БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XIII

ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ЗАДАЧАХ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Митко Цветанов

1. То обстоятельство, что каждой выпуклой функции можно сопоставить другую — „двойственную" — функцию, было давно отмечено и использовано в классическом анализе.

Например, в классическом вариационном исчислении, в задаче об исследовании на экстремум функционала $\int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t))\,dt$ это сопоставление приводит к гамильтониану $H(t, x, p)$, где функция $H(t, x, p)$ получается в результате преобразования Лежандра.

Формула $p = f_{\dot{x}}(t, x, \dot{x})$ для функции f — выпуклой, гладкой и растущей достаточно быстро по последнему аргументу — приводит к функции $\dot{x} = \varphi(t, x, p)$ и в итоге функция H задается формулой

$$H(t, x, p) = p\varphi(t, x, p) - f(t, x, \varphi(t, x, p)).$$

Так получается пара двойственных функций

$$f(.\,,.\,,\dot{x}) \leftrightarrow H(.\,,.\,,p),$$

где t и x играют роль параметров.

Для функций одного переменного обобщение преобразования Лежандра на случай функций выпуклых, но не обязательно гладких было осуществлено Юнгом [33].

В 1939 году Мандельбройт дал наиболее естественное определение двойственной функции для функции $f(x)$ одного переменного. Он определил ее как

$$\sup_x [xy - f(x)] \tag{1}$$

и доказал, что $f^{**}(x) = f(x)$, если на f наложит некоторые ограничения.

Важный шаг в построении современной теории двойственности выпуклых функций был сделан немецким геометром В. Фенхелем, который дал эту теорию в конечномерных пространствах. А именно для функции $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ из R^1 Фенхель определил $f^*(y)$ выражением (1), где xy следует заменить на скалярное произведение

$$x, y = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

Перенесение теории Фенхеля на общий случай пространств в двойственности — было осуществлено Моро [16], Брондстедом [3] и Рокафелларом [21]—[27].

Ввиду особой важности, которую играют выпуклые функции в вариационных задачах, общая теория выпуклых функций сразу же получила там широкое распространение. Общие необходимые условия экстремума получили наиболее завершенные формулировки в терминах новой теории.

Идеи и методы этой новой теории стали внедряться и в конкретные главы вариационного исчисления, в частности, в классическое вариационное исчисление и теорию оптимального управления. Надо заметить, что первый шаг в этом направлении был сделан уже давно, до создания общей теории: Фридрихс в работе [30], изложенной впоследствии с несколько меньшей подробностью в монографии Куранта и Гильберта [12], привел примеры задач классического вариационного исчисления и двойственных к ним в терминах преобразования Лежандра. Но особенно много работ в этом направлении появилось, конечно, в самое последнее время.

Одной из этих работ, которая послужила отправным пунктом для данной работы, явилась статья Иоффе и Тихомирова [7], в которой методами двойственности исследовалась, среди других, задача классического вариационного исчисления с функционалом

$$I(x) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, \dot{x}(t))\, dt. \tag{2}$$

Следующий (в некотором смысле последний, где от прямого применения методов двойственности можно ожидать непосредственного эффекта) шаг состоял в том, чтобы применить теорию двойственности к задачам классического вариационного исчисления с функционалом

$$\int_{t_0}^{t_2} f(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt,$$

где $f(t, x, \dot{x})$ предположена выпуклой по $(x, \dot{x})$ в совокупности.

Общие методы теории двойственности развиты в [32]. Ниже мы коротко сформулируем основные результаты работы [32].

§ 1. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ В C И C^1 И ИМ ДВОЙСТВЕННЫЕ

1. Рассмотрим пространство $\mathfrak{X} = C[t_0, t_1]$.

Как известно, пространство $C^*[t_0, t_1]$ всех непрерывных линейных функционалов $f(x)$, заданных на $C[t_0, t_1]$, изометрически изоморфно пространству регулярных мер, или иначе пространству функций ограниченной вариации (непрерывных справа), т. е. для каждого непрерывного линейного функционала $f(x)$ существует единственная функция $\mu(t)$ ограниченной вариации такая, что

$$(3)\qquad f(x)=\int_{t_0}^{t_1} x(t)d\mu(t),\quad \|f\|=\|\mu\|=\operatorname{Var}\mu=\int_{t_0}^{t_1}|d\mu(t)|$$

(Поскольку отрезок $[t_0, t_1]$ фиксирован, то мы будем в дальнейшем писать C и C_1 вместо $C[t_0, t_1]$ и $C^1[t_0, t_1]$ соответственно.)

Пусть в пространстве C задан функционал

$$(4)\qquad F(x)\quad \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t))dt,$$

где функция f предположена выпуклой и определенной по x на всем пространстве R^1 для всех $t\in[t_0, t_1]$ и непрерывной по совокупности $(t, x]$ на $[t_0, t_1]\times R^1$.

По определению

$$(5)\qquad F^*(\mu)=\sup_{x\in C}\left[\int_{t_0}^{t_1} x(t)d\mu(t)-\int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t)\,dt\right].$$

Имеет место следующая

Лемма 1. Если $F^*(\mu)<\infty$, то μ абсолютно непрерывная мера.

Доказательство. Пусть $0<F^*(\mu)<\infty$. По неравенству Юнга

$$(6)\qquad \langle x, \mu\rangle=\int_{t_0}^{t} x(t)d\mu(t)\leqq F^*(\mu)+F(x).$$

Не уменьшая общности, предположим, что $f(t, 0)=0$ для всех $t\in[t_0, t_1]$ (иначе будем рассматривать функцию $f(t, x)-f(t, 0)$ и функционал $\widetilde{F}$ будет иметь вид $F(x)-F(0)$, двойственный к которому будет $F^*(\mu)+F(0)$; для этих функционалов неравенство (6) будет выполнено).

Пусть $N>F^*(\mu)$ произвольное фиксированное число. Обозначим

$$M=\sup_{\substack{|x|\leqq N\\ t_0\leqq t\leqq t_1}} f(t, x).$$

Пусть E произвольное измеримое подмножество отрезка $[t_0, t_1]$ (в силу регулярности μ можем предположить E замкнутым). Множество E можно покрыть системой интервалов Ω с общей длиной $\Lambda<\nu(E)+\varepsilon$, где $\nu(E)$ — мера множества E и $\varepsilon>0$ — произвольно. Обозначим через V множество тех $x\in C$, для которых $|x(t)|\leqq N$ при $t\in E$ и $x(t)=0$ при $t\bar{\in}\Omega$. Из (6) следует, что

$$\sup_{x\in V}\int_E x(t)d\mu(t)=N\operatorname{Var}\mu/_E\leqq F^*(\mu)+M[\nu(E)+\varepsilon].$$

Докажем, что при $\nu(E)\to 0$ имеем $\operatorname{Var}\mu/_E\to 0$. Пусть это не так. Тогда $\operatorname{Var}\mu/_E\to c>0$ при $\nu(E)\to 0$ и мы получаем, что

$$Nc\leqq F^*(\mu)+M\varepsilon,$$

откуда, ввиду произвольности $\varepsilon > 0$, следует, что $Nc \leq F^*(\mu)$. Но, в силу произвольности N, это неравенство будет нарушено при $N > F^*(\mu)/c$. Итак, допущение, что $\operatorname{Var} \mu_E$ не стремится к нулю при $\nu(E) \to 0$, привело нас к противоречию.

Лемма доказана.

Из этой леммы следует, что равенству (5) можно придать следующий вид:

$$F^*(\mu) = \sup_{x \in C} \left[\int_{t_0}^{t_1} x(t) d\mu(t) - \int_{t_0}^{t} f(t, x(t))\, dt \right] = \sup_{x \in C} \int_{t_0}^{t_1} [x(t)\dot{\mu}(t) - f(t, x(t))]\, dt. \tag{5'}$$

Выразим функционал $F^*(\mu)$ чрез функцию f^*, где

$$f^*(t, y) = \sup_{x \in R^1} [xy - f(t, x)].$$

Лемма 2. Если μ абсолютно непрерывна, то

$$F^*(\mu) = \int_{t_0}^{t_1} f^*(t, \dot{\mu}(t))\, dt. \tag{7}$$

Доказательство.

$$F^*(\mu) = \sup_{x \in C} \int_{t_0}^{t_1} [x(t)\dot{\mu}(t) - f(t, x(t))]\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \sup_{x \in R^1} [x\dot{\mu}(t) - f(t, x)] dt = \int_{t_0}^{t_1} f^*(t, \dot{\mu}(t)) dt.$$

Допустим, что

$$\Phi(\mu) = \int_{t_0}^{t_1} f^*(t, \dot{\mu}(t)) dt < \infty$$

(случай $\Phi(\mu) = \infty$ рассматривается аналогично). Пусть

$$F^*(\mu) < \Phi(\mu) - 2\varepsilon. \tag{8}$$

Рассмотрим множество

$$X(t) = \left\{ x : x\dot{\mu}(t) - f(t, x) \geq f^*(t, \dot{\mu}(t)) - \frac{\varepsilon}{2(t_1 - t_0)} \right\}.$$

Оно не пусто и в силу непрерывности f и измеримости $\dot{\mu}$ его график, т. е. множество $\{(t, x) : x \in X(t),\ t \in [t_0, t_1]\}$ есть аналитическое множество по mod 0 по t [7].

По теореме об измеримом выборе существует измеримая ветвь $x_0(t)$ такая, что

$$f^*(t, \dot{\mu}(t)) \quad x_0(t)\dot{\mu}(t) - f(t, x_0(t)) \geq f^*(t, \dot{\mu}(t)) - \frac{\varepsilon}{2(t_1 - t_0)}$$

В силу теоремы Лузина можно выбрать замкнутое множество T меры $\theta \geq t_1 - t_0 - \delta$, на котором $x_0(t)$ непрерывна. Выберем δ так, что

$$\int\limits_{[t_0, t_1] \quad T} |f^*(t, \dot{\mu}(t)) - f(t, 0)|\, dt < \frac{\varepsilon}{2}$$

Устроим последовательность непрерывных функций $\{x_n(t)\}$ следующим образом:

$$x_n(t) = \begin{cases} x_0(t) \text{ на } T; \\ 0 \text{ на } [t_0, t_1] \setminus T. \end{cases}$$

Тогда

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_{t_0}^{t_1} [x_n(t)\dot{\mu}(t) - f(t, x_n(t))]\, dt$$

$$\int\limits_{T} [x_0(t)\dot{\mu}(t) \quad f(t, x_0(t))]\, dt$$

$$+ \lim_{n \to \infty} \int\limits_{[t_0, t_1] \quad T} [x_n(t)\dot{\mu}(t) - f(t, x_n(t))]\, dt$$

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} f^*(t, \dot{\mu}(t))\, dt - \varepsilon$$

в противоречии с (8).

2. Рассмотрим пространство $\mathfrak{X} \quad C^1[t_0, t_1]$.

Общий вид непрерывного линейного функционала, заданного на C_1 следующий:

$$f(x) = \alpha x(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t_1} \dot{x}(t)\, d\mu(t),$$

где α — постоянная, а μ — регулярная мера.

Пусть в пространстве C_1 задан функционал

$$F(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(t, x(t))\, dt,$$

где функция f предположена выпуклой и определенной по x на всем пространстве R^1 для всех $t \in [t_0, t_1]$ и непрерывной по совокупности $[t, x]$ на $[(t_0, t_1) \times R^1$.

По определению

$$F^*(\mu) \quad \sup_{x \in C_1} \left[\alpha x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \dot{x}(t)\, d\mu(t) - \int_{t_0}^{t_1} f(t,\ x(t))\, dt \right]. \tag{9}$$

Справедлива следующая

Лемма 3. Если $F^*(\mu) < \quad$, то μ — абсолютно непрерывна.

Доказательство проводится точно так же, как и доказательство леммы 1 и мы его приводить не будем.

Используя эту лемму, мы можем придать функционалу $F^*(\mu)$ следующий вид:

$$F^*(\mu) = \sup_{x \in C_1} \left[\alpha x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \dot{x}(t)\, d\mu(t) - \int_{t_0}^{t_1} f(t\ x(t) dt \right] \tag{9'}$$

$$\sup_{x \in C_1} \left[\alpha x(t_0) - \int_{t_0}^{t_1} [\dot{x}(t_0)\mu(t) \quad f(t,\ x(t))]\, dt \right]$$

Лемма 4. Если $F^*(\mu) < \quad$, то $\dot{\mu}$ абсолютно непрерывна.

Доказательство. Пусть $0 < F^*(\mu) < \quad$. По неравенству Юнга и по лемме 3

$$\alpha x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \dot{x}(t)\dot{\mu}(t)\, dt \quad F^*(\mu) + F(x). \tag{10}$$

Из этого неравенства и из ограничений, наложенных на функцию f, следует, что функционал

$$\alpha x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \dot{x}(t)\dot{\mu}(t)\, dt$$

ограничен в топологии пространства C на множестве A абсолютно непрерывных функций, плотном в C. Поэтому он однозначно продолжается до непрерывного линейного функционала на C, т. е. существует такой непрерывный линейный функционал вида

$$\int_{t_0}^{t_1} x(t)\, dz(t),$$

заданный на C, что для всех $x \in A$

$$\alpha x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \dot{x}(t)\dot{\mu}(t)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} x(t) dz(t). \tag{10'}$$

Но на множестве таких функций мы можем проинтегрировать правую часть (10′) по частям:

$$\int_{t_0}^{t_1} x(t)dz(t) = x(t_1)z(t_1-0) - x(t_0)z(t_0) - \int_{t_0}^{t_1} \dot{x}(t)z(t)\,dt.$$

Отсюда

$$\alpha x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \dot{x}(t)\dot{\mu}(t)dt = x(t_1)z(t_1-0) - x(t_0)z(t_0) - \int_{t_0}^{t_1} \dot{x}(t)z(t)dt$$

для всех $x \in A$; сразу следует, что

$$z(t_1-0)=0,\ z(t_0)=-\alpha,\ \dot{\mu}=-z.$$

Итак, μ есть функция ограниченной вариации, следовательно, функционалу (10) можем придать вид

$$\alpha x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \dot{x}(t)\dot{\mu}(t)\,dt = \alpha x(t_0) + x(t_1)\dot{\mu}(t_1-0)$$

$$x(t_0)\mu(t_0) - \int_{t_0}^{t_1} x(t)d(-\mu(t)) = \int_{t_0}^{t_1} x(t)d(-\dot{\mu}(t))$$

и при этом неравенство (10) сохраняется, т. е.

$$\int_{t_0}^{t_1} x(t)d(-\dot{\mu}(t)) \leq F^*(\mu) + F(x).$$

Но для такого функционала было доказано (см. лемму 1), что $-\dot{\mu}$ абсолютно непрерывна, чем и заканчивается доказательство.

