $\Phi(x)$ определяется как сумма ряда

$$(2.2) \quad \Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \lambda^n [1 - G(x)]_*^{(n)},$$

где

$$[1 - G(x)]_*^{(n)} = \int_0^x [1 - G(t)]_*^{(n-1)} [1 - G(x-t)] dt, \quad [1 - G(x)]_*^{(1)} = 1 - G(x).$$

Из (2.2) получается, что $\Phi(x)$ со своей стороны тоже удовлетворяет интегральному уравнению

$$\Phi(x) = -\lambda [1 - G(x)] - \lambda \int_0^x \Phi(x-t) [1 - G(t)] dt.$$

Так как мы уже знаем, что $F(t, 0)$ имеет предел при $t \rightarrow \infty$, то из (2.1) следует, что интеграл $\int_0^{\infty} \Phi(t) dt$ существует. Больше того, исходя из одной теоремы Пэлей — Винера [5] (т. XVIII, 94), можем утверждать, что $\Phi(t)$ — абсолютно интегрируемая в промежутке $(0, \infty)$, потому что

$$\lambda \int_0^{\infty} [1 - G(x)] e^{-sx} dx \neq -1.$$

Дальше будем использовать следующее утверждение:

Л е м м а 2. Пусть $A(x)$ — функция, которая удовлетворяет уравнению

$$(2.3) \quad A(x) = -\lambda \int_0^x A(x-t) [1 - G(t)] dt + R(x),$$

где $R(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Тогда $\lim_{x \rightarrow \infty} A(x) = 0$.

Это утверждение следует из теоремы Палей — Винера, потому что решением (2.3) является

$$(2.4) \quad A(x) = \int_0^x R(x-t) \Phi(t) dt + R(x),$$

а абсолютная интегрируемость $\Phi(x)$ обеспечивает предельный переход под интегралом в (2.4).

Следующее утверждение, которое мы приведем, характеризует в известной степени достижение стационарного режима.

Теорема 2. Если ф. р. $G(x)$ имеет конечный второй момент

$$a_2 = \int_0^\infty x^2 aG(x),$$

то

$$(2.6) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\int_0^x F(t, 0) dt - \frac{x}{1 + \lambda a} \right] = \frac{\lambda a_2}{2(1 + \lambda a)^2}.$$

Доказательство. Используя лемму 2, покажем, что функция

$$\varphi(x) = \int_0^x \left[F(t, 0) - \frac{1}{1 + \lambda a} \right] dt - C$$

при подходящем выборе константы C стремиться к нулю при $x \rightarrow \infty$.

Приняв во внимание, что $F(t, 0)$ удовлетворяет уравнению (1.11), для $\varphi(x)$ получаем

$$\varphi(x) = -\lambda \int_0^x \varphi(x-t) [1 - G(t)] dt + R(x),$$

где

$$R(x) = \frac{\lambda a x}{1 + \lambda a} - C - \frac{\lambda}{1 + \lambda a} \int_0^x \int_0^t [1 - G(u)] du dt - \lambda C \int_0^x [1 - G(t)] dt.$$

Определим теперь C таким образом, что $R(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Путем несложных вычислений находим

$$C = \frac{\lambda a_2}{2(1 + \lambda a)^2}.$$

Следовательно функция $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению вида (2.4) и в силу леммы 2 $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0$, причем данное предельное соотношение есть и иско-
мое (2.6).

Доказанное выше дает нам возможность найти предельное значение для средней процесса $w(t)$, т. е. для

$$M(t) = \int_0^t x dF(t, x).$$

Следствие. Если ф. р. $G(x)$ имеет конечный второй момент, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M(t) = \frac{\lambda a_2}{2(1 + \lambda a)}.$$

Действительно, из выражения (1.4) для трансформации Лапласа—Стильтьеса на $F(t, x)$, принимая во внимание, что $M(t) = -f'_s(t, 0)$, находим

$$M(t) = \left\{ \int_0^t F(x, 0) dx - \frac{t}{1 + \lambda a} \right\} (1 + \lambda a)$$

и из (2.5) получаем предел для $M(t)$. Найденное граничное значение $M(t)$ совпадает со средней стационарного распределения. Действительно, легко вычислить, что

$$\int_0^\infty x d\tilde{F}(x) = \frac{\lambda a_2}{2(1 + \lambda a)},$$

где $\tilde{F}(x)$ из (1.6).

