БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ * ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XI

ВЪРХУ T-ИДЕАЛИТЕ, СЪДЪРЖАЩИ ЕЛЕМЕНТА $[x_1, x_2, x_3, x_4[x_5, x_6]]$

Михаил Гаврилов

Нека F е поле с характеристика 0, а $F[x]=F[x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots]$ — свободната асоциативна алгебра с единица над полето F, породена от изброима система образуващи $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ Ако $a_1, a_2, \ldots, a_n$ са елементи на някаква асоциативна алгебра, то с $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ ще означаваме деснонормирания комутатор, определен индуктивно от равенствата

$$[a_1, a_2]=a_1a_2-a_2a_1, \quad [a_1, a_2, \ldots, a_n]=[[a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}], a_n].$$

Всеки напълно характеристичен идеал (T-идеал) T в $F[x]$ се поражда от системата линейни пространства $T_n=T\cap\Gamma_n$, където Γ_n е линейното пространство на собствените полилинейни форми от образуващите $x_1, x_2, \ldots, x_n$ [1]. Известно е, че всеки T-идеал, който съдържа поне един от елементите $[x_1, x_2, x_3, x_4]$, $[[x_1, x_2], x_3[x_4, x_5]]$, е крайно породен като напълно характеристичен идеал [2], [3]. Настоящата бележка е обобщение на резултатите от [2] и [3]. В нея се доказва следната

Теорема. Всеки T-идеал в $F[x]$, съдържащ елемента $[x_1, x_2, x_3, x_4[x_5, x_6]]$, е крайно породен.

С нея се решава проблемата на Шпехт [1] в класа на алгебрите с единица, удовлетворяващи тъждеството $[x_1, x_2, x_3, x_4[x_5, x_6]]=0$, т. е. ако в една асоциативна алгебра с единица е налице горното тъждествено съотношение, в тази алгебра всичките тъждества следват от едно тъждество. За доказателството на тази теорема ще ни бъдат необходими няколко сравнения по mod T, където T е T-идеалът, породен от елемента $[x_1, x_2, x_3, x_4[x_5, x_6]]$. Нека σ_{ij} е линейното преобразование в Γ_n, което сменя местата на x_i и x_j и знаците на елементите на Γ_n, а ε е тъждественото преобразование в Γ_n.

Лема. В сила са сравненията

$$[x_1, x_2, x_3, x_4][x_5, x_6]\equiv 0 (\mathrm{mod}\ T), \tag{1}$$

$$[x_1, x_2, x_3][x_4, x_5][x_6, x_7][x_8, x_9]\equiv 0 (\mathrm{mod}\ T), \tag{2}$$

$$[x_1, x_2][x_3, x_4][x_5, x_6][x_7, x_8][x_9, x_{10}](\varepsilon-\sigma_{ij})\equiv 0 (\mathrm{mod}\ T), \tag{3}$$

$$[x_1, x_2, \ldots, x_n](\varepsilon+\sigma_{ij})\equiv 0 (\mathrm{mod}\ T), \quad n\geq 5; \quad i, j\geq 3. \tag{4}$$

Доказателство. Сравнението (1) се получава веднага от

$$0\equiv[x_1, x_2, x_3], x_4[x_5, x_6]]=[x_1, x_2, x_3, x_4][x_5, x_6]+[x_1, x_2, x_3, [x_5, x_6]]x_4$$
$$\equiv[x_1, x_2, x_3, x_4][x_5, x_6] (\mathrm{mod}\ T).$$

Да докажем сравнението (2). Като използваме (1), се убеждаваме, че

$$(5)\quad 0 \quad [[[x_1, x_2], x_3[x_4, x_5]], x_6[x_7, x_8]] \equiv [[x_1, x_2, x_3][x_4, x_5], x_6[x_7, x_8]]$$
$$[x_1, x_2, x_3][[x_4, x_5], x_6[x_7, x_8]] \equiv [x_1, x_2, x_3][x_4, x_5, x_6][x_7, x_8] \pmod T.$$

По-нататък имаме

$$0 \equiv [[x_1, x_2, x_3, x_4], x_5[x_6, x_7][x_8, x_9] = [x_3[x_1, x_2, x_4], x_5[x_6, x_7]][x_8, x_9]$$
$$+ [[x_1, x_2, x_3]x_4, x_5[x_6, x_7]][x_8, x_9] \equiv [x_3, x_5[x_6, x_7]][x_1, x_2, x_4][x_8, x_9]$$
$$+ [x_1, x_2, x_3][x_4, x_5[x_6, x_7]][x_8, x_9] \equiv [x_1, x_2, x_4][x_3, x_5][x_6, x_7][x_8, x_9]$$
$$+ [x_1, x_2, x_3][x_4, x_5][x_6, x_7][x_8, x_9] \pmod T,$$

откъдето вземайки пред вид, че

$$[x_1, x_2, x_3][x_4, x_5][x_6, x_7] = [x_1, x_2, x_3][x_6, x_7][x_4, x_5] + [x_1, x_2, x_3]x_4, x_5, x_6, x_7]$$
$$- [x_1, x_2, x_3][x_4, x_5, x_7, x_6] \equiv [x_1, x_2, x_3][x_6, x_7][x_4, x_5] \pmod T,$$

получаваме

$$(6)\qquad [x_1, x_2, x_3][x_4, x_5][x_6, x_7][x_8, x_9](\varepsilon - \sigma_{3j}) \equiv 0 \pmod T, \quad j \geqq 4.$$