Эта лемма дает нам возможность придать равенству (9) следующий вид:

$$F^*(\mu) = \sup_{x \in C_1}\left[\alpha x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} [\dot{x}(t)\dot{\mu}(t) - f(t, x(t))]dt\right]$$

$$= \sup_{x \in C_1} \int_{t_0}^{t_1} [x(t)(-\ddot{\mu}(t)) - f(t, x(t))]dt.$$

Лемма 5. Если $\dot{\mu}$ — абсолютно непревывна, то

$$F^*(\mu) = \int_{t_0}^{t_1} f^*(t, -\ddot{\mu}(t))dt.$$

Доказательство проводится точно так же, как и доказательство леммы 2, и мы его приводить не будем.

Итак, при упомянутых ограничениях для f мы получаем:

а) если функционал F задан в C, то

$$\operatorname{dom} F^* = \left\{ \mu : \mu \text{ абсолютно непрерывна и } \int_{t_0}^{t_1} f^*(t, \mu(t))\, dt < \infty \right\};$$

б) если функционал F задан в C_1, то

$$\operatorname{dom} F^* = \left\{ (a, \mu) : \dot{\mu} \text{ — абсолютно непрерывна, } \mu(t_0) = a,\ \mu(t_1) = 0, \right.$$

$$\left. \int_{t_0}^{t_1} f^*(t, \dot{\mu}(t))\, dt \right\}.$$

§ 2. ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ЗАДАЧАХ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

1. Постановка задачи. В классическом вариационном исчислении одной из простейших является задача о нахождении нижней грани функционала

$$I(x) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t), \dot{x}^1(t), \dot{x}^2(t), \ldots, \dot{x}^n(t)) dt$$

при условии, что $f(t, x, \dot{x})$ удовлетворяет некоторым ограничениям и что непрерывно диференцируемая вектор-функция $x(t)$ $(x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t))$ соединяет две определенные точки n-мерного пространства:

$$x(t_0) = (x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n) = x_0,\ x(t_1) = (x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^n) = x_1.$$

К задачам такого типа мы и будем применять двойственность.

В [32] мы рассматриваем двойственность в задачах вариационного типа в общих пространствах. Здесь мы сформулируем для удобства, основные результаты работы [32], которые непосредственно применяются и к задачам классического вариационного исчисления.

I. Общая схема.

1) Пусть $\mathfrak{X}_i$ и $\mathfrak{Y}_i$, $i = 1, 2$, находятся в двойственности относительно билинейной формы $\langle x_1, y_1 \rangle$ и $\langle\langle x_2, y_2 \rangle\rangle$ соответственно. Пусть A — замкнутый линейный оператор, действующий из $\mathfrak{X}_1$ в $\mathfrak{X}_2$ и $A^*: \mathfrak{Y}_2 \to \mathfrak{Y}_1$ — его сопряженный. Пусть на произведении пространств $\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2$ задана выпуклая замкнутая (полунепрерывная снизу) по совокупности переменных функция $f(x_1, x_2)$.

2) Найти $\inf f(x_1, x_2)$ при условиях, что $x_2 = Ax_1$, $x_1 \in X$, где $X \subset \mathfrak{X}_1$ некоторое выпуклое замкнутое множество.

3) Предположим, что существует точка (x_1^0, Ax_1^0), $x_1^0 \in X$, где f непрерывна в максимальной топологии, совместимой с двойственностью (в случае B-пространства это будет топология нормы). Функцию $\tilde{f}(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) + \delta_{X \times \mathfrak{X}_2}(x_1, x_2)$, для которой выполнены эти ограничения, мы назвали N-функцией.

4) Теорема двойственности. Если $\tilde{f}$ N-функция, то

$$\inf_x \tilde{f}(x, Ax) + \min_y \tilde{f}^*(-A^*y, y) = 0. \tag{11}$$

5) Уравнение Эйлера. Для того чтобы N-функция $\tilde{f}(x_1, x_2)$ достигала минимума в точке (x_1^0, x_2^0) при условии, что $x_2 = Ax_1$, необходимо и достаточно, чтобы существовали $(y_1^0, y_2^0) \in \partial \tilde{f}(x_0, Ax_0)$ такие, что выполнялось соотношение

$$y_1^0 + A^* y_2^0 = 0. \tag{12}$$

6) Канонические уравнения. Пусть $\tilde{f}(x_1, x_2)$ является N-функцией. Пусть (x_1^0, x_2^0) — точка минимума функции $\tilde{f}$ при условии, что $x_2 = Ax_1$. Пусть $(-A^*y_0, y_0)$ является точкой минимума функции $f^*(-A^*y, y)$. Тогда имеют место соотношения

$$\partial_{y_2} \tilde{H}(x_0, y_0) \ni Ax_0, \quad \partial_{x_1} \tilde{H}(x_0, y_0) \ni A^* y_0,$$

где $\tilde{H}(x_1, y_2) = \sup_{x_2} [\langle\langle x_2, y_2 \rangle\rangle - \tilde{f}(x_1, x_2)]$ — функция Гамильтона функции $\tilde{f}$.

II. Вариационное исчисление.

1) $\mathfrak{X}_1 = C_1^n$, $\mathfrak{X}_2 = C^n$, $\mathfrak{Y}_1 = C_1^{n*}$, $\mathfrak{Y}_2 = C^{n*} = V^n$, $A = \frac{d}{dt}$,

$$\langle x_1, y_1 \rangle = \langle a, x_1(t_0) \rangle + \int_{t_0}^{t_1} \langle \dot{x}_1(t), d\mu_1(t) \rangle, \quad y_1 \leftrightarrow (a, \mu_1),$$

$$\langle\langle x_2, y_2 \rangle\rangle = \int_{t_0}^{t_1} \langle x_2(t), d\mu_2(t) \rangle, \quad y_2 \leftrightarrow \mu_2,$$

$$F(x_1, x_2) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x_1(t), x_2(t)) dt, \tag{13}$$

$$F^*(\mu_1, \mu_2) = \sup_{x_1, x_2} \left[\langle a, x_1(t_0) \rangle + \int_{t_0}^{t_1} \langle \dot{x}_1(t), d\mu_1(t) \rangle \right.$$

$$\left. + \int_{t_0}^{t_1} \langle x_2(t), d\mu_2(t) \rangle - \int_{t_0}^{t_1} f(t, x_1(t), x_2(t)) dt \right].$$

2) Найти $\inf F(x_1, x_2)$ при условиях $x_2(t) = \frac{d}{dt} x_1(t)$ и $x_1 \in X$, где $X \subseteq C_1^n$ задается одним из следующих определений:

а) оба конца x_1 свободны, т. е. $X = C_1^n$;

б) $X = \{x_1 : x_1(t_0) = x_1(t_1) = 0\}$;

в) $X = \{x_1 : x_1(t_0) = x_0$, правый конец свободен$\}$;

г) $X = \{x_1 : x_1(t_1) = x_1$, левый конец свободен$\}$;

д) $X = \{x_1 : x_1(t_0) = x_0,\ x_1(t_1) = x_1\}$.

3) Лемма 6. Пусть $f(t, x_1, x_2)$ выпукла по совокупности (x_1, x_2) для всех $t \in [t_0, t_1]$ и непрерывна по (t, x_1, x_2) на $[t_0, t_1] \times R^n \times R^n$. Тогда функционал $F(x_1, x_2)$ является N-функцией в нормированной топологии (в случаях а) — д) пункта 2).

Доказательство. Пусть $x_0 \in C_1^n$ — функция с ограниченной производной. Пусть $\{x_1^m\} \to x_0$ в C_1^n и $\{x_2^m\} \to \dot{x}_0$ в C. Поскольку множества $\{x_1^m(t)\}_{m,t}$ и $\{x_2^m\}_{m,t}$ ограничены в R^n, то $f(t), x_1^m(t), x_2^m(t)) \leq K$ для всех m и t и, следовательно, по теореме Лебега

$$\lim_{m\to\infty} F(x_1^m, x_2^m) = \lim_{m\to\infty} \int_{t_0}^{t_1} f(t, x_1^m(t), x_2^m(t))\, dt$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \lim_{m\to\infty} f(t, x_1^m(t), x_2^m(t))\, dt = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x_0(t), \dot{x}_0(t))\, dt = F(x_0, \dot{x}_0),$$

что и означает, что функционал F непрерывен (сильно) в точке $(x_0, \dot{x}_0)$.

Лемма 7. Пусть

$$F(x_1, x_2) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x_1(t), x_2(t))\, dt,$$

где f удовлетворяет лемме 6. Тогда

$$F^*(\mu_1, \mu_2) = \int_{t_0}^{t_1} f^*(t, -\ddot{\mu}_1(t), \dot{\mu}_2(t))\, dt$$

и $\operatorname{dom} F^* = \Big\{(a, \mu_1, \mu_2) : \dot{\mu}_1$ и μ_2 — абсолютно непрерывны, $\mu_1(t_0) = a$, $\dot{\mu}_1(t_1) = 0$ и $\int_{t_0}^{t_1} f^*(t, -\ddot{\mu}_1(t), \dot{\mu}_2(t)\, dt < \infty\Big\}$.

Доказательство. По определению

$$F^*(\mu_1, \mu_2) = \sup_{x_1 \in C_1^n, x_2 \in C^n} \Big[(a, x_1(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} (\dot{x}_1(t), d\mu_1(t)) + \int_{t_0}^{t_1} (x_2(t), d\mu_2(t)) - \int_{t_0}^{t_1} f(t, x_1(t), x_2(t))\, dt \Big].$$

При фиксированном x_1 правая часть превращается в функцию от x_2 и, следовательно, применима лемма 1, т. е. μ_2 — абсолютно непрерывна. Если фиксируем x_2, то правая часть превращается в функцию, зависящую только от x_1. Но тогда применимы леммы 3 и 4, т. е. μ_1 — абсолютно непрерывна. Далее

$$F^*(\mu_1, \mu_2) \quad \sup_{x_1 \in C_1^n} \left[\langle a, x_1(t_0)\rangle + \int_{t_0}^{t_1} \langle \dot{x}_1(t), d\mu_1(t)\rangle \right.$$

$$\left. + \sup_{x_2 \in C^n} \left[\int_{t_0}^{t_1} \langle x_2(t), d\mu_2(t)\rangle - \int_{t_0}^{t_1} f(t, x_1(t), x_2(t))\, dt \right] \right]$$

$$\sup_{x_1 \in C_1^n} \left[\langle a, x_1(t_0)\rangle + \int_{t_0}^{t_1} \langle \dot{x}_1(t), \dot{\mu}_1(t)\rangle\, dt \right.$$

$$\left. + \sup_{x_2 \in C^n} \int_{t_0}^{t_1} [\langle x_2(t), \dot{\mu}_2(t)\rangle - f(t, x_1(t), x_2(t))]\, dt \right].$$

Здесь применима лемма 2, т. е. (при фиксированном x_1)

$$\sup_{x_2 \in C^n} \int_{t_0}^{t_1} [\langle x_2(t), \dot{\mu}_2(t)\rangle - f(t, x_1(t), x_2(t))]\, dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \sup_{x_2 \in R^n} [\langle x_2, \dot{\mu}_2(t)\rangle - f(t, x_1(t), x_2)]\, dt.$$

Обозначим $H(t, x_1, y_2) = \sup_{x_2 \in R^n} [\langle x_2, y_2\rangle - f(t, x_1, x_2)]$. Тогда

$$F^*(\mu_1, \mu_2) = \sup_{x_1 \in C_1^n} \left[\langle a, x_1(t_0)\rangle + \int_{t_0}^{t_1} [\langle \dot{x}_1(t), \dot{\mu}_1(t)\rangle + H(t, x_1(t), \dot{\mu}_2(t)]\, dt \right]$$

$$\sup_{x_1 \in C_1^n} \left[\langle a, x_1(t_0)\rangle + \langle x_1(t_1), \dot{\mu}_1(t_1)\rangle - \langle x_1(t_0), \dot{\mu}_1(t_0)\rangle \right.$$

$$\left. + \int_{t_0}^{t_1} [\langle x_1(t), -\ddot{\mu}_1(t)\rangle + H(t_1, x_1(t), \dot{\mu}_2(t))]\, dt \right].$$

Легко доказывается, что если $\dot{\mu}_1(t_0) \neq a$ или $\dot{\mu}_1(t_1) \neq 0$, то $F^*(\mu_1, \mu_2)$ Итак, $\dot{\mu}_1(t_0) = a$, $\dot{\mu}_1(t_1) = 0$ и мы получаем

$$F^*(\mu_1, \mu_2) = \sup_{x_1 \in C_n^1} \int_{t_0}^{t_1} [\langle x_1(t), -\ddot{\mu}_1(t)\rangle + H(t, x_1(t), \dot{\mu}_2(t))]\, dt;$$

отсюда по лемме 5 следует

$$F^*(\mu_1, \mu_2) = \int_{t_0}^{t_1} \sup_{x_1 \in R^n} [\langle x_1, -\ddot{\mu}_1(t)\rangle + H(t, x_1, \dot{\mu}_2(t))]\, dt$$

$$\int_{t_0}^{t_1} F^*(t, \ddot{u}_1(t), \dot{u}_2(t))\, dt.$$

4) Теорема 1 (теорема двойственности). Пусть $F(x_1, x_2)$ является N-функцией как в лемме 6. Тогда справедливы следующие соотношения (при условиях а) д) пункта 2 и при условии, что $x_2(t) = \frac{d}{dt} x_1(t)$):