Для более полного исследования скорости достижения стационарного режима недостаточно только существование второго момента $G(x)$, а нужно больше сведений об этой функции. Чтобы исследовать поведение разницы

$$(2.6) \quad v(x) = F(x, 0) - (1 + \varrho)^{-1}, \quad \varrho = \lambda a,$$

при $x \rightarrow \infty$, вводим функцию

$$(2.7) \quad k(x) = 1 - \frac{1}{a} \int_0^x [1 - G(t)] dt.$$

Пусть $\kappa(s)$ — трансформация Лапласа — Стильтьеса $k(x)$:

$$(2.8) \quad \kappa(s) = - \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-sx} [1 - G(x)] dx, \quad s \geq 0.$$

Теорема 3. Предположим, что $G(x)$ имеет конечный второй момент и пусть ф. р. $G(x)$ такая, что $\kappa(s)$ — рациональная и разность $1 - \varrho \kappa(s)$ аннулируется для некоторых значений s . Тогда

$$(2.9) \quad v(x) = \frac{\varrho}{1 + \varrho} \exp \left[bx + \int_0^x \varepsilon(t) dt \right],$$

где $b < 0$, а $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Доказательство. Из уравнения (1.11) для $F(t, 0)$ получаем, что функция $v(x)$, определена при помощи (2.6), удовлетворяет интегральному уравнению

$$(2.10) \quad v(x) = \frac{\varrho}{1 + \varrho} k(x) + \varrho \int_0^x v(x - y) dk(y).$$

Пусть

$$v^*(s) = \int_0^\infty e^{-sx} v(x) dx,$$

функция $v^*(s)$ определена для каждого $s \geq 0$. При $s > 0$ это очевидно ввиду ограниченности $v(x)$, а при $s = 0$ по теореме 2

$$v^*(0) = \int_0^{\infty} v(x) dx = C.$$

Из (2.10) для $v^*(s)$ получаем

$$(2.11) \quad v^*(s) = \frac{e}{1+e} s^{-1} \frac{1+\kappa(s)}{1-e\kappa(s)}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0.$$

Так как $k(x)$ дифференцируема, то из (2.10) для производной $v'(x)$ находим уравнение

$$(2.12) \quad v'(x) = e k'(x) + e \int_0^x v'(x-y) dk(y).$$

Из (2.12) получаем

$$(2.13) \quad \int_0^{\infty} e^{-sx} v'(x) dx = e \frac{\kappa(s)}{1-e\kappa(s)}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0.$$

Равенства (2.12) и (2.13) показывают, что особенности трансформации Лапласа для $v(x)$ и $v'(x)$ будут одними и теми же, потому что они определяются разницей $1-e\kappa(s)$. Исходя из вида $\kappa(s)$, легко увидеть, что эта разница анулируется только при значениях s , для которых $\operatorname{Re}(s) < 0$. Как известно, поведение функции $v(x)$ для $x \rightarrow \infty$ в рассматриваемом случае определяется особенностями $v^*(s)$ и следовательно

$$(2.14) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{v'(x)}{v(x)} = b,$$

b — константа, отличная от нуля.

Соотношение (2.14) дает

$$\frac{v'(x)}{v(x)} = b + \varepsilon(x),$$

где $\varepsilon(x) \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$, из которого после интегрирования получаем (2.9).

Рассмотрим для каких ф. р. $G(x)$ имеем

$$(2.15) \quad \frac{v'(x)}{v(x)} = b, \quad b \neq 0.$$

Умножая (2.10) на b и вычитывая соответствующие ему стороны из (2.12), заключаем, что,

$$(2.16) \quad e k'(x) = \frac{eb}{1+e} k(x),$$

т. е. $k(x)$ — экспоненциальная функция, следовательно и

$$k'(x) = \frac{1}{a} [1 - G(x)]$$

будет такая же. Отсюда $G(x)$ экспоненциальное распределение.

Наоборот, если $G(x) = 1 - e^{-x/a}$, то функция $k(x)$ удовлетворяет равенству вида (2.16) при $b = -(1+e)a^{-1}$. Тогда функция $\Delta(x) = v'(x) - bv(x)$ — решение уравнения

$$\Delta(x) = e \int_0^x \Delta(x-t) dk(t),$$

следовательно $\Delta(x) = 0$ и имея в виду прежнее, находим

$$v(x) = \frac{e}{1+e} e^{-(1+e)^n - 1} x.$$

Таким образом необходимым и достаточным условием того, чтобы скорость была экспоненциальной, является экспоненциальность $G(x)$.

§ 3. Средние значения

Найдем среднее значение времени работы элемента и среднее число отказов для данного промежутка $(0, T)$. Для этих средних дадим асимптотические приближения при больших значениях T .