Освен това

$$0 \quad [[x_1, x_2, x_3, x_4], x_5[x_6, x_7]][x_8, x_9] = [[x_1, x_2][x_3, x_4], x_5[x_6, x_7]][x_8, x_9]$$
$$+ [x_2[x_1, x_3, x_4], x_5[x_6, x_7]][x_8, x_9] + [[x_1, x_2][x_3, x_4], x_5[x_6, x_7]][x_8, x_9]$$
$$+ [[x_1, x_2, x_4]x_3, x_5[x_6, x_7]][x_8, x_9] \equiv [[x_2, x_4][x_1, x_3], x_5][x_6, x_7][x_8, x_9]$$
$$+ [x_2, x_5[x_6, x_7]][x_1, x_3, x_4][x_8, x_9] + [[x_1, x_2][x_3, x_4], x_5][x_6, x_7][x_8, x_9]$$
$$+ [x_1, x_2, x_4][x_3, x_5[x_6, x_7]][x_8, x_9] \equiv [x_2, x_4, x_5][x_1, x_3][x_6, x_7][x_8, x_9]$$
$$+ [x_2, x_4][x_1, x_3, x_5][x_6, x_7][x_8, x_9] + [x_2, x_5][x_6, x_7][x_1, x_3, x_4][x_8, x_9]$$
$$+ [x_1, x_2, x_5][x_3, x_4][x_6, x_7][x_8, x_9] + [x_1, x_2][x_3, x_4, x_5][x_6, x_7][x_8, x_9]$$
$$+ [x_1, x_2, x_4][x_3, x_5][x_6, x_7][x_8, x_9] \equiv [x_2, x_4, x_5][x_1, x_3][x_6, x_7][x_8, x_9]$$
$$+ [x_3, x_4, x_5][x_1, x_2][x_6, x_7][x_8, x_9] \pmod T,$$

откъдето следва, че

$$(7)\qquad [x_1, x_2, x_3][x_4, x_5][x_6, x_7][x_8, x_9](\varepsilon - \sigma_{ij}) \equiv \pmod T, \ i = 1.$$

От (6) и (7) следва, че (7) е изпълнено за произволни $i, j = 1, 2, \ldots, 9$. Като вземем пред вид това и тъждеството на Якоби, получаваме

$$0 = ([x_1, x_2, x_3] + [x_2, x_3, x_1] + [x_3, x_1, x_2])[x_1, x_5][x_6, x_7][x_8, x_9]$$
$$\equiv 3[x_1, x_2, x_3][x_4, x_5][x_6, x_7][x_8, x_9] \pmod T,$$

откъдето следва сравнението (2).

Сравнението (3) се получава от (2), като вземем пред вид, че елементът $[x_1, x_2][x_3, x_4](\varepsilon - \sigma_{ij})$ принадлежи на T-идеала, породен от елемента $[x_1, x_2, x_3]$ [4].

Сравнението (4) следва от

$$0 \equiv [[x_1, x_2], [x_3, x_4, x_5]] = [[x_1, x_2], [x_3, x_4], x_5] - [x_1, x_2, x_5, [x_3, x_4]]$$
$$\equiv [x_1, x_2, [x_3, x_4], x_5] (\mathrm{mod}\ T).$$

Доказателство на теоремата. Да означим с $\{f(x_1, x_2, \ldots, x_k)\}^T$ напълно характеристичния идеал в $F[x]$, породен от елемента $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Като използваме сравненията на горната лема и разсъждения, аналогични на тези в [3], можем да докажем, че при $n \geqq 10$

$$T_n = \{[[x_1, x_2], x_3[x_4, x_5]]\}_n^T.$$

Това равенство и сравненията (2) и (4) ни позволяват, повтаряйки разсъжденията от доказателството на теорема 2 от [3], да твърдим, че всяка растяща верига от T-идели, съдържаща T, се стабилизира. Оттук следва верността на теоремата.

ЛИТЕРАТУРА

1. Specht, W. Gesetze in Ringen. Math. Zeits., **52**, 1950, 557—589.
2. Латышев, В. Н. О конечной порожденности T-идеала с элементом $[x_1, x_2, x_3, x_4]$. Сиб. мат. ж., **6**, № 6, 1965, 1432—1435.
3. Гаврилов, М. Б. О T-идеалах с элементом $[[x_1, x_2], x_3 [x_4, x_5]]$. Доклады БАН, **21**, № 11, 1968, 1153—1156.
4. Латышев, В. Н. Об алгебрах с тождественными соотношениями. ДАН СССР, **146**, № 5, 1962, 1003—1006.

Постъпила на 15. II. 1969 г.

О T-ИДЕАЛАХ, СОДЕРЖАЩИХ ЭЛЕМЕНТ $[x_1, x_2, x_3, x_4, [x_5, x_6]]$

Михаил Гаврилов

(Резюме)

Доказана следующая теорема: Если T является T-идеалом в свободной ассоциативной алгебре $F[x_1, x_2, \ldots, x_4, \ldots]$ и $[x_1, x_2, x_3, x_4[x_5, x_6]] \in T$, T является конечно порожденным. (Характеристика поля F равна нулю).

ON THE T-IDEALS, CONTAING THE ELEMENT $[x_1, x_2, x_3, x_4[x_5, x_6]]$

Mihail Gavrilov

(Summary)

In this note we prove the following theorem: If T is a T-ideal in the free associative algebra $F[x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots]$ and $[x_1, x_2, x_3, x_4[x_5, x_6]] \in T$, then T is finitely generated. (The characteristic of F is 0.)