а) оба конца свободны:

$$\inf_{x \in C_1^n} \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt + \min_{y:\, y(t_0)=y(t_1)=0} \int_{t_0}^{t_1} f^*(t, \dot{y}(t), y(t))\, dt = 0, \tag{14}$$

где минимум берется по всем абсолютно непрерывным на отрезке $[t_0, t_1]$ функциям $y(t)$;

б) $x(t_0) = x(t_1) = 0$:

$$\inf_{x} \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt + \min_{y} \int_{t_0}^{t_1} f^*(t, \dot{y}(t), y(t))\, dt = 0; \tag{15}$$

в) $x(t_0) = x_0$, правый конец x свободен:

$$\inf_{x} \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt \tag{16}$$

$$+ \min_{y:\, y(t_1)=0} \left[\langle x_0, y(t_0) \rangle + \int_{t_0}^{t_1} f^*(t, \dot{y}(t), y(t))\, dt \right] = 0;$$

г) $x(t_1) = x_1$, левый конец x свободен:

$$\inf_{x} \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt \tag{17}$$

$$+ \min_{y:\, y(t_0)=0} \left[\int_{t_0}^{t_1} f^*(t, \dot{y}(t), y(t))\, dt - \langle x_1, y(t) \rangle \right] = 0;$$

д) $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$:

$$\inf_{x} \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), x(t))\, dt \tag{18}$$

$$\max_{y} \left[\langle x_1, y(t_1) \rangle - \langle x_0, y(t_0) \rangle - \int_{t_0}^{t_1} f^*(t, \dot{y}(t), y(t))\, dt \right].$$

Доказательство. Рассмотрим случай а). Имеем

$$F(x_1, x_2)=\int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt.$$

В силу леммы 6, если $F^* <$ то

$$F^*((a,\mu_1),\mu_2)=\int_{t_0}^{t_1} f^*(t,-\mu_1(t), \dot{\mu}_2(t))\, dt \tag{19}$$

и при этом $\dot{\mu}_1(t_0)=a$, $\dot{\mu}_1(t_1)=0$.

В силу леммы 7 F является N-функцией, значит применима теорема двойственности (п. 4, общая схема), которая дает

$$\inf_x F(x, Ax)+\min_{\mu_2} F^*(-A^*\mu_2, \mu_2) \quad 0. \tag{20}$$

Вычислим $A^*\mu_2$ $\left(\text{иначе } \left(\frac{d}{\partial t}\right)^* \mu\right)$. Обозначим $\left(\frac{d}{dt}\right)^* \mu=(a, \mu_1)$. Для $x \in C_1^n$ по определению имеем

$$\langle a, x(t_0)\rangle+\int_{t_0}^{t_1} \langle \dot{x}(t), d\mu_1(t)\rangle=\langle x,\left(\frac{d}{dt}\right)^* \mu\rangle$$

$$=\langle \frac{d}{dt} x, \mu\rangle=\int_{t_0}^{t_1} \langle \dot{x}(t), d\mu(t)\rangle.$$

Итак,

$$\langle a, x(t_0)\rangle+\int_{t_0}^{t_1} \langle \dot{x}(t), d\mu_1(t)\rangle \equiv \int_{t_0}^{t_1} \langle \dot{x}(t), d\mu(t)\rangle$$

для всех $x \in C_1^n$. Полагая $x(t)=1$, получаем, что $a=0$, значит

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle z(t), d\mu_1(t)-d\mu(t)\rangle \equiv 0, \quad \forall z \in C^n.$$

В силу теоремы Рисса об единственности представления линейного функционала в C через меры, получаем $\mu_1=\mu+c$. Итак, $\left(\frac{d}{dt}\right)^* \mu=(0, \mu+c)$. В силу доказанного мы можем написать, что

$$F^*(-A^*\mu_2, \mu_2)=F^*((-0,\mu_2), \mu_2)-\int_{t_0}^{t_1} f^*(t, \dot{\mu}_2(t), \dot{\mu}_2(t)\, dt$$

и при этом, в силу того, что $\dot{\mu}_1(t_0)=a=0$, $\dot{\mu}_1(t_1)=0$ (см. (19)), мы можем ограничиться лишь теми $\mu_2(t)$, у которых

$$\dot{\mu}_2(t_0) = \dot{\mu}_2(t_1) = 0.$$

Полагая $\mu_2(t) = y(t)$, в итоге получаем

$$\inf_x \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt + \min_{y:\, y(t_0)=y(t_1)=0} \int_{t_0}^{t_1} f^*(t, \dot{y}(t), y(t))\, dt = 0.$$

Случаи б), в), г) и д) доказываются точно так же.

5) Теорема 2 (Уравнение Эйлера). Пусть $F(x_1, x_2)$ является N-функцией в смысле леммы 6. Тогда для того, чтобы точка $(x_1^0(t), x_2^0(t))$ являлась точкой минимума функционала F при условии $x_2(t) = \frac{d}{dt} x_1(t)$ и одном из условий а) — д) пункта 2, необходимо и достаточно, чтобы существовали меры

$$(\mu_1^0, \mu_2^0) \in \partial F(x_0, \dot{x}_0), \quad (\mu_1^0, \mu_2^0) \in \operatorname{dom} F^*$$

такие, что выполнялись следующие соотношения:

а) свободные концы:

(21) $$\mu_1^0 + \mu_2^0 = a, \quad a \in R^n, \quad \dot{\mu}_1(t_0) = \dot{\mu}(t_1) = 0;$$

б) $x(t_0) = x(t_1) = 0$:

(22) $$\mu_1^0(t) + \mu_2^0(t) = at + b, \quad a \in R^n, \; b \in R^n;$$

в) $x(t_0) = x_0$, правый конец свободен:

(23) $$\mu_1^0 + \mu_2^0 = a, \quad \dot{\mu}_1^0(t_0) = a, \quad \dot{\mu}_1^0(t_1) = 0;$$

г) $x(t_1) = x_1$, левый конец свободен:

(24) $$\mu_1^0(t) + \mu_2^0(t) = at + b, \quad a \in R^n, \; b \in R^n, \; \dot{\mu}_1^0(t_0) = 0;$$

д) $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$

(25) $$\mu_1^0(t) + \mu_2^0(t) = at + b, \quad a \in R^n, \; b \in R^n.$$

Доказательство. Так как по условию $F(x_1, x_2)$ есть N-функция, то в силу уравнения Эйлера (п. 5 Общей схемы) существует пара $(y_1^0, y_2^0) \in \partial F(x_0, Ax_0)$, для которой

$$y_1^0 + A^* y_2^0 = 0.$$

При доказательстве теоремы 1 мы нашли, что

(26) $$\left(\frac{d}{dt}\right)^* \mu = (0, \mu + c).$$

В силу равенства $y_1^0 + A^* y_2^0 = 0$, положив $y_1^0 = (a_0, \mu_1^0)$, $y_2^0 = \mu_2^0$ и используя (26), получаем

$$(a_0, \mu_1^0) + (0, \mu_2^0 + c) = 0,$$

откуда $a_0 = 0$ и $\mu_1^0 + \mu_2^0 = -c$.

Случаи б), в), г) и д) доказываются точно так же.

В следующей теореме мы выразим уравнение Эйлера через субградиенты подынтегральной функции f.

Теорема 3. Пусть $F(x_1, x_2)$ есть N-функция в смысле леммы 5. Тогда для того, чтобы кривая $(x_1^0(t), x_2^0(t)) \in C_1^n \times C^n$ являлась минимальной кривой для функционала F при условии $x_2(t) = \frac{d}{dt} x_1(t)$ и при одном из условий а) — д) пункта 2, необходимо и достаточно, чтобы существовали функции $(y_1^0(t), y_2^0(t))$, принадлежащие субдифференциалу $\partial f(t, x_0(t), \dot{x}(t))$ для почти всех $t \in [t_0, t_1]$ и такие, что выполнялось одно из следующих соотношений:

а) свободные концы:

$$y_2^0(t) = -\int_t^{t_1} y_1^0(\tau)\, d\tau, \quad y_2^0(t_0) = 0; \tag{27}$$

б) $x(t_0) = x(t_1) = 0$:

$$y_2^0(t) = -\int_t^{t_1} y_1^0(\tau) d\tau + y_2^0(t_1); \tag{28}$$

в) $x(t_0) = x_0$, правый конец свободен:

$$y_2^0(t) = -\int_t^{t_1} y_1^0(\tau) d\tau; \tag{29}$$

г) $x(t_1) = x_1$, левый конец свободен:

$$y_2^0(t) = -\int_t^{t_1} y_1^0(\tau) d\tau + y_2^0(t_1), \quad y_2^0(t_0) = 0; \tag{30}$$

д) $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$:

$$y_2^0(t) = -\int_t^{t_1} y_1^0(\tau) d\tau + y_2^0(t_1). \tag{31}$$

Доказательство. Рассмотрим только случай д). Пусть функционал F достигает минимума на кривой $x_0(t)$. Тогда по теореме 1 существует функция $y_0(t)$, для которой

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) dt + \int_{t_0}^{t_1} f^*(t, \dot{y}_0(t), y_0(t)) dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} [\langle x_0(t), \dot{y}_0(t) \rangle + \langle \dot{x}_0(t), y_0(t) \rangle] dt.$$

Но, поскольку по неравенству Юнга всегда

$$f(t, x_1, x_2)+f^*(t, y_1, y_2)\geq\langle x_1, y_1\rangle+\langle x_2, y_2\rangle$$

и функции f и f^* суммируемы, то для почти всех $t\in[t_0, t_1]$ имеет место соотношение

$$(y_0(t), y_0(t))\in\partial f(t, x_0(t), x_0(t))dt.$$

Докажем достаточность. Пусть (31) выполнено. Тогда для всех $x\in C_1^n, x(t_0)=x_0, x(t_1)=x_1$ имеем

$$f(t, x(t), \dot{x}(t))-f(t, x_0(t), x_0(t))\geq\langle x(t)-x_0(t), y_1^0(t)\rangle$$
$$+\langle\dot{x}(t)-x_0(t), y_2^0(t)\rangle$$

Проинтегрируем это неравенство на отрезке $[t_0, t_1]$:

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t))dt-\int_{t_0}^{t_1} f(t, x_0(t), x_0(t))dt$$
$$\geq\int_{t_0}^{t_1}\langle x(t)-x_0(t), y_1^0(t)\rangle dt+\int_{t_0}^{t_1}\langle\dot{x}(t)-\dot{x}_0(t), y_2^0(t)\rangle dt$$
$$=\langle x(t)-x_0(t), y_2^0(t)\rangle\Big|_{t_0}^{t_1}+\int_{t_0}^{t_1}\langle x(t)-x_0(t), y_1^0(t)-\dot{y}_2^0(t)\rangle dt.$$

Но, поскольку внеинтегральное слагаемое равняется нулю (по условию $x(t_i)=x_0(t_i)=x_i$, $i=0, 1$),

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), x(t))dt-\int_{t_0}^{t_1} f(t, x_0(t), \dot{x}_0(t))dt$$
$$\geq\int_{t_0}^{t_1}\langle x(t)-x_0(t), y_1^0(t)-\dot{y}_2^0(t)\rangle dt=0,$$

так как $y_1^0(t)=\dot{y}_2^0(t)$ для почти всех $t\in[t_0, t_1]$, что следует из (31).

Подобным образом доказываются и случаи а), б), в) и г).

Рассмотрим двойственную задачу для случая, когда в основной задаче имеются фиксированные концы:

$$\inf_{x\in C_1^n}\int_{(t_0, x_0)}^{(t_1, x_1)} f(t, x(t), \dot{x}(t))dt=\max_y[\langle x_1, y(t_1)\rangle$$
$$-\langle x_0, y(t_0)\rangle-\int_{t_0}^{t_1} f^*(t, \dot{y}(t), y(t))dt].$$

Пусть минимум в основной задаче достигается на кривой $x_0(t)$. Тогда уравнение Эйлера (для двойственной задачи) будет иметь вид

$$x_0(t)=\int_{t_0}^{t} x_0(\tau)d\tau-x_0,\ x_0(t_1)=x_1, \tag{32}$$

где $(x_0(t),\ x_0(t))\in\partial f^*(t,y_0(t),y_0(t))$ для почти всех $t\in[t_0,t_1]$.

Условия $x_0\in\partial_{y_1}f^*(t_0,y_0(t_0),y_0(t_0))$ и $x_1\in\partial_{y_1}f^*(t_1,y_0(t_1),y_0(t_1))$ и есть известные условия трансверсальности.

6) Теорема 4 (канонические уравнения). Пусть $x_0(t)$ и $y_0(t)$ экстремальные кривые для функционалов $F(x)$ и $F^*(y)$ соответственно. Тогда

$$\partial_y H(t,x_0(t),y_0(t))\ni\dot{x}_0(t),\ \partial_x H(t,x_0(t),y_0(t))\ni-\dot{y}_0(t)$$

для почти всех $t\in[t_0,t_1]$.

7) Частный случай задачи с фиксированными концами.