Определим функцию $U(x)$ равенством

$$U(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } x \leq 0, \\ 0 & \text{для } x > 0 \end{cases}$$

и образуем процесс $U(-w(t))$. Он принимает значение единицы для тех моментов времени t , в которых элемент работает. Очевидно

$$EU(-w(t)) = F(t, 0).$$

На промежутке $(0, T)$ рассматриваем случайную величину $\tau(T)$, определенную через

$$\tau(T) = \int_0^T U(-w(t)) dt.$$

Ясно, что $\tau(T)$ дает полное время работы элемента в промежутке $(0, T)$. При помощи теоремы Фубини получаем

$$(3.1) \quad Z(T) = E\tau(T) = \int_0^T F(t, 0) dt.$$

Из определения величины $Z(T)$ следует, что среднее время восстановления (ремонта) элемента в промежутке $(0, T)$ равно

$$Y(T) = T - Z(T).$$

Найдем среднее число отказов $m(T)$ элемента в промежутке времени $(0, T)$. Это число равняется среднему числу промежутков работы за время T . образуем сумму

$$S_n = \zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_n$$

и определим случайную величину N_T как наибольший индекс n , для которого выполнено неравенство $S_n \leq \tau(T)$. Так как величины ζ_k , $k = 1, 2, \dots$, экспоненциальные с параметром λ , то условное среднее значение N_T относительно $\tau(T)$ равно $\lambda\tau(T)$, т. е.

$$E(N_T | \tau(T)) = \lambda\tau(T).$$

Принимая ввиду, что $EN_T = E(E(N_T/\tau(T)))$, для среднего числа отказов элемента $m(T)$ находим

$$(3.2) \quad m(T) = EN_T = \lambda E\tau(T) = \lambda \int_0^T F(t, 0) dt.$$

Из полученного выражения видно, что с достаточным основанием можем называть λ интенсивностью отказов элемента. Мы могли бы получить формально равенство (3.2), принимая во внимание, что при пуассоновском процессе среднее число попадений в промежуток длины $Z(T)$ равно $\lambda Z(T)$.

При существовании первого момента ф. р. $G(x)$, принимая во внимание (1.8), получаем для больших T

$$(3.3) \quad m(T) \sim \frac{\lambda T}{1 + \lambda a}.$$

Кроме того, если $G(x)$ имеет конечный второй момент, из (2.6) получим более точное приближение

$$(3.4) \quad m(T) \approx \frac{\lambda T}{1 + \lambda a} + \frac{\lambda^2 a_2}{2(1 + \lambda a)^2}.$$

Пример. Если $G(x) = 1 - e^{-\mu x}$, формулы (3.1) и (3.2) дают точные выражения для $Z(T)$ и $m(T)$. Так как $F(t, 0)$ (§ 1, пример 1) имеет вид

$$F(t, 0) = \frac{\mu + \lambda e^{-(\mu + \lambda)t}}{\mu + \lambda},$$

из (3.1) получим

$$Z(T) = \frac{\mu T}{\mu + \lambda} + \frac{\lambda}{(\mu + \lambda)^2} - \frac{\lambda T}{(\mu + \lambda)^2} e^{-(\mu + \lambda)T},$$

а из (3.2) находим

$$m(T) = \frac{\lambda \mu T}{\mu + \lambda} + \frac{\lambda^2}{(\mu + \lambda)^2} - \frac{\lambda^2 T}{(\mu + \lambda)^2} e^{-(\mu + \lambda)T}.$$

Поскольку в данном случае $a_2 = 2/\mu^2$, сравнение последнего результата с (3.3) и (3.4) показывает, что приближение (3.3) для $m(T)$ верно с точностью до

$$\frac{\lambda^2}{(\mu + \lambda)^2} - \frac{\lambda^2 T}{(\mu + \lambda)^2} e^{-(\mu + \lambda)T},$$

а приближение (3.4) — с точностью до

$$\frac{\lambda^2 T}{(\mu + \lambda)^2} e^{-(\mu + \lambda)T}.$$

Для больших значений T экспоненциальное слагаемое мало и поэтому не принимается во внимание.

§ 4. Система из n параллельно связанных элементов

В этой части рассмотрим систему из n элементов, работающих так, как это было описано в начале.

Пусть имеем систему из n параллельно связанных элементов, работающих одновременно. Пусть время работы i -того элемента экспоненциальное с параметром λ_i и время восстановления того же элемента имеет функцию распределения $G_i(x)$, $i=1, 2, \dots, n$. Система работает, если по крайней мере один из элементов работает. Обозначим виртуальное время состояния i -того элемента через $w_i(t)$ и виртуальное время состояния системы, состоящей из первых k элементов, через $w^{(k)}(t)$, $k=1, 2, \dots, n$. Функции распределения процессов $w_i(t)$ и $w^{(k)}(t)$ будем обозначать соответственно через $F_i(t, x)$ и $F^{(k)}(t, x)$. Функции распределения времени восстановления для системы из первых k элементов в момент перерыва (отказа) t будем обозначать через $G^{(k)}(t, x)$.