Пусть функционал F не зависит от x_1. Тогда для двойственного функционала получаем

$$F^*(\mu_1,\mu_2)=\sup_{x_1,x_2}\left[\langle a,x_1(t_0)\rangle+\int_{t_0}^{t_1}\langle\dot{x}_1(t),d\mu_1(t)\rangle+\int_{t_0}^{t_1}\langle x_2(t),d\mu_2(t)\rangle\right.$$

$$\left.-\int_{t_0}^{t_1}f(t,x_2(t))dt\right]=\sup_{x_1,x_2}\left[\langle a,x_1(t_0)\rangle+\langle x_1(t),\mu_1(t)\rangle\Big|_{t_0}^{t_1}\right.$$

$$\left.+\int_{t_0}^{t_1}[\langle x_1(t),-\mu_1(t)\rangle+\langle x_2(t),\mu_2(t)\rangle-f(t,x_2(t))]dt\right].$$

Отсюда следует, что если $\mu_1\not\equiv 0$, то $F^*(\mu_1,\mu_2)=\infty$. Положим $\ddot{\mu}_1\equiv 0$. Тогда

$$F^*(\mu_1,\mu_2)=\sup_{x_1,x_2}\left[\langle x_1(t),\dot{\mu}_1\rangle\Big|_{t_0}^{t_1}+\langle a,x_1(t_0)\rangle+\int_{t_0}^{t_1}[\langle x_2(t),\dot{\mu}_2(t)\rangle\right.$$

$$\left.-f(t,x_2(t))]dt\right]=\langle x_1(t),\mu_1\rangle\Big|_{t_0}^{t_1}+\langle a,x_1(t_0)\rangle+\int_{t_0}^{t_1}f^*(t,\dot{\mu}_2(t))dt$$

$$=\langle x_1,\dot{\mu}_1\rangle+\langle x_0,a-\dot{\mu}_1\rangle+\int_{t_0}^{t_1}f^*(t,\dot{\mu}_2(t))dt,$$

поскольку $\mu_1=\text{const}$.

Положим $x_2=\dot{x}_1,\ x_1(t_0)=0$. По неравенству Юнга

$$F(x)+F^*(\mu_1,\mu_2)\geq\langle x_1,\mu_1\rangle+\int_{t_0}^{t_1}\langle x(t),\mu_2(t)\rangle dt.$$

Положим $-\mu_1=\mu_2=y$. Тогда

$$\int_{t_0}^{t_1}f(t,\dot{x}(t))dt\geq\langle x_1,y\rangle-\int_{t_0}^{t_1}f^*(t,y)dt.$$

Предположим, что функция f выпукла по $\dot{x}$ для всех $t\in[t_0,t_1]$ и непрерывна по совокупности $(t,\dot{x})$ на $[t_0,t_1]\times R^n$. Тогда функционал F является N-функцией и мы будем иметь

$$\inf_x\int_{t_0}^{t_1}f(t,x(t))dt=\max_{y\in R^n}\left[\langle x_1,y\rangle-\int_{t_0}^{t_1}f^*(t,y)dt\right].$$

8) Линейный рост. Для дальнейших рассмотрений нам будут нужны некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 8. Пусть $f(x)$ выпуклая замкнутая функция, заданная в пространстве $\mathfrak{X}$, находящемся в двойственности к пространству $\mathfrak{Y}$. Тогда для того, чтобы функция $f^*(y)$ была определена на всем пространстве $\mathfrak{Y}$, необходимо, а если $\mathfrak{X}$ конечномерно, то и достаточно, чтобы для всех $x\neq 0$, $x\in\mathfrak{X}$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{f(\lambda x)}{\lambda}=\infty.$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть функция f^* определена на всем пространстве $\mathfrak{Y}$. Тогда для любого $y\in\mathfrak{Y}$ справедливо

$$f^*(y)\geq\langle x,y\rangle-f(x) \tag{33}$$

для всех $x\in\mathfrak{X}$. Допустим, что существует $x_0\neq 0$, $x_0\in\mathfrak{X}$, такое что $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\frac{f(\lambda x_0)}{\lambda}=k<\infty$. Поскольку (33) справедливо для любого $x\in\mathfrak{X}$, то для любого $\lambda>0$ имеем

$$f^*(y)\geq\langle\lambda x_0,y\rangle-f(\lambda x_0).$$

Выберем $y_0\in\mathfrak{Y}$ такое, что $\langle x_0,y_0\rangle=k+1$ (такое y_0 существует, поскольку $x_0\neq 0$ и $\operatorname{dom}f^*=\mathfrak{Y}$). Тогда $f^*(y_0)\geq\langle\lambda x_0,y_0\rangle-f(\lambda x_0)$ и отсюда

$$f^*(y_0)\geq\lim_{\lambda\to\infty}[\langle\lambda x_0,y_0\rangle-f(\lambda x_0)]=\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\left[\langle x_0,y_0\rangle-\frac{f(\lambda x_0)}{\lambda}\right]=\infty,$$

поскольку для достаточно больших λ разность в квадратных скобках положительна.

Итак, допущение, что $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\frac{f(\lambda x_0)}{\lambda}<\infty$ для некоторого $x_0\neq 0$, $x_0\in\mathfrak{X}$ привело нас к противоречию.

Докажем достаточность. Пусть $\mathfrak{X}$ конечномерно и $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\frac{f(\lambda x)}{\lambda}=\infty$ для всех $x\in\mathfrak{X}$, $x\neq 0$. Тогда функция $\langle x,y\rangle-f(x)$ вогнута и убывает на бесконечности быстрее линейной по x для любого $y\in\mathfrak{Y}$.

Рассмотрим множества уровня

$$X_k(y)=\{x:\langle x,y\rangle-f(x)\geqq k,\ k\in R^1\}. \tag{34}$$

Множества $X_k(y)$ выпуклы и замкнуты (из определения вогнутой замкнутой функции). Докажем, что они ограничены. Не уменьшая общности, допустим, что $0\in X_k(y)$ (иначе будем рассматривать множество $X_k(y)-x_0$, где $x_0\in X_k(y)$. Пусть $x\neq 0$. Тогда существует m_0 такое, что вектор mx при $m>m_0$ не принадлежит множеству $X_k(y)$. Действительно, при $m\to\infty$

$$\langle mx,y\rangle-f(mx)\to-\infty \tag{35}$$

и, следовательно, существует такое m_0, что при $m>m_0$ $\langle mx,y\rangle-f(mx)<k$, т. е. $mx\bar{\in}X_k(y)$. Так мы доказали, что множество $X_k(y)$ ограничено на каждом луче. Доказательство того, что оно ограничено вообще, использует конечную размерность пространства $\mathfrak{X}$.

Итак, множество $X_k(y)$ выпукло, ограничено и замкнуто. Следовательно, (вогнутая замкнутая) функция $\langle x,y\rangle-f(x)$ достигает (по теореме Вейерштрасса) своей верхней грани на $X_k(y)$, т. е. существует $x_0=x_0(y)$ такое, что

$$\langle x_0,y\rangle-f(x_0)\geqq\langle x,y\rangle-f(x) \tag{36}$$

для каждого $x\in X_k(y)$. Но, поскольку $\langle x,y\rangle-f(x)<k$ для каждого $x\bar{\in}X_k(y)$, то (36) справедливо и для всех $x\in\mathfrak{X}$.

Так мы получаем, что функция $f^*(y)$ определена на всем пространстве $\mathfrak{Y}$. Лемма доказана.

Следствие. Пусть $f(x)$ выпуклая замкнутая функция, заданная в конечномерном пространстве $\mathfrak{X}$. Пусть $\operatorname{dom} f=\mathfrak{X}$ и $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\frac{f(\lambda x)}{\lambda}=\infty$ для каждого $x\neq 0$. Тогда $\operatorname{dom} f^*=\mathfrak{Y}$ и $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\frac{f^*(\lambda y)}{\lambda}=\infty$ для каждого $y\neq 0$.

Доказательство. В доказательстве нуждается только рост функции $f^*(y)$. Допустим, что существует $y_0\in\mathfrak{Y}$ такое, что $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\frac{f^*(\lambda y_0)}{\lambda}=k<\infty$, $y_0\neq 0$. Из определения двойственной функции следует, что для всех $x\in\mathfrak{X}$

$$\frac{f^*(\lambda y_0)}{\lambda}\geqq\langle x,y_0\rangle-\frac{f(x)}{\lambda}.$$

Поскольку $\operatorname{dom} f=\mathfrak{X}$, мы можем выбрать такое $x_0\in\mathfrak{X}$, что $\langle x_0,y_0\rangle=k+1$ и при этом $f(x_0)<\infty$. Тогда

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{f^*(\lambda y_0)}{\lambda}\geqq\lim_{\lambda\to\infty}\left[\langle x^0,y_0\rangle-\frac{f(x_0)}{\lambda}\right]=\langle x_0,y_0\rangle-\lim_{\lambda\to\infty}\frac{f(x_0)}{\lambda}=k+1.$$

Так допущение, что $f^*(y)$ не растет на бесконечности быстрее линейной для некоторого y_0, привело нас к противоречию.

Лемма 9. Пусть функция $f(x)$ задана на ограниченном множестве $X\subset\mathfrak{X}$ и $f(x)=\infty$ вне X. Пусть $\inf\limits_{x\in X}f(x)=-k>-\infty$. Тогда функция $f^*(y)$

определена на всем пространстве $\mathfrak{Y}$, находящемся в двойственности к пространству $\mathfrak{X}$ и имеет линейный рост по любому направлению, т. е. для любого $y(\mathfrak{Y})$, $y \quad 0$

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{f^*(\lambda y)}{\lambda} <$$

Доказательство. Из определения двойственной функции получаем

$$f^*(y) = \sup_{x \in X} |\langle x, y\rangle \quad f(x)| \quad \sup_{x \in X} \langle x, y\rangle$$

$$\inf_{x \in X} f(x) = \sup_{x \in X} \langle x, y\rangle + k$$

и, следовательно, $f^*(y) <$ для любого $y(\mathfrak{Y})$. Далее для любого $y(\mathfrak{Y})$ справедливо

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{f^*(\lambda y)}{\lambda} \quad \lim_{\lambda \to \infty} \left| \sup_{x \in X} \frac{\langle x, \lambda y\rangle}{\lambda} + \frac{k}{\lambda} \right| = \sup_{x \in X} \langle x, y\rangle + \lim_{\lambda \to \infty} \frac{k}{\lambda} \quad \mu_{X^\circ}(y).$$

Так мы получили, что функция $f^*(y)$ мажорируется функцией $\mu_{X^\circ}(y)+k$, у которой рост на бесконечности линеен.

Меняя местами функций f и f^*, получаем, что если функций f имеет ограниченный рост, то функция f^* определена на выпуклом ограниченном множестве.

Вернемся к задачам вариационного исчисления. Используя только что доказанные результаты, получаем:

а) Если $\operatorname{dom} f_t \quad R^n \times R^n$ и функция $f(t, x, \dot{x})$ растет на бесконечности быстрее линейной по $(x, \dot{x})$ для каждого $t \in [t_0, t_1]$, то f^* растет на бесконечности по $(y, \dot{y})$ быстрее линейной и $\operatorname{dom} f^*_t = R^n \times R^n$ для каждого $t \in [t_0, t_1]$.

В дальнейшем мы будем рассматривать случай, когда $f(t, x, \dot{x}) = t_1(t, x) + f_2(t, \dot{x})$, где f_1 и f_2 выпуклы по x и $\dot{x}$ и непрерывные по (t, x) и $(t, \dot{x})$ соответственно.

Мы будем предполагать, что $\operatorname{dom} f_{1t} \quad R^1$ и $\operatorname{dom} f_{2t} = R^1$ для всех $f \in [t_0, t_1]$. Функции $a(t) > 0$ и $b(t) > 0$, входящие в следующие определения, будем считать непрерывными.

Рассмотрим следующие случаи:

1. $f_1(t, x) \geqq a(t) |x|^{1+\delta}$, где $\delta > 0$ и $f_2(t, \dot{x}) \geqq b(t) |\dot{x}|$. Тогда $f_1^*(t, \dot{y})$ будет иметь рост на бесконечности выше линейного и $\operatorname{dom} f^*_{1t} = R^1$, а $f_2^*(t, y)$ определена по y на выпуклом ограниченном множестве $Y_t = \operatorname{dom} f^*_{2t}$ и $f_2^*(t, y) \quad$ для всех $y \bar{\in} Y_t$ и всех $t \in [t_0, t_1]$.

2. $f_1(t, x) \leqq a(t) |x|$, $f_2(t, \dot{x}) \geqq b(t) |\dot{x}|^{1+\delta}$, где $\delta > 0$. Тогда $f_1^*(t, \dot{y})$ будет определена по y на выпуклом ограниченном множестве $V_t = \operatorname{dom} f^*_{1t}$ и $f_1^*(t, y) = \infty$ для всех $\dot{y} \bar{\in} V_t$ и всех $t \in [t_0, t_1]$, а $f_2^*(t, y)$ будет иметь рост на бесконечности выше линейного и $\operatorname{dom} f^*_{2t} = R^1$ для всех $t \in [t_0, t_1]$.

3. $f_1(t, x) \quad a(t) |x|$ и $f_2(t, \dot{x}) \quad b(t) |\dot{x}|$. Тогда $\operatorname{dom} f^*_{1t} = V_t$, $\operatorname{dom} f^*_{2t} = Y_t$, где V_t и Y_t являются выпуклыми ограниченными множествами.

4. Пусть для некоторого $\bar{t}\in[t_0, t_1]$ функция $f_1(t, x)$ (функция $f_2(t, \dot{x})$) имеет ограниченный рост по x (по $\dot{x}$) и растет на бесконечности быстрее линейной для всех $t\in[t_0, t_1]$, $t \neq \bar{t}$. Тогда $V_t = \operatorname{dom} f_{1t}^*$ ($Y_t = \operatorname{dom} f_{2t}^*$) выпукло и ограничено для $t \neq \bar{t}$ и совпадает с R^1 для остальных $t\in[t_0, t_1]$.

Теорема 5. Если $f(t, x, \dot{x}) \geq \varphi(\dot{x})$, где $\varphi(\dot{x}) \geq 0$ растет на бесконечности быстрее линейной, то решение задачи об $\inf F(x)$ существует и абсолютно непрерывно.