Процесс $w^{(k)}(t)$ определяется из $w_i(t)$, $i=1, 2, \dots, k$, посредством

$$(4.1) \quad w^{(k)}(t) = \min(w_1(t), \dots, w_k(t))$$

и следовательно

$$(4.2) \quad 1 - F^{(k)}(t, x) = \prod_{i=1}^k [1 - F_i(t, x)].$$

Функции $F_i(t, x)$ можем считать известными, так как они удовлетворяют дифференциальным уравнениям вида (1.2), поэтому можем считать известными и функции $F^{(k)}(t, x)$. Низвестными в общем случае будут функции $G^{(k)}(t, x)$. Для этих функций однако мы найдем одно рекуррентное соотношение, которое позволит нам найти их все. Прежде всего найдем вероятность $S^{(k)}(t)$ для того, чтобы система из первых k элементов откажет в момент t .

Обозначим через $B_{t,h}^{(k)}$ следующее событие: система состоящая из первых k элементов откажет в промежутке $(t, t+h)$. Тогда существует предел

$$S^{(k)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{P(B_{t,h}^{(k)})}{h}$$

и его нетрудно найти.

Событие $B_{t,h}^{(k)}$ разложим на следующие несовместимые события:

а) В промежутке $(t, t+h)$ система из первых $k-1$ элементов будет восстанавливаться за время, больше чем h , и k -тый элемент откажет в этом промежутке. Переведя это в терминах процессов $w^{(k-1)}(t)$ и $w_k(t)$, получим вероятность этого события

$$[1 - F^{(k-1)}(t, h)] \lambda_k h F_k(t, 0) + o(h).$$

б) В промежутке времени $(t, t+h)$ k -тый элемент будет восстанавливаться за время, больше чем h , и система из первых $k-1$ элементов откажет. В терминах процессов $w_k(t)$ и $w^{(k-1)}(t)$ вероятность этого события будет

$$[1 - F_k(t, h)] P(B_{t,h}^{(k-1)}).$$

в) В момент времени t работают система из первых $k-1$ элементов и k -тый элемент и в промежутке $(t, t+h)$ откажут и система, и элемент. Вероятность этого события будет

$$F_k(t, 0)\lambda_k h P(B_{t,h}^{(k-1)}).$$

Так как $P(B_{t,h}^{(k-1)}) = o(h)$ (это можно увидеть при помощи индукции), то событие в) имеет вероятность $o(h)$.

И так

$$P(B_{t,h}^{(k)}) = [1 - F^{(k-1)}(t, h)]\lambda_k h F_k(t, 0) + [1 - F_k(t, h)]P(B_{t,h}^{(k-1)}) + o(h),$$

откуда получаем

$$(4.3) \quad S^{(k)}(t) = [1 - F^{(k-1)}(t, 0)]\lambda_k F_k(t, 0) + [1 - F_k(t, 0)]S^{(k-1)}(t).$$

Приняв во внимание, что

$$S^{(1)}(t) = \lambda_1 F_1(t, 0) = [1 - F^{(1)}(t, 0)]\lambda_1 \frac{F_1(t, 0)}{1 - F_1(t, 0)},$$

находим

$$\begin{aligned} S^{(2)}(t) &= \lambda_2 F_2(t, 0)[1 - F_1(t, 0)] + \lambda_1 F_1(t, 0)[1 - F_2(t, 0)] \\ &= [1 - F^{(2)}(t, 0)] \left\{ \lambda_2 \frac{F_2(t, 0)}{1 - F_2(t, 0)} + \lambda_1 \frac{F_1(t, 0)}{1 - F_1(t, 0)} \right\} \end{aligned}$$

и индуктивно получаем

$$(4.4) \quad S^{(k)}(t) = [1 - F^{(k)}(t, 0)] \left\{ \lambda_k \frac{F_k(t, 0)}{1 - F_k(t, 0)} + \dots + \lambda_1 \frac{F_1(t, 0)}{1 - F_1(t, 0)} \right\}.$$

Из (4.4) при помощи (1.8) и (4.2) заключаем, что существуют пределы $S^{(k)} = \lim_{t \rightarrow \infty} S^{(k)}(t)$ и

$$(4.5) \quad S^{(k)} = (a_1^{-1} + \dots + a_k^{-1}) \prod_{i=1}^k \frac{\lambda_i a_i}{1 + \lambda_i a_i}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Аналогичными рассуждениями выводим рекуррентное соотношение для распределения $G^{(k)}(t, x)$ времени ремонта системы из первых k элементов, если момент t является моментом отказа системы. В терминах процесса $w^{(k)}(t)$ имеем

$$G^{(k)}(t, x) = P(w^{(k)}(t) < x)$$

(t — момент скачка для $w^{(k)}$).

Рассмотрим работу системы из первых k элементов в промежутке времени $(t, t+h)$, где $h > 0$. Тогда

$$1 - G^{(k)}(t+h, x) = P(w^{(k)}(t+h) > x | B_{t,h}^{(k)}) = \frac{P\{(w^{(k)}(t+h) > x) \cap B_{t,h}^{(k)}\}}{P(B_{t,h}^{(k)})}.$$

Событие $\{w^{(k)}(t+h) > x\} \cap B_{t,h}^{(k)}$ разобьем на следующие несовместимые события:

г) В момент времени t $w^{(k-1)}(t) > x+h$, в промежутке $(t, t+h)$ k -тый элемент откажет и восстановится за время, большее чем $x+h$. Вероятность этого есть

$$[1 - F^{(k-1)}(t, x+h)]F_k(t, 0)\lambda_k h[1 - G_k(x+h)] + o(h).$$

д) В момент времени t $w_k(t) > x+h$, в промежутке $(t, t+h)$ система из первых $k-1$ элементов откажет и восстановится за время, большее чем $x+h$. Вероятность этого есть

$$[1 - F_k(t, x+h)]P(B_{t,h}^{(k-1)})[1 - G^{(k-1)}(t+\theta(h), x+h)] + o(h)$$

где $0 \leq \theta(h) \leq h$.

е) В промежутке $(t, t+h)$ откажут k -тый элемент и система из первых $k-1$ элементов и в отдельности восстановится за время, большее чем $x+h$. Мы уже отметили в пункте в), что вероятность этого имеет порядка $o(h)$. Поэтому имеет место равенство

$$1 - G^{(k)}(t+h, x) = \frac{[1 - F^{(k-1)}(t, x+h)]F_k(t, 0)\lambda_k h[1 - G_k(x+h)]}{P(B_{t,h}^{(k)})} + \frac{[1 - F_k(t, x+h)]P(B_{t,h}^{(k-1)})[1 - G^{(k-1)}(t+\theta(h), x+h)] + o(h)}{P(B_{t,h}^{(k)})},$$

откуда после предельного перехода при $h \rightarrow 0$ получим

$$(4.6) \quad 1 - G^{(k)}(t, x) = \frac{[1 - F^{(k-1)}(t, x)]\lambda_k F_k(t, 0)[1 - G_k(x)] + [1 - F_k(t, x)]S^{(k-1)}(t)[1 - G^{(k-1)}(t, x)]}{S^{(k)}(t)}.$$

Формула (4.6) дает нам рекуррентную зависимость между функциями $G^{(k)}(t, x)$, $k=2, \dots, n$. Имея в виду выражение (4.4) и факт, что $G^{(1)}(t, x) = G_1(x)$, мы получим для каждого k точное выражение для $G^{(k)}(t, x)$ только посредством функции $G_i(x)$, $F_i(t, x)$ и $F_i(t, 0)$, $i=1, 2, \dots, k$, а именно

$$(4.6^*) \quad 1 - G^{(k)}(t, x) = \frac{1 - F^{(k)}(t, x)}{S^{(k)}(t)} \left\{ \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i F_i(t, 0)}{1 - F_i(t, x)} [1 - G_i(x)] \right\},$$

где $F^{(k)}(t, x)$ определяется из (4.2), а $S^{(k)}(t)$ из (4.4).

Далее рассмотрим вопрос о предельном распределении

$$\tilde{G}^{(k)}(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} G^{(k)}(t, x),$$

которое будет распределением времени ремонта для системы из первых k элементов в установившемся режиме. Из выражения (4.6) при помощи индукции можно видеть, что этот предел всегда существует и $\tilde{G}^{(k)}(x)$ получается из

$$(4.7) \quad 1 - \tilde{G}^{(k)}(x) = \frac{[1 - F^{(k-1)}(x)]a_k \lambda_k [1 - G_k(x)] + [1 - \tilde{F}_k(x)]S^{(k-1)}[1 - \tilde{G}^{(k-1)}(x)]}{S^{(k)}},$$

где $S^{(i)}$, $i=k-1, k$, взяты из (4.5) и $a_k = \lim_{t \rightarrow \infty} F_k(t, 0)$.

Подставляя (1.6) и (4.5) в (4.7), принимая во внимание (4.2) и то, что $\tilde{G}^{(1)}(x) = G_1(x)$, после некоторых несложных вычислений находим

$$(4.8) \quad 1 - \tilde{G}^{(k)}(x) = \frac{(a_1 \cdots a_k)^{-1}}{a_1^{-1} + \cdots + a_k^{-1}} \sum_{j=1}^k [1 - G_j(x) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k \left(a_i - \int_0^x [1 - G_i(u)] du \right)].$$

Из (4.8) видно, что распределение $\tilde{G}^{(k)}(x)$ не зависит от λ_i , $i = 1, \dots, k$. Закон распределения (4.8) времени ремонта для системы из k элементов в установившемся режиме можно записать так:

$$1 - \tilde{G}^{(k)}(x) = - \frac{(a_1 \cdots a_k)^{-1}}{a_1^{-1} + \cdots + a_k^{-1}} \frac{d}{dx} \prod_{i=1}^k \left(a_i - \int_0^x [1 - G_i(u)] du \right).$$