Доказательство. Докажем, что множество

$$X = \left\{ x : \int_{(t_0, x_0)}^{(t_1, x_1)} f(t, x(t), \dot{x}(t))dt = c \right\}$$

равностепенно непрерывно и равномерно ограничено. Имеем

$$|x(t+h) - x(t)| = \left| \int_t^{t+h} \dot{x}(t)dt \right| = \left| \frac{1}{A} \int_t^{t+h} \dot{x}(t)A dt \right|$$

$$\left| \frac{1}{A} \int_t^{t+h} [\varphi(\dot{x}) + \varphi^*(A)]dt \right| \leq \frac{c}{A} + \frac{h}{A} \varphi^*(A).$$

Взяв $\varepsilon > 0$, найдем h и A такие, что

$$\frac{c}{A} \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \frac{h}{A}\varphi^*(A) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда $|x(t+h) - x(t)| < \varepsilon$ для всех $x\in X$. Отсюда следует, что X равностепенно непрерывно. Но, поскольку $x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1$, то X и равномерно ограничено. Это дает, по теореме Арцела, что X относительно компактно в C.

Можно доказать, что если $\{x_n(t)\} \subset X$ — последовательность абсолютно непрерывных функций, сходящаяся сильно в C к функции $x_0(t)$, т. е. $\max\limits_{t_0 \leq t \leq t_1} |x_n(t) - x_0(t)| \to 0$, то $x_0(t)$ тоже абсолютно непрерывная функция. Теорема доказана.

Пусть $x_0(t)$ любая кривая с конечным числом точек разрыва. Тогда по неравенству Юнга

$$\int_{t_0}^{t_1} [f(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) + f^*(t, \dot{y}(t), y(t))]dt \geq \int_{t_0}^{t_1} [x_0(t)\dot{y}(t) + \dot{x}_0(t)y(t)]dt,$$

$$\int_{t_0}^{t_1} [x_0(t)\dot{y}(t) + x_0(t)y(t)]dt = \sum_{i=0}^{k} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} [x_0(t)\dot{y}(t) + \dot{x}_0(t)y(t)]dt$$

$$= x_0(t_1)y(t_1) - x_0(t_0)y(t_0) + \sum_{i=1}^{k} y(\tau_i)[x_0(\tau_i + 0) - x_0(\tau_i - 0)];$$

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t, x_0(t), x_0(t))dt + \sum_{i=1}^{k} y(\tau_i)[x_0(\tau_i - 0) - x_0(\tau_i + 0)]$$

$$\geq x_1 y(t_1) - x_0 y(t_0) - \int_{t_0}^{t_1} f^*(t, y(t), y(t))dt;$$

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t, x_0(t), x_0(t)dt + \sum_{1}^{k} y_0(t)[x_0(\tau_i - 0) - x_0(\tau_i + 0)]$$

$$\geq x_1 y_0(t_1) - x_0 y_0(t_0) \quad \int_{t_0}^{t_1} f^*(t, y_0(t), y_0(t))dt$$

$$\max_y \left[x_1 y(t_1) - x_0 y(t_0) - \int_{t_0}^{t_1} f^*(t, y(t), y(t))dt \right]$$

$$= \inf_{x \in C_1} \int_{(t_0, x_0)}^{(t_1, x_1)} f(t, x(t), \dot{x}(t))dt,$$

т. е. мы можем задачу об $\inf\limits_{x \in C_1} F(x)$ расширить до задачи об $\inf F(x)$ на множестве функций $x(t)$ с конечным числом точек разрыва, не уменьшая при этом значения функционала $F(x)$, т. е. для любой такой функции $\bar{x}(t)$ справедливо

$$F(\bar{x}) \geq \inf_{x \in C_1} F(x).$$

В случае, когда функция $f(t, x, \dot{x})$ растет на бесконечности по $\dot{x}$ не быстрее линейной функции, в принципе возникают разрывные решения задачи об $\inf F(x)$. Тогда мы будем расширять эту задачу до задачи об $\inf F(x)$ на множестве функций $x(t)$ с конечным числом точек разрыва, возможность которого мы только что показали.

Теорема 6. Пусть функционал

$$F^*(y) = x_1 y(t_1) \quad x_0 y(t_0) \quad \int_{t_0}^{t_1} f^*(t, y(t), y(t))dt$$

достигает максимума на кривой $y_0(t)$. Тогда, если $y_0(t) \in Y_t \setminus \operatorname{int} Y_t$ на множестве T и существует кривая $x_0(t)$, удовлетворяющая условиям

1) $$x_0(t_0) \quad x_0, \quad x_0(t_1) = x_1;$$

2) $x_0(t)$ дифференцируема всюду на отрезке $[t_0, t_1]$ кроме точек $(\tau_1, \tau_2, \quad \tau_k) \subset T$, где она терпит разрывы и

$$\operatorname{sign}[x_0(\tau_i+0)-x_0(\tau_i-0)]=\begin{cases}1 & \text{если } y_0(\tau_i)=\sup\{y\in Y_{\tau_i}\},\\ -1 & \text{если } y_0(\tau_i)=\inf\{y\in Y_{\tau_i}\}F;\end{cases}$$

3) $x_0(t)\in\partial f_1^*(t, y_0(t))$, $\dot{x}_0(t)\in\partial f_2^*(t, y_0(t))$, то $x_0(t)$ является решением задачи об $\inf F(x)$.

Доказательство. Пусть кривая $x_0(t)$, удовлетворяющая условиям теоремы, существует. Тогда

$$f_1^*(t, \dot{y}_0(t))=x_0(t)\dot{y}_0(t)-f_1(t, x_0(t)),$$

$$f_2^*(t, y_0(t))=\dot{x}_0(t)y_0(t)-f_2(t, \dot{x}_0(t))$$

и эти равенства справедливы почти всюду на отрезке $[t_0t_1]$. Отсюда

$$\int_{t_0}^{t_1}[f_1(t, x_0(t)+f_2(t, \dot{x}_0(t))+f_1^*(t, \dot{y}_0(t))+f_2^*(t, y_0(t))]dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}[x_0(t)\dot{y}_0(t)+\dot{x}_0(t)y_0(t)]dt.$$

Рассмотрим последнее слагаемое

$$\int_{t_0}^{t_1}[x_0(t)\dot{y}_0(t)+\dot{x}_0(t)y_0(t)]dt. \tag{37}$$

Предполагая $x_0(t)$ непрерывной справа в точках τ_i, $i=1, 2, \ldots, k$ разрыва, мы можем записать (37) следующим образом:

$$\int_{t_0}^{t_1}[x_0(t)\dot{y}_0(t)+\dot{x}_0(t)y_0(t)]dt$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}[x_0(t)\dot{y}_0(t)+\dot{x}_0(t)y_0(t)]dt$$

$$=x_1y_0(t_1)-x_0y_0(t_0)-\sum_{i=1}^{k}y_0(\tau_i)[x_0(\tau_i-0)-x_0(\tau_i+0)].$$

Отсюда

$$\int_{t_0}^{t_1}[f_1(t, x_0(t))+f_2(t, \dot{x}_0(t))]dt+\sum_{i=1}^{k}y_0(\tau_i)[x_0(\tau_i-0)-x_0(\tau_i+0)]$$

$$x_1y_0(t_1)-x_0y_0(t_0)-\int_{t_0}^{t_1}f_1^*(t, \dot{y}_0(t))+f_2^*(t, y_0(t))]dt.$$

Теорема доказана.

Подобные теоремы можно доказать и для случаев, когда функция $f_1(t,x)=a(t)\,x$ и когда

$$f_1(t,x)=a(t)\,x,\ f_2(t,x)=b(t)\,|x|$$

В некоторых задачах функция $\varphi(\dot{x})$ растет на бесконечности быстрее линейной для всех $t\in[t_0,t_1]$ кроме конечного числа точек $(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_k)\subset[t_0,t_1]$. В этих случаях мы будем искать решение основной задачи на множестве функций $x(t)$, непрерывных на $[t_0,t_1]$ и имеющих разрывы в точках

$$(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_{k_1})\subset[t_0,t_1],\ k_1\leq k,$$

а если $f_2^*(t,y)=\delta_{Y_t}(y)$, то нам надо исследовать на разрывы и концы отрезка $[t_0,t_1]$.

Пример. Найти нижнюю грань функционала

$$I(x)=\int\limits_{(0,0)}^{(t_1,1)} t^2\left(|x|+\frac{x^2}{2}\right)dt.$$

Задачи подобного рода обычно не рассматриваются в рамках классического вариационного исчисления в силу того обстоятельства, что функция $f(t,x,\dot{x})=t^2\left(|x|+\frac{x^2}{2}\right)$ очень нерегулярно ведет себя по x. Формально написанное уравнение Эйлера

$$\frac{d}{dt}f_{\dot{x}}-f_x=\frac{d}{dt}\left[t^2\operatorname{sign}x\right]-t^2x$$

в его прямом выражении лишено смысла и требует специального обоснования.

Тем не менее, двойственные методы весьма просто приводят к ответу.

Решение. Найдем функции H и f^*.

$$H(t,x,y)=\sup_{\dot{x}}\left[xy-t^2|x|\right]-t^2\frac{x^2}{2}=\begin{cases}-t^2\frac{x^2}{2}, & |y|\leq t^2,\\ & |y|>t^2,\end{cases} \tag{38}$$

или иначе $H(t,x,y)=-t^2\frac{x^2}{2}+\delta_{Y_t}(y)$, где $Y_t\{y\,.\,|y|\leq t^2\}$.

$$f^*(t,y,y)=\sup_{x}\left[x\dot{y}-\frac{t^2x^2}{2}\right]+\delta_{Y_t}(y);\quad \dot{y}=t^2x; \tag{39}$$

$$f^*(t,\dot{y},y)=\frac{\dot{y}^2}{2t^2}+\delta_{Y_t}(y).$$

Из (39) следует, что двойственная задача принимает вид

$$(40)\qquad \sup_{|y|\leq t^2} J(y) = \sup_{|y|\leq t^2}\left[y(t_1) - \int_{t_0}^{t_1}\frac{\dot{y}^2}{2t^2}\,dt\right].$$

Решим сначала эту задачу, не обращая внимание на ограничение $|y|\leq t^2$ Уравнение Эйлера в этом случае имеет вид $\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{t^2}\right)=0$, интеграл которого есть $\dot{y}=ct^2$. Отсюда следует, что $\dot{y}$ не меняет знака там, где уравнение Эйлера имеет место, и знак c совпадает со знаком $\dot{y}$.

Из условия трансверсальности в правом конце мы получаем, что $c=1$, т. е. $y=t^3/3$. Кривая $y_0(t)=t^3/3$ удовлетворяет ограничению $|y|\leq t^2$ на отрезке $[0, 3]$.

Задача (40) вогнута по $\dot{y}$, значит решение уравнения Эйлера дает абсолютный экстремум. В силу (39) $\dot{y}=t^2x$, откуда следует, что $x=1$ на $(0, t_1]$, $t_1\geq 3$.

Значение двойственной задачи на экстремали равно $t_1^3/6$. Взяв минимизирующую последовательность (в основной задаче)

$$x_n(t)=\begin{cases}0, & t=0,\\ nt, & 0\leq t\leq \frac{1}{n},\\ 1, & \frac{1}{n}\leq t\leq t_1.\end{cases}$$

после простых вычислений получаем также $t_1^3/6$, что впрочем следует и из общей теории.

Пусть теперь $t_1>3$.

Рассмотрим кривую $y_0(t)=\frac{3}{t_1}\cdot\frac{t^3}{3}$ Эта кривая удовлетворяет уравнению Эйлера и ограничению, причем в $(0, t)$ она строго удовлетворяет ограничению и „выходит на него“ в точках 0 и t_1.
Положим

$$x_0(t)=\begin{cases}0, & t=0.\\ \frac{3}{t_1}, & 0<t<t_1,\\ 1, & t=t_1.\end{cases}$$

Из (39) видно, что x_0 и y_0 двойственны друг другу. При этом и x_0 и y_0 удовлетворяют требуемым ограничениям.

Вычислим функционалы $I(x_0)$ и $J(y_0)$:

$$I(x_0)=\frac{t_1^3}{6}\left(\frac{3}{t_1}\right)^2+t_1\left(1-\frac{3}{t_1}\right)=t_1^2-\frac{3}{2}t_1,$$

$$J(y_0)=t_1^2-\int_0^{t_1}\frac{9}{t_1^2}\frac{t^4}{2t^2}\,dt=t_1^2-\frac{3}{2}t_1.$$

В силу совпадения значений двойственной и основной задач выводим, что x_0 и y_0 суть экстремали в соответствующих задачах.

Мы полностью решили поставленную задачу, „догадавшись" об ответе. Покажем теперь, что к решению $y_0(t)$ t^3/t_1 мы обязаны были прийти регулярным путем.

Действительно, кривая y t^2, как легко видно, не является решением. Значит, решение должно иметь участки, где оно идет внутри ограничений. Там оно должно удовлетворять уравнению Эйлера, т. е. быть функцией

$$y_0(t)=c\frac{t^3}{3}+c_1.$$

В частности, так будет при малых t, где решение имеет вид $c\,.\,t^3/3$. При выходе на ограничение экстремаль $c\,.\,t^3/3$ будем иметь очевидно излом, так как не может случиться, что на всем отрезке $[0,t_1]$ экстремаль не выходила на ограничение (тогда не выполнится условие трансверсальности). Итак, пусть $c>3/t_1$. Проверим условие Вейерштрасса — Эрдмана в точке выхода экстремали на ограничение. Имеем

$$f_1^*+(\varphi-\dot{y})f_{1\dot{y}}^*\Big|_{t=\frac{3}{c}-0}\quad f_2^*+(\varphi-\dot{y})f_{2\dot{y}}^*\Big|_{t=\frac{3}{c}+0},$$

где $f_1^*=f^*$ левее точки $t=3/c$, а $f_2^*=f^*$ правее точки $t=3/c$, и $\varphi=t^2$. Отсюда

$$\dot{y}^2-12\dot{y}c+27=0.$$

Из этого равенства для $\dot{y}$ получаем два значения: $\dot{y}=3/c$, $\dot{y}=9/c$. В первом случае излома нет, что возможно только при $3/c=t_1$, т. е. $c=3/t_1$. Видно, что при $c=3/t_1$ равенство I J достигается.