Отсюда легко увидеть, что среднее время ремонта системы

$$\alpha^{(k)} = \int_0^\infty [1 - \tilde{G}^{(k)}(x)] dx$$

будет

$$(4.9) \quad \alpha^{(k)} = \frac{1}{a_1^{-1} + \cdots + a_k^{-1}}.$$

Если $G_1(x) = \cdots = G_n(x) = G(x)$ со средним временем восстановления a , для среднего простоя системы в стационарном режиме из (4.9) получим

$$\alpha^{(n)} = \frac{a}{n},$$

результат, который получен Соловьевым в [6] для n однотипных элементов. В дальнейшем снова можем рассмотреть среднее время простоя системы из n элементов $Y^{(n)}(T)$ в промежутке времени $(0, T)$. Оно будет даваться выражением

$$Y^{(n)}(T) = \int_0^T [1 - F^{(n)}(t, 0)] dt$$

и для больших T асимптотически будем иметь

$$(4.10) \quad Y^{(n)}(T) \sim T \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_i a_i}{1 + \lambda_i a_i}.$$

Сейчас найдем среднее число отказов для системы в промежутке времени $(0, T)$. Заметим, что для процесса $w^{(n)}(t)$, полученного в результате суммирования n независимых пуассоновских процессов с параметрами λ_k , $k = 1, 2, \dots, n$, скачки появляются только в некоторых из моментов попадания в $(0, T)$ пуассоновского процесса с параметрами $\lambda = \sum_{k=1}^n \lambda_k$. Система откажет тогда и только тогда, когда $w^{(n)}(t)$ имеет скачок. Среднее число

отказов $m^{(n)}(T)$ дается разницей между числом попадений суммарного пуассоновского процесса за время $Z^{(n)}(T)$ (среднее время работы для системы в промежутке $(0, T)$) и суммой среднего числа отказов каждого элемента за время работы системы из остальных $n-1$ элементов в промежутке $(0, T)$, т. е.

$$(4.11) \quad m^{(k)}(T) = (\lambda_1 + \dots + \lambda_n) \int_0^T F^{(n)}(t, 0) dt - \sum_{k=1}^n \lambda_k \int_0^T F_k^{(n-1)}(t, 0) dt,$$

где $F^{(n)}(t, 0)$ из (4.2), а $F_k^{(n-1)}(t, 0)$ находим из

$$1 - F_k^{(n-1)}(t, 0) = (1 - F_1(t, 0)) \dots (1 - F_{k-1}(t, 0)) (1 - F_{k+1}(t, 0)) \dots (1 - F_n(t, 0))$$

Так как в силу (1.8) имеем

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F_i(t, 0) dt = \frac{1}{1 + \lambda_i \alpha_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

и из (4.11) находим

$$(4.12) \quad m^{(n)}(T) \sim T(\alpha_1^{-1} + \alpha_2^{-1} + \dots + \alpha_n^{-1}) \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_i \alpha_i}{1 + \lambda_i \alpha_i}.$$

Для системы с одним и тем же $G_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, (4.12) принимает очень простой вид

$$m^{(n)}(T) \sim n \left(\frac{\lambda \alpha}{1 + \lambda \alpha} \right)^n \frac{T}{\alpha}.$$

Экспоненциальный случай. Пусть времена работы и ремонта i -того элемента экспоненциально распределены с параметрами соответственно λ_i и μ_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Как мы видели в § 1,

$$F_i(t, 0) = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} + \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} e^{-(\lambda_i + \mu_i)t}.$$

Подставив $F_i(t, 0)$ в (1.4) и принимая во внимание, что $g_i(s) = \frac{\mu_i}{\mu_i + s}$, найдем

$$f_i(t, s) = \frac{\mu_i}{\mu_i + \lambda_i} + \frac{\lambda_i}{\mu_i + \lambda_i} e^{-(\lambda_i + \mu_i)t} + \frac{\lambda_i}{\mu_i + \lambda_i} \frac{\mu_i}{\mu_i + s} [1 - e^{-(\lambda_i + \mu_i)t}].$$

Отсюда легко получить

$$(4.13) \quad F_i(t, x) = 1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} e^{-\mu_i x} [1 - e^{-(\lambda_i + \mu_i)t}].$$

Равенство (4.13) дает вероятность того, что i -тый элемент снова начнет работать не позже момента $t + x$. Из (4.2) и (4.13) получим

$$(4.14) \quad 1 - F^{(n)}(t, x) = e^{-\sum_{i=1}^n \mu_i x} \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} [1 - e^{-(\lambda_i + \mu_i)t}].$$

Для рассматриваемого случая (4.4) с $k=n$ принимает вид

$$(4.15) \quad S^{(n)}(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\mu_j + \lambda_j e^{-(\lambda_j + \mu_j)t}}{1 - e^{-(\lambda_j + \mu_j)t}} \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} [1 - e^{-(\lambda_i + \mu_i)t}].$$

Подставив (4.13), (4.14) и (4.15) в (4.6), увидим, что для нашего случая

$$(4.16) \quad 1 - G^{(n)}(t, x) = \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{\mu_j + \lambda_j e^{-(\lambda_j + \mu_j)t}}{1 - e^{-(\lambda_j + \mu_j)t}} \right\}^{-1} \left\{ e^{-\sum_{i=1}^n \mu_i x} \frac{\mu_n + \lambda_n e^{-(\lambda_n + \mu_n)t}}{1 - e^{-(\lambda_n + \mu_n)t}} + e^{-\mu_n x} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\mu_i + \lambda_i e^{-(\lambda_i + \mu_i)t}}{1 - e^{-(\lambda_i + \mu_i)t}} \right) [1 - G^{(n-1)}(t, x)] \right\}.$$

Если (4.16) использовать рекуррентно, тогда посредством последовательной замены всех $1 - G^{(k)}(t, x)$ меньшего порядка в результате получим

$$(4.17) \quad 1 - \tilde{G}^{(n)}(t, x) = e^{-\sum_{i=1}^n \mu_i x}$$

Результат (4.17) мог бы получиться и индуктивным способом из (4.6) опять при помощи (4.14) и (4.15). В стационарном случае (4.17) можно получить из (4.8), положив $\alpha_i = 1/\mu_i$ и $1 - G_i(u) = e^{-\mu_i u}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Одно простое соображение поможет нам объяснить результат (4.17). Описанную в начале § 4 система из n элементов можно интерпретировать как другую систему, которая имеет следующие свойства. Время работы i -того элемента распределено по закону $G_i(x)$, а время ремонта того же элемента — экспоненциальное с параметром λ_i . В начальный момент рассмотрения $t_0 = 0$ все элементы повреждены и начнут ремонтироваться. Система работает только тогда, когда все элементы работают и прекращает свою работу, если хотя один из элементов поврежден. Систему, описанную в начале, назовем первой, а только что упомянутую — второй. Обе системы связаны следующим образом: когда первая система работает, вторая ремонтируется и, наоборот, когда первая ремонтируется, вторая работает. Если и времена ремонта элементов первой системы $G_i(x)$ экспоненциальны с параметрами μ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, тогда время работы второй системы распределено как минимум n случайных величин с распределениями $G_i(x) = 1 - e^{-\mu_i x}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Этот минимум представляется распределением (4.17). Факт, что (4.17) не зависит от t , обязан специфичным свойством экспоненциального распределения, т. е. если времена работы элементов первой системы (времена ремонта для элементов второй системы) не экспоненциальны, то (4.17) не будет иметь места. Справедливость (4.17) будет только в случае, когда в начальный момент $t_0 = 0$ вторая система начнет работать, вместо того, чтобы ремонтироваться.

В экспоненциальном случае для однотипных элементов все результаты принимают весьма простой вид.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гнедецко, Б. В., Ю. К. Беляев, А. Д. Соловьев. Математические методы в теории надежности. Москва, 1965.
2. Коросіński, В. Breakdown processes of systems in series. Zastosowania Matematyki, **9**, 1967, 53—64.
3. Takács, L. Investigation of waiting time problems by reduction to Markov processes. Acta Math. Acad. Sci. Hung., **6**, 1955, 101—129.
4. Takács, L. Occurrence and coincidence phenomena in case of duration. Acta Math. Acad. Sci. Hung., **2**, 1951, 275—298.
5. Винер, Н., Р. Пизли. Преобразование Фурье в комплексной области, Москва, 1964.
6. Соловьев, А. Д. Надежность систем с восстановлением. Кибернетику на службу коммунизму, т. 2, Москва, Энергия, 1964, 189—193.

Постъпила на 3. II. 1969 г.

ИЗСЛЕДВАНЕ НА НАДЕЖНОСТТА НА СИСТЕМА ПОСРЕДСТВОМ СТОХАСТИЧЕСКИ ПРОЦЕСИ

Апостол Обретенов, Боян Димитров и Михаил Узунов

(Резюме)

Разгледан е въпросът, известен в теорията на надеждността под името „дублиране с възстановяване в случай на натоварен резерв“.

В § 1 е разгледан процесът на работа на един елемент с експоненциално време на работа с параметър λ и произволно разпределение $G(x)$ на времето на ремонт. Този процес на работа е един вероятностен процес, който е означен с $w(t)$. За функцията на разпределение $F(t, x)$ на процеса $w(t)$ е намерено диференциалното уравнение

$$(1.2) \quad \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} - \lambda F(t, 0) + \lambda G(x)F(t, 0).$$

Функцията $F(t, 0)$ удовлетворява интегралното уравнение

$$(1.11) \quad F(t, 0) = 1 - \lambda \int_0^t F(t-x, 0)[1 - G(x)]dx.$$

За процеса $w(t)$ е доказано, че клони към стационарно състояние, което се характеризира с функцията на разпределение

$$(1.6) \quad \tilde{F}(x) = \frac{1}{1 + \lambda a} \left(1 + \lambda \int_0^x [1 - G(u)]du \right).$$

В § 2 са дадени някои оценки за скоростта на достигане на стационарния режим в зависимост от функцията $G(x)$ (теорема 3).