Рассмотрим случай $\dot{y}=9/c$.

$$J(y)=y(t_1)-\int_0^{\frac{3}{c}}\frac{c^2t^2}{2}dt-\int_{\frac{3}{c}}^{t_1}\frac{\dot{y}^2}{2t^2}dt$$

$$<y(t_1)-\frac{3t_1}{2}-\int_3^{t_1}\frac{\dot{y}^2}{2t^2}dt<t_1^2-\frac{3}{2}t_1,$$

что получается при $3/c$ t_1. Итак, $3/c\neq t_1$ быть не может.

Подобным образом для функционала

$$I(x)=\int_{(0,0)}^{(t_1,\xi)}t^\alpha\left(|x|+\frac{|x|^\beta}{\beta}\right)dt,$$

где $\alpha\geq 1$, $\beta>1$, ξ 0, получаем

$$\sup_{|y|\ t^\alpha}J(y)=\sup_{|y|\ t^\alpha}\left|\xi y(t_1)-\int_0^{t_1}\frac{|\dot{y}|^{\beta_1}}{\beta_1 t^{\alpha(\beta_1-1)}}dt\right|,\ \frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta_1}=1.$$

Решениями основной и двойственной задачи являются кривые $y_0(t) = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}$,

$$x_0(t)=\begin{cases} 0, & t=0, \\ t\left(\frac{\alpha+1}{t_1}\right)^{\beta_1-1} & 0<t<t_1, \\ & t=t_1. \end{cases}$$

На этих кривых функционалы I и J принимают общее значение

$$J(y_0)=I(x_0)=|\xi|\, t_1^{\alpha}-\frac{(\alpha+1)^{\beta_1-1}t_1^{\alpha+1-\beta_1}}{\beta_1}.$$

Пусть теперь функция f имеет вид $f(t,\dot{x})$. Пусть f и $H(=f^*)$ дифференцируемы по x и y соответственно. Тогда на экстремальных кривых имеют место соотношения $f_{\dot{x}}=y_0$, $H_y=\dot{x}_0(t)$. Отсюда видно, что если $H_y=$ в некоторой точке t, то функция $x_0(t)$ терпит разрыв в этой точке.

Рассмотрим один пример такого типа:

$$I(x)=\int_{(0,0)}^{(1,x_1)}(t+h)\sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt, \quad h\geqq 0.$$

Решение. Найдем функцию H:

$$H(t,y)=\sup_{\dot{x}}[\dot{x}y-(t+h)\sqrt{1+\dot{x}^2}]$$

$$y=\frac{(t+h)\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}, \qquad H=-\sqrt{(t+h)^2-y^2}.$$

Отсюда следует, что $y^2\leqq h^2$, поскольку $y=\text{const}$ и $0\leqq t\leqq 1$. Если $h=0$, то y 0 и $H=-t$. Пусть $h>0$. Найдем производную

$$\frac{\partial H}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{(t+h)^2-y^2}}.$$

Отсюда видно, что $\partial H/\partial y=$ только в точке t 0, если $y^2=h^2$. Тогда знаменатель обращается в нуль в точке $t=0$. Значение y находится из выражения $h\,\mathrm{ch}\,\frac{x_1}{y}+\sqrt{h^2-y^2}$ $1+h$. (Для $y^2>h^2$ имеем $H=$ [illegible].)

§ 3. О ДВОЙСТВЕННОСТИ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу, состоящую в отыскании нижней грани функционала

$$I(x,u)=\int_{t_0}^{t_1}\varphi(t,x(t),u(t))\,dt \tag{41}$$

на совокупности пар $(x(t), u(t)): x(t)=(x_1(t), \ldots, x_n(t)),\ x_i(t)\in C,\ u(t)=(u_1(t), \quad u_r(t), u_i(t)$ измеримы, удовлетворяющие следующим условиям:

$$x(t)=\Phi(t, x(t), u(t)).$$

(42) $$u(t)\in U_t,$$

$$x(t_0) \quad x_0, x(t_1)=x_1.$$

При этом $\Phi(t, x, u)$ — непрерывная по совокупности переменных функция заданная на $[t_0, t_1]\times R^n\times R^r$, удовлетворяющая условиям Липшица по x равномерно по t на каждом ограниченном подмножестве в R^r; $\varphi(t, x, u)$ — функция, непрерывная по совокупности переменных; U_t — борелевское равномерно ограниченное семейство множеств.

Задачу (41)—(42) и называют задачей оптимального управления.

В несколько более слабых допущениях на Φ и φ такая задача рассмотрена в статье Иоффе и Тихомирова [7].

В этой статье доказана следующая теорема.

Рассмотрим функцию

$$f(t, x, z)=\inf_{\substack{u\in U_t\\ \Phi(t,x,u)=z}} \varphi(t, x, u),$$

$f=\varphi^{**}$ (по последнему аргументу), $Q=\operatorname{dom} f$ при каждом (t, x), и функционал

(43) $$J(x) \quad \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t)\dot{x}(t))dt$$

на совокупности функции $x(t)\in C^1_{[t_0,t_1]}$, удовлетворяющих условиям

(44) $$x\in Q(t, x).$$

Теорема. Задача (43)—(44) есть квазирасширение задачи (41) (42).

Последнее означает, что с точки зрения отыскания минимума рассмотренные задачи являются эквивалентными.

Задача (43)—(44) есть обобщенная задача Лангранжа. Она исследовалась в множестве работ.

Мы можем исследовать задачу (43)—(44) также и нашими методами, развитыми в [32], так как задача (43) (44) укладывается в схему

(45) $$F(x_1, x_2) \quad \to \inf,$$

(46) $$x_2 \quad Ax_1, \quad (x_1, x_2)\in\theta,$$

где

$$F(x_1, x_2)=\int_{t_0}^{t_1} f(t, x_1(t), x_2(t)\,dt$$

$$x_2(t) \quad \dot{x}_1(t), \qquad A \quad \frac{d}{dt},$$

$$(47)\qquad \theta \quad \{(x_1, x_2) : x_2(t) = \dot{x}_1(t) \in Q(t, x_1(t))\}.$$

Обозначим через $H(t, x, y)$ преобразование Юнга функции $f(t, x, z)$ по последнему аргументу. Имеем

$$(48)\quad H(t, x, y) = \sup_z [\langle y, z\rangle \inf_{\substack{u \in U_t \\ Ax + Bu}} \varphi(t, x, u)] = \sup_{u \in U_t} [\langle Ax + Bu, y\rangle - \varphi(t, x, u)].$$

Тогда преобразование Юнга $-H$ по x или, что то же, преобразование Юнга f по переменным (x, z), будет иметь вид

$$(49)\quad \tilde{f}^*(t, \dot{y}, y) = \sup_x [\langle x, \dot{y}\rangle + H(t, x, y)] = \sup_x \sup_{u \in U_t} [\langle x, \dot{y} + A^* y\rangle + \langle Bu, y\rangle$$

$$-\varphi(t, x, u)] = \sup_{x,u} [\langle x, \dot{y} + A^* y\rangle + \langle u, B^* y\rangle - \varphi(t, x, u) - \delta_{R^n \times U_t}(x, u)].$$

Применяя технику, подробно развитую в § 2, мы приходим к следующим утверждениям:

Теорема 7 (теорема двойственности).

$$(50)\quad \inf_{\substack{x, u \in U_t \\ \dot{x} = Ax + Bu}} \int_{(t_0, x_0)}^{(t_1, x_1)} \varphi(t, x(t), u(t))\, dt = \sup_y \left[\langle x(t), y(t)\rangle \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \tilde{f}^*(t, \dot{y}(t), y(t))\, dt \right].$$

Теорема 8 (принцип оптимальности).

$$(51)\quad \inf_{\substack{x, u \in U_t \\ \dot{x} = Ax + Bu}} \int_{(t_0, x_0)}^{(t_1, x_1)} \varphi(t, x(t), u(t))\, dt$$

$$= \inf_{x, u \in U_t} \int_{(t_0, x_0)}^{(t_1, x_1)} [\varphi(t, x(t), u(t)) + \langle y_0(t), \dot{x}(t) - A(t)x(t) - B(t)u(t)\rangle]\, dt.$$

Доказательство. Отметим сначала, что под $y_0(t)$ мы понимаем кривую, на которой в двойственной задаче достигается максимум.

$$\inf_{x, u \in U_t} \int_{(t_0, x_0)}^{(t_1, x_1)} [\varphi(t, x(t), u(t)) + \langle y_0(t), \dot{x}(t) - Ax(t) - Bu(t)\rangle]\, dt$$

$$\inf_{x,u} \int_{(t_0, x_0)}^{(t_1, x_1)} [\varphi(t, x(t), u(t)) + \langle \dot{x}(t), y_0(t)\rangle - \langle x(t), A^* y_0(t)\rangle - \langle u(t), B^* y_0(t)\rangle$$

$$+ \delta_{R^n \times U}(x(t), u(t))]\, dt = -\sup_{x,u} \int_{(t_0, x_0)}^{(t_1, x_1)} \langle x(t), \dot{y}_0(t) + A^* y_0(t)\rangle + \langle u(t), B^* y_0(t)\rangle$$

$$-\varphi(t, x(t), u(t)) - \delta_{R^n \times U_t}(x(t), u(t))]\, dt + \langle x(t), y_0(t)\rangle \Big|_{t_0}^{t_1}$$

$$\langle x(t), y_0(t)\rangle\Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} [f^*(t, \dot{y}_0(t), y_0(t)) \oplus \mu_{Y_t}(y_0(t))]\, dt.$$

Это согласно предыдущей теореме и дает, что в (51) имеет место равенство. Теорема доказана.

Если функция φ дифференцируема по x и удовлетворяет условиям роста, то

$$\dot{y} = -A^* y + \varphi'_x. \tag{52}$$

В случае оптимальности по быстродействию, т. е. когда $\varphi = 1$, имеем

$$f^*(t, \dot{y}, y) = \sup_{x,\, u \in U_t} \langle x, \dot{y} + A^* y\rangle + \langle u, B^* y\rangle - 1]. \tag{53}$$

Отсюда $\dot{y} = -A^* y$, $f^*(t, y) = \mu_{Y_t}(y) - 1$, где $Y_t = (BU)^0$, и

$$\inf_{\substack{x,\, u \in U_t \\ = Ax + Bu}} \int_{(t_0, x_0)}^{(t_1, x_1)} 1.\, dt = \inf_{\substack{x,\, u \in U_t \\ \dot{x} = Ax + Bu \\ x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1}} (t_1 - t_0) = \sup_y [\langle x(t), y(t)\rangle\Big|_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} [\mu_{Y_t}(y(t)) - 1]\, dt. \tag{54}$$

В принципе максимума Понтрягина кроме основной системы уравнений $\dot{x} = \tilde{f}(t, x, u)$ рассматривается еще дополнительная, так называемая сопряженная система уравнений

$$\dot{\psi}_i = -\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial x_i} \psi_j. \tag{55}$$

Потом выписывается функция

$$H(t, x, \psi, u) = \langle \tilde{f}, \psi\rangle + \psi_0 f \tag{56}$$

и ищется ее супремум по $u \in U_t$.

Сравнивая (52) и (55), мы получаем, что $\psi(t)$ совпадает с $y(t)$ с точностью до постоянной ($\psi_0 \leq 0$, а $y_0 = -1$).

Пример 3.

$$I(x, u) = \int_{(0,0)}^{(t_1, x_1)} (x^2 + u^2 + xu)\, dt.$$

$\dot{x} = x + u$, $|u| \leq 1$

Решение.

$$f^*(\dot{y}, y) = \sup_{|u| \leq 1} [x\dot{y} + xy + uy - x^2 - u^2 - xu]$$

$$= \sup_x [x(\dot{y} + y) - x^2 + \sup_u [uy - u^2 - xu - \delta_{[-1,1]}(u)]].$$

Рассмотрим второе слагаемое

$$\sup_u [uy-u^2-xu-\delta_{[-1,1]}(u)].$$

Продифференцируем по u:

$$y-2u-x=0, \quad u=\frac{y-x}{2},$$

$$\sup_u [uy-u^2-xu-\delta_{[-1,1]}(u)] = \frac{x^2}{4}+\left(\frac{y^2}{4}-\frac{xy}{2}\right)\oplus|y|,$$

$$f^*(\dot{x},y)=\sup_x\left[x(\dot{y}+y)-\frac{3}{4}x^2+\left(\frac{y^2}{4}-\frac{xy}{2}\right)\oplus|y|\right].$$

Используя определение конволюции, получаем

$$\left(\frac{y^2}{4}-\frac{xy}{2}\right)\oplus|y| = \inf_{y_1+y_2=y}\left[\frac{y_1^2}{4}-\frac{xy_1}{2}+|y_2|\right] =$$

$$\inf_{y_2}\left[\frac{(y-y_2)^2}{4}-\frac{x(y-y_2)}{2}+|y_2|\right] = q(x,y),$$

$$q(x,y)=\begin{cases}\frac{(x+2)^2}{4}-\frac{x(x+2)}{2}+y-x+2, & y-x>2;\\ \frac{y^2}{4}-\frac{xy}{2}, & |y-x|\leq 2;\\ \frac{(x-2)^2}{4}-\frac{x(x-2)}{2}+y-x+2, & y-x<-2.\end{cases}$$

Для этих трех случаев имеем соответственно $y_2>0$, $y_2=0$, $y_2<0$.

Решим сначала задачу, предполагая, что $|y-x|<2$ в точке $t=0$, т. е. $y_2(0)=0$. Тогда

$$f^*(\dot{y},y)=\sup_x\left[x(\dot{y}+y)-\frac{3}{4}x^2+\frac{y^2}{4}-\frac{xy}{2}\right]=\sup_x\left[x\dot{y}-\frac{xy}{2}-\frac{3}{4}x^2+\frac{y^2}{4}\right].$$

Дифференцируя по x, получаем $x=(2\dot{y}+y)/3$ и

$$f^*(\dot{y},y)=\frac{\dot{y}^2}{3}+\frac{y^2}{3}+\frac{y\dot{y}}{3}$$

Уравнение Эйлера дает

$$\dot{y}_0(t)=A\operatorname{sh}t+B\operatorname{ch}t, \quad y_0(t)=A\operatorname{ch}t+B\operatorname{sh}t.$$

Используя граничные условия для x и соотношение $3x=2\dot{y}+y$, получаем

$$3x_0(t)=(A+2B)\operatorname{ch}t+(2A+B)\operatorname{sh}t, \quad 0=A+2B.$$

Отсюда

$$A=-2B, \quad x(t)=-B\operatorname{sh}t,$$

$$x_1=-B\operatorname{sh}t_1, \quad B=-\frac{x_1}{\operatorname{sh}t_1}, \quad x_0(t)=\frac{x_1}{\operatorname{sh}t_1}\operatorname{sh}t,$$

$$y_0(t)=\frac{2x_1}{\operatorname{sh}t_1}\operatorname{ch}t-\frac{x_1}{\operatorname{sh}t_1}\operatorname{sh}t,$$

$$u_0(t)=\frac{y_0(t)-x_0(t)}{2}=\frac{x_1}{\operatorname{sh} t_1}[\operatorname{ch} t-\operatorname{sh} t]=\frac{x_1}{\operatorname{sh} t_1 e^t}.$$

Если $\frac{|x_1|}{e^t \operatorname{sh} t_1}$ $|u_0(t)|\leq 1$ в точке t 0, то задача решена. Поэтому мы будем предполагать $\frac{|x_1}{\operatorname{sh} t_1}>1$. Отметим, что x_1 не может быть произвольно большим, поскольку $x(t_1)=e^{t_1}-1$ при u 1.

Итак, пусть $\frac{x_1}{\operatorname{sh} t_1}>1$ и $x_1<e^{t_1}-1$. Тогда $y_2(0)>0$ и

$$\varphi(x,y)=\frac{(x+2)^2}{4}-\frac{x(x+2)}{2}+y-x-2$$

(случай $\frac{x_1}{\operatorname{sh} t_1}<-1$ исследуется аналогично).

Продолжим решать задачу при этих условиях.

$$f^*(\dot y,y)=\sup_x\left[xy+x\dot y-\frac{3}{4}x^2+\frac{(x+2)^2}{2}-\frac{x(x+2)}{2}+y-x-2\right]$$
$$=\sup_x[x(\dot y+y)-x^2+y-x-1].$$

Продифференцировав по x, находим, что $2x=\dot y+y-1$ и

$$f^*(\dot y,y)=\frac{\dot y^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{y\dot y}{2}-\frac{\dot y}{2}+\frac{y}{2}+\frac{3}{4}.$$

Так двойственная задача принимает вид

$$\sup_y J(y)=\sup_y\left[x_1 y(t_1)-\frac{1}{4}\int_{t_0}^{t_1}[(y+\dot y)^2+2(y-\dot y)-3\right]dt.$$

Уравнение Эйлера дает $y_0(t)=A\operatorname{ch} t+B\operatorname{sh} t-1$. Из соотношения $2x=\dot y+y-1$ получаем

$$x_0(t)=\frac{A+B}{2}[\operatorname{ch} t+\operatorname{sh} t]-1.$$

Условие $x(0)=0$ дает

(57) $$A+B=2,\ A=2-B,\ x_0(t)=\operatorname{ch} t+\operatorname{sh} t-1,$$
$$y(t)=(2-B)\operatorname{ch} t+B\operatorname{sh} t-1.$$

Из равенства $u=\frac{y_1-x}{2}$ получаем $u=\frac{x+2-x}{2}=1$, т. е. на всем интервале, на котором $y_2(t)>0$, $u(t)=1$. Для $y_2(t)$ получаем $y_2(t)=(1-B)e^{-t}-1$.

Поскольку $0<y_2(0)=-B$, то $B<0$ и, следовательно, $y_2(t)$ есть монотонно убывающая функция и $y_2(t)$ 0 в точке t, в которой $1-B=e^t$. Очевидно, на некотором подынтервале (t, t') отрезка $[t, t_1]$ справедливо $|u|<1$, т. е. y_2 0 и $\varphi(x,y)=\frac{y^2}{4}-\frac{xy}{2}$. Для этого случая мы получили выше, что

$$y_0(t)=A\operatorname{ch} t+B\operatorname{sh} t.$$

Из равенства $3x=2y+y$, полученного нами выше, находим

$$x_0(t)=\frac{A+2B}{3}\operatorname{ch} t+\frac{B+2A}{3}\operatorname{sh} t,$$

$$u_0(t)=\frac{y_0(t)-x_0(t)}{2}=\frac{A-B}{3}[\operatorname{ch} t-\operatorname{sh} t]=\frac{A-B}{3e^t}.$$

Отсюда следует, что функция $u_0(t)$ будет иметь постоянный знак на отрезке $[\bar{t}, t_1]$ и $|u|=1$ на $[\bar{t}, t_1]$. Поскольку $u_0(t)$ есть разность двух непрерывных траекторий $y_1^0(t)$ и $x_0(t)$, то $u_0(t)$ тоже непрерывна в $\bar{t}$. Так $u(t)>0$ на $[\bar{t}, t_1]$ и кривая $x_0(t)$ проходит через точку (t_1, x_1) (т. е. $x_0(t_1)=x_1$). Используя это граничное условие, мы получаем

$$x_0(t)=\frac{x_1+B\operatorname{sh} t_1}{\operatorname{ch} t_1+2\operatorname{sh} t_1}\operatorname{ch} t+\frac{2x_1-B\operatorname{ch} t_1}{\operatorname{ch} t_1+2\operatorname{sh} t_1}\operatorname{sh} t. \tag{58}$$

Точка $\bar{t}$ есть точка пересечения траекторий (57) и (58).

Пример 4 (задача на быстродействие).

$$\dot{x}=x_2,\ \dot{x}_2=u,\ |u|\leq 1,\ x_1(0)=x_1^0,\ x_2(t_0)=x_2^0,$$

$$x_1(t_1)=x_2(t_1)=0.$$

Решение.

$$H(x, y)=\sup_{|u|\leq 1}[x_2y_1+uy_2-1]=x_2y_1+|y_2|-1,$$

т. е. $u=\operatorname{sign} y_2$,

$$f^*(\dot{y}, y)=\sup_{x_1, x_2}[x_1\dot{y}_1+x_2(\dot{y}_2+y_1)+|y_2|-1].$$

Отсюда $\dot{y}_1=0$, $\dot{y}_2=-y_1$. Так $y_1=c_1$, $y_2=-c_1t+c_2$, т. е. $y_2(t)$ есть линейная функция и, следовательно, $u=\operatorname{sign} y_2$ меняет знак не более одного раза.

Двойственная задача принимает вид

$$\max_{y_1, y_2}\left[-x_1^0c_1-x_2^0c_2-\int_0^{t_1}|-c_1t+c_2|\,dt+t_1\right] \tag{59}$$

$$=-\min_{c_1, c_2}\left[x_1^0c_1+x_2^0c_2+\int_0^{t_1}|-c_1t+c_2|\,dt-t_1\right].$$

Допустим, что существует точка $t'\in(0, t_1)$ такая, что $y_2(t')=0$, т. е. что $u(t)$ меняет знак в t'.

Проинтегрируем (59) на отрезках $[0, t']$ и $[t', t_1]$.

$$\min_{c_1, c_2}\left[x_1^0c_1+x_2^0c_2+\int_0^{t_1}\varepsilon(-c_1t+c_2)\,dt+\int_{t'}^{t_1}\varepsilon(c_1t-c_2)\,dt-t_1\right]$$

$$\min\left[x_1^0c_1 \quad x^0c_2 \quad \left(c_1 \quad t'^2 \quad c_2t'\right) \quad \varepsilon\left[c_1 \quad \frac{t_1^2-t'^2}{2} \quad c_2(t_1-t')\right]-t_1\right],$$

где $\varepsilon \quad 1$.

Отсюда, ввиду независимости c_1 и c_2 друг от друга, получаем

$$x_1^0-\varepsilon t'^2+\varepsilon\frac{t_1^2}{2}=0,$$

$$x_2^0+2\varepsilon t'-\varepsilon t_1 \quad 0.$$

Решение этой системы есть

$$(t_1)_{1,} \quad \frac{x_2^0 \quad \sqrt{2x_2^{0^2}-4\varepsilon x_1^0}}{\varepsilon},$$

$$t'_{1,2} \quad \frac{2x_2^0 \quad \sqrt{2x_2^{0^2}-4\varepsilon x_1^0}}{\varepsilon}$$

Поскольку $u \quad \varepsilon$ на $[0, t')$ и $u=-$ на $[t', t_1]$, то из условия задачи получаем

$$x_2^1(t)=\varepsilon t+A, \quad t\in[0, t'),$$

$$x_2^2(t) \quad \varepsilon t+B, \quad t\in[t', t_1],$$

$$x_1^1(t)=\varepsilon\frac{t^2}{2}+At+A_1, \quad t\in[0, t'),$$

$$x_1^2(t) \quad -\varepsilon\frac{t^2}{2}+Bt+B_1, \quad t\in[t', t_1],$$

Из условия $x_1^1(t')=x_1^2(t')$ и из условий

$$x_1^1(0) \quad x_1^0, \quad x_2^1(0)=x_2^0, \quad x_1^2(t_1)=x_2^2(t_1) \quad 0$$

однозначно определяем A, A_1, B, B_1 и ε.

Рассмотрим частный случай $x_1(0) \quad x_2(0)=-2$.

Тогда $(t_1)_{1,} \quad (2+\sqrt{8+8\varepsilon})/\varepsilon$. Отсюда следует, что $\varepsilon=-1$ быть не может (ибо иначе $t_1 \quad -2<0$) и мы получаем

$$t_1=6, \quad t'=4,$$

$$x_2^1(t)=t+A, \quad x_2^2(t)=-t+B,$$

$$x_1^1(t)=\frac{t^2}{2}+At+A_1, \quad x_1^2(t) \quad -\frac{t^2}{2}+Bt+B_1.$$

Отсюда

$$x_2^1(0)= \quad 2 \quad A, \quad x_2^2(6) \quad 0= \quad 6+B,$$

$$x_1^1(0)=-2 \quad A_1, \quad x_1^2(6)=18+B_1=0.$$

Так $A \quad -2$, $A_1 \quad -2$, $B=6$, $B_1=-18$ и для x_1 и x_2 получаем

$$x_1^1(t) \quad \frac{t^2}{2}-2t-2, \quad x_1^2(t)=-\frac{t^2}{2}+6t-18,$$

$$x_0^1(t)=t-2,\ x_0^2(t)=-t+6,$$

$$u(t)=\begin{cases}1, & 0\leq t<4,\\ -1, & 4\leq t\leq 6.\end{cases}$$

В [11] В. Ф. Кротов рассматривает функционал

$$I(x, u)=F(x(t_0), x(t_1))+\int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))\,dt \tag{60}$$

при условиях

$$\dot{x}=\tilde{f}(t, x, u),\ x(t_0)=x_0,\ x(t_1)=x_1, \tag{61}$$

$u\in U\subset R^r$, $x\in R^n$, накладывая при этом на f, F и $\tilde{f}$ некоторые ограничения и доказывает, что достаточным условием для существования решения задачи о нахождении $\min\limits_{x,\,u\in U_t} I(x, u)$, а если минимум не существует в заданном классе функций D, достаточным условием для того, чтобы последовательность $\{x_n(t), u_n(t)\}\subset D$ являлась минимизирующей, есть существование такой функции $\varphi(t, x)$, непрерывной и обладающей непрерывные ограниченные производные φ'_t, φ'_x, чтобы функции

$$R(t, x, u)=\langle\varphi'_x, \tilde{f}(t, x, u)\rangle+\varphi'_t-f(t, x, u), \tag{62}$$

$$\Phi(x_0, x_1)=F(x_0, x_1)+\varphi(t_1, x_1)-\varphi(t_0, x_0) \tag{63}$$

удовлетворяли следующим условиям:

I. Если минимум не существует в D:

а) $R(t, x_n(t), u_n(t))\to\mu(t)=\sup\limits_{x,\,u\in U_t} R(t, x, u)$, где x и u рассматриваются как независимые переменные;

б) $\Phi(x_n^0, x_n^1)\to\inf\limits_{\substack{x_0\in B(t_0),\\ x_1\in B(t_1)}} \Phi(x_0, x_1)$, где $B(t_0)$ и $B(t_1)$ — заданные области изменения $x(t)$ в конечных точках.

II. Если минимум существует в D:

а) $R(t, x_0(t), u_0(t))=\mu(t)=\max\limits_{x,\,u\in U_t} R(t, x, u)$;

б) $\Phi(x_0^1, x_1^0)=\min\limits_{\substack{x_0\in B(t_0),\\ x_1\in B(t_1)}} \Phi(x_0, x_1)$.