В § 3 са намерени очакваното време $Z(T)$, през което елементът ще работи, и очакваният брой откази на елемента $m(T)$ за интервала от време $(0, T)$:

$$(3.1) \quad Z(T) = \int_0^T F(t, 0) dt,$$

$$(3.2) \quad m(T) = \lambda \int_0^T F(t, 0) dt.$$

За приложенията са особено важни асимптотическите резултати за $m(T)$, които получаваме за големи T .

В § 4 е разгледана система от n успоредно свързани елемента, работещи едновременно и независимо един от друг. Времето на работа на i -тия елемент е разпределено експоненциално с параметър λ_i , $i=1, 2, \dots, n$, а времената на ремонт са разпределени по произволен закон $G_i(x)$ съответно със средни значения a_i , $i=1, 2, \dots, n$.

Доказано е, че разпределението $\tilde{G}^{(n)}(x)$ на времето на ремонт на системата в стационарно състояние се дава от

$$1 - \tilde{G}^{(n)}(x) = \frac{(a_1 a_2 \dots a_n)^{-1}}{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \dots + a_n^{-1}} \frac{d}{dx} \prod_{i=1}^n \left(a_i - \int_0^x [1 - G_i(u)] du \right)$$

и че средната продължителност на един престой на системата е

$$\alpha^{(n)} = \frac{1}{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \dots + a_n^{-1}}.$$

За средния брой откази на системата за време T важи асимптотическият резултат

$$m^{(n)}(T) \sim T(a_1^{-1} + a_2^{-1} + \dots + a_n^{-1}) \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_i a_i}{1 + \lambda_i a_i}$$

Като пример е разгледан случаят, когато $G_i(x) = 1 - e^{-\mu_i x}$, т. е. времето на ремонта на всеки елемент е разпределено експоненциално.

STUDY ON THE RELIABILITY OF A SYSTEM BY MEANS OF STOCHASTIC PROCESSES

Apostol Obretenov, Bojan Dimitrov and Michail Uzunov

(Summary)

The paper concerns the problem known in the theory of reliability under the name "duplication with renewing in case of a loaded reserve".

§ 1 deals with the life process of an element with exponential life time with parameter λ and an arbitrary distribution $G(x)$ of the repair time. For the distribution function $F(t, x)$ of the process $w(t)$ the following differential equation has been found

$$(1.2) \quad \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} - \lambda F(t, 0) + \lambda G(x)F(t, 0).$$

The function $F(t, 0)$ satisfies the integral equation

$$(1.11) \quad F(t, 0) = 1 - \lambda \int_0^t F(t-x, 0)[1-G(x)]dx.$$

It has been proved that the process $w(t)$ tends to a stationary state, characterized by

$$(1.6) \quad \tilde{F}(x) = \frac{1}{1+\lambda a} (1 + \lambda \int_0^x [1-G(u)]du).$$

§2 contains some estimates for the speed of access to the stationary regime in dependence on the function $G(x)$ — theorem 3.

In §3 the expected life time $Z(T)$ of the element and the expected number of failures of the element $m(T)$ in the interval of time $(0, T)$ have been found

$$(3.1) \quad Z(T) = \int_0^T F(t, 0)dt,$$

$$(3.2) \quad m(T) = \lambda \int_0^T F(t, 0)dt.$$

The asymptotic results for $m(T)$ obtained for large values of T are important for the applications.

A system of n elements with parallel connection working simultaneously and independently of each other is considered in §4. The life time of the i -th element is distributed exponentially with parameter λ_i , $i=1, 2, \dots, n$ and the repair times are distributed according to an arbitrary law $G_i(x)$ respectively with mean values a_i , $i=1, 2, \dots, n$.

It has been proved that the distribution $\tilde{G}^{(n)}(x)$ of the repair time for the system in a stationary state is given by

$$1 - \tilde{G}^{(n)}(x) = \frac{(a_1 a_2 \dots a_n)^{-1}}{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \dots + a_n^{-1}} \frac{d}{dx} \prod_{i=1}^n \left(a_i - \int_0^x [1 - G_i(u)]du \right)$$

and that the average duration of a failure for the system is

$$\alpha^{(n)} = \frac{1}{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \dots + a_n^{-1}}.$$

For the average number of failures in the system holds the asymptotic result

$$m^{(n)}(T) \sim T(a_1^{-1} + a_2^{-1} + \dots + a_n^{-1}) \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_i a_i}{1 + \lambda_i a_i}.$$

As an example is considered the case when $G_i(x) = 1 - e^{-\mu_i x}$, e. g. the repair time for every element is distributed exponentially.