III. В обоих случаях

$$-\int_{t_0}^{t_1} R(t, x(t), u(t))\,dt=\int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))\,dt-\varphi(t_1, x_1)+\varphi(t_0, x_0).$$

В рассматриваемом нами случае $\varphi(t_0, x_0)=\varphi(t_1, x_1)$ (поскольку $F(x_0, x_1)=0$) и верхние условия ставятся следующим образом:

Если минимум существует в $AC\times L_\infty$, то

$$-\int_{t_0}^{t_1} R(t, x(t), u(t))\,dt=\int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))\,dt; \tag{64}$$

$$(65)\qquad \max_{x,\,u\in U_t}\int_{t_0}^{t_1} R(t, x(t), u(t))\,dt \qquad \int_{t_0}^{t_1} f(t, x_0(t), u_0(t))\,dt;$$

$$(66)\qquad \max_{x,\,u\in U_t} R(t, x, u) = R(t, x_0(t), u_0(t)).$$

Мы докажем, что если функционал $I(x, u)$ обладает минимумом, то условие Кротова необходимо. Обозначим

$$(67)\qquad y_0(t)\in \partial f_u(t, x_0(t), u_0(t)),\ \dot y_0(t)\in \partial f_x[t, x_0(t), u_0(t)).$$

Зададим функцию φ следующим образом:

$$\varphi(t, x) = \langle x, y_0(t)\rangle + \frac{\langle x_1, y_0(t_1)\rangle - \langle x_0, y_0(t_0)\rangle}{t_1-t_0}(t - t_0).$$

Обозначим, для краткости $\frac{\langle x_1, y_0(t_1)\rangle - \langle x_0, y_0(t_0)\rangle}{t_1-t_0} = M.$

Тогда функция R принимает вид

$$R(t, x, u) = \langle f(t, x, u), y_0(t)\rangle + \langle x, y_0(t)\rangle - M - f(t, x, u).$$

Докажем (64):

$$\int_{t_0}^{t_1} R(t, x(t), u(t))\,dt = \int_{t_0}^{t_1} [f(t, x(t), u(t)) + M - \langle \dot x(t), y_0(t)\rangle$$

$$+ \langle x(t), \dot y_0(t)\rangle]\,dt - \langle x(t), y_0(t)\rangle\Big|_{t_0}^{t_1} + M(t_1-t_0) + \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))\,dt$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} [\langle x(t), \dot y_0(t)\rangle - \langle x(t), \dot y_0(t)\rangle]\,dt = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))\,dt.$$

Докажем (65):

$$\max_{x,\,u\in U_t}\int_{t_0}^{t_1} R(t, x(t), u(t))\,dt = \max_{x,\,u\in U}\int_{t_1}^{t_1} [\langle \dot x(t), y_0(t)\rangle$$

$$+ \langle x(t), \dot y_0(t)\rangle - M - f(t, x(t), u(t))]\,dt$$

$$= \max_{x}\int_{t_0}^{t_1} [\max_{u\in U_t}[\langle Ax(t) + Bu, y_0(t)\rangle - f(t, x(t), u)] + \langle x(t), \dot y_0(t)\rangle - M]\,dt$$

$$= \max_{x}[-M(t_1 - t_0) + \int_{t_0}^{t_1} [\langle x(t), \dot y_0(t)\rangle + H(t, x(t), y_0(t))]\,dt]$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} f^*(t, \dot y_0(t), y_0(t))\,dt - \langle x(t), y_0(t)\rangle\Big|_{t_0}^{t_1} = -\int_{t_0}^{t_1} f(t, x_0(t), u_0(t))\,dt.$$

Докажем (66):

$$\max_{x,\,u\in U_t} R(t,x,u) \quad \max_{x,\,u\in U_t}[\langle \dot{x}(t), y_0(t)\rangle + \langle x, \dot{y}_0(t)\rangle - M - f(t,x,u)]$$

$$= -M + f^*(t, \dot{y}_0(t), y_0(t)) = \langle x_0(t), \dot{y}_0(t)\rangle + \langle \dot{x}_0(t), y_0(t)\rangle - M$$
$$-f(t, x_0(t), u_0(t)) = R(t, x_0(t), u_0(t))\, dt.$$

Так мы доказали следющую теорему.

Теорема 9. Если функционал $I(x, u)$ обладает минимумом, то условие Кротова необходимо.

Докажем еще одну теорему.

Теорема 10. Для того, чтобы существовала функция $\varphi(t, x)$ с описанными выше свойствами, достаточно, чтобы двойственная задача, состоящая в отыскании

$$\sup_y [\langle x(t), y(t)\rangle \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} f^*(t, \dot{y}(t), y(t))\, dt], \tag{69}$$

имела решение.

Доказательство. Отметим, что о существовании решения основной задачи ничего не утверждается, т. е. в (65) и (66) $\max\limits_{x,\,u\in U_t}$ может не иметь место.

Пусть sup в (69) достигается на кривой $y_0(t)$. Тогда проделав те же самые выкладки, как при доказательстве (65), только в обратном порядке, мы получаем, что функция φ существует и имеет вид (68).

Замечание. Если функция φ существует и имеет вид

$$\varphi(t, x) = \langle \psi(t), x\rangle - M(t - t_0), \tag{70}$$

то это является достаточным условием для того, чтобы двойственная задача (69) имела решение $y_0(t) = \psi(t)$. Так мы можем сформулировать следующее

Следствие:

а) Еслу функция φ существует и имеет вид (70), то двойственная задача (69) имеет решение $y_0(t) = \psi(t)$.

б) Если двойственная задача (69) имеет решение $y_0(t)$, то функция φ существует и имеет вид (68).

ЛИТЕРАТУРА

1. Bellman, R., W. Karush. On the maximum transform. J. Math. Anal. and Appl., **6** (1963), No. 1, 67—74.
2. Bishop, E., R. Phelps. The support function of a convex set. Convexity, **7**, 27—35.
3. Brondsted, A. Conjugate convex functions in topological vector spaces. Mat.-Fis. Medd. Danske Vid. Selsk., **34** (1964), No. 2.
4. Brondsted, A., R, T. Rockafellar. On the subdifferentiability of convex functions. Pros. Amer. Math. Soc., **16** (1966), 605—611.
5. Бурбаки, Н., Топологические векторные пространства. М., 1959.
6. Иоффе, А. Д., В. М. Тихомиров. Расширение вариационных задач. Тр. Моск. Матем. о-ва, **18**, 187—246.
7. Иоффе, А. Д., В. М. Тихомиров. Двойственность выпуклых функций и экстремальные задачи. Успехи матем. наук, **23** (1968), № 6, 51—116.

8. Иоффе, А. Д., В. М. Тихомиров. О двойственности в задачах вариационного исчисления. Доклады АН СССР, **180**, 789—792.
9. Иоффе, А. Д., В. М. Тихомиров. О минимизации интегральных функционалов. Функц. анализ и его прилож., 3 (1968), № 3, 61—70.
10. Карлин, С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М., 1964.
11. Кротов, В. Методы решения вариационных задач. Автоматика и телемеханика, **23**, 1570—1584; **24**, 581—598.
12. Курант и Гильберт. Методы математической физики. М., 1933.
13. Mandelbrojt, S. Sur les fonctions convexes. C. R. Acad. Sci., Paris, **209** (1939), 977—978.
14. Minty, G. On the monotonicity of the gradient of a convex function. Pac. J. Math., **16**, 243—247.
15. Minty, G., Monoton nonlinear operators in Hilbert space. Duke Math. J., **29**, 341—346.
16. Moreau, J. J., Fonctions convexes en dualité. Faculté des Sci. de Montpellier Seminaire de Math., 1962.
17. Moreau, J. J. Proximité et dualité dans un espace hilbertien. Bull. S. Math. France, **93** (1965), No. 3, 273—299.
18. Moreau, J. J. Fonctionnelles sous-différentiables. C. R. Acad. Sci. Paris, **258**, 1128—1130.
19. Moreau, J. J. Théorèmes „inf — sup". C. R. Acad. Sci. Paris, **258** (1964), 2720—2722.
20. Moreau, J. J. Semi-continuité du sous-gradient d'une fonnctionelle. C. R. Acad. Sci. Paris, **260** (1965), 1067 — 1070.
21. Rockafellar, R. T. Minimax theorems and conjugate saddlefunctions. Math. Scand., **14** (1964), No. 2, 151—173.
22. Rockafellar, R. T. Duality theorems for convex functions. Bull. Amer. Math. Soc., **70** (1964), No. 1, 189—192.
23. Rockafellar, R. T. Helly's theorem and minima of convex functions. Duke Math. J., **32** (1965), No. 3, 381—397.
24. Rockafellar, R. T. Level sets and continuity of conjugate convex functions. Trans. Amer. Math. Soc., **123** (1966), No. 1, 44—63.
25. Rockafellar, R. T. Characterisations of the subdifferentials of convex functions Pac. J. Math., **17** (1966), No. 3, 497—511.
26. Rockafellar, R. T. Extension of Fenchel's duality theorem for convex functions. Duke Math. J., **33** (1966), No. 1, 81—89.
27. Rockafellar, R. T. Duality and stability in extremum problems involving convex functions. Pac. J. Math., **21** (1967), No. 1, 167—189.
28. Wijsman. Convergence of sequences of convex sets, cones and functions. I. Bull. Amer. Math. Soc., **70** (1964), 186—188; II. Trans. Amer. Math. Soc., **123** (1966), No. 1.
29. Fenchel, W. On conjugate convex functions. Canad. J. Math., **1** (1949), No. 1, 73—77.
30. Friedrichs, K. Eun Verfahren der Variationsrechnung das Minimum. eines Integrals als das Maximum eines anderen Ausdruckes darzustellen. Nachr Königl. Gesell. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse. 1929, 13—20.
31. Цветанов М., О двойственности в задачах вариационного исчисления. Доклады БАН, **23** (1968), 733—736.
32. Цветанов М. Двойственность в экстремальных задачах. Киевский математический журнал, **23**, № 2.
33. Young, W. H. On classes of summable functions and their Fourier series. Proc. Royal Soc. (A), **87** (1912), 225—229.

Поступило 29. IX. 1970 г

ДУАЛНОСТ В ЗАДАЧИТЕ НА ВАРИАЦИОННОТО СМЯТАНЕ И ОПТИМАЛНОТО УПРАВЛЕНИЕ

Митко Цветанов

(Резюме)

Разглежда се функционал от вида

$$F(x_1, x_2)=\int_{t_0}^{t_1} f(t, x_1(t), x_2(t))\, dt,$$

дефиниран в произведението на пространствата $C_n^1[t_0, t_1]\times C_n[t_0, t_1]$ и се търси долната му граница при условие, че $x_2(t)=\frac{d}{dt}x_1(t)$ и при някои условия в краищата. Доказва се, че ако f е изпъкнала по (x_1, x_2) за всички $t\in[t_0, t_1]$ и непрекъсната по (t, x_1, x_2) в $[t_0, t_1]\times R^n\times R^n$, то

$$\operatorname{dom} F^* = \Big\{(\alpha, \mu_1, \mu_2) : \dot{\mu}_1 \text{ и } \mu_2 \text{ — абсолютно непрекъснати и}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} f^*(t, -\mu_1(t), \dot{\mu}_2(t))\, dt < \infty\Big\},$$

където

$$F^*(\mu_1, \mu_2)=\sup_{x_2}\Big[\langle\alpha, x_1(t_0)\rangle+\int_{t_0}^{t_1}\langle\dot{x}_1(t), d\mu_1(t)\rangle+\int_{t_0}^{t_1}\langle x_2(t), d\mu_2(t)\rangle$$

$$-\int_{t_0}^{t_1} f(t, x_1(t), x_2(t))\, dt\Big],$$

$$f^*(t, y_1, y_2)=\sup_{x_1, x_2}[\langle x_1, y_1\rangle+\langle x_2, y_2\rangle-f(t, x_1, x_2)].$$

При горните ограничения за f и при условие, че $x_1(t_0)=x_0$, $x_1(t_1)=x_1$ е вярно равенството

$$\inf_x \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt=\sup_{y\in A}\Big[\langle x(t), y(t)\rangle\Big|_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1} f^*(t, \dot{y}(t), y(t))\, dt\Big],$$

където супремум се взема по всички абсолютно непрекъснати в $[t_0, t_1]$ функции $y(t)$.

По-нататък се извеждат уравненията на Ойлер и каноническите уравнения.

При линеен растеж на f по $\dot{x}$ е доказана

Теорема. Нека функционалът

$$F^*(y)=x_1 y(t_1)-x_0, y(t_0)-\int_{t_0}^{t_1} f^*(t, \dot{y}(t), y(t))\, dt$$

достига максимум на кривата $y_0(t)$. Тогава, ако съществува функция $x_0(t)$, удовлетворяваща условията

а) $x_0(t_0)=x_0$, $x_0(t_1)$ x_1,

б) $x_0(t)$ е диференцируема навсякъде в интервала $[t_0, t_1]$ с изключение на точките $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$, в които $y_0(\tau_i) \in \partial Y_{\tau_i}$, $i=1, 2, \ldots, k$ (тук ∂Y означава границата на Y), където тя търпи прекъсване и при това

$$\operatorname{sign}[x_0(\tau_i+0)-x_0(\tau_i-0)]=\begin{cases} 1, & y_0(\tau_i)=\sup\limits_y\{y \in Y_{\tau_i}\}, \\ -1, & y_0(\tau_i)=\inf\limits_y\{y \in Y_{\tau_i}\}, \end{cases}$$

а в останалите точки

$$x_0(t) \in \partial f_1^*(t, \dot{y}_0(t)), \quad \dot{x}_0(t) \in \partial f_2^*(t, y_0(t)),$$

то кривата $x_0(t)$ е решение на задачата за $\inf\int\limits_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t))\,dt$, ако f има вида $f(t, x, \dot{x})$ $f_1(t, x)+f_2(t, \dot{x})$.

Разглеждат се и линейни задачи с управление с изпъкнал по (x, u) функционал и изпъкнали ограничения на u, получена е дуалната задача и е доказан принципът за оптималност на Кротов, който за такива задачи е не само достатъчно, но и необходимо условие за минимума.

DUALITY IN PROBLEMS OF THE CALCULUS OF VARIATIONS AND OPTIMAL CONTROL

Mitko Tsvetanov

(Summary)

A functional of the type

$$F(x_1, x_2)=\int\limits_{t_0}^{t_1} f(t, x_1(t), x_2(t))\,dt$$

defined in the product of the spaces $C_n^1[t_0, t_1]\times C_n[t_0, t_1]$ is considered and its lower bound is searched for some boundary conditions and when $x_2(t) = \frac{d}{dt}x_1(t)$. It is proved that if f is convex in (x_1, x_2) for every $t \in [t_0, t_1]$ and continuous in (t, x_1, x_2) on $[t_0, t_1]\times R^n\times R^n$, then $\operatorname{dom} F=\left\{(a, \mu_1, \mu_2) : \dot{\mu}_1 \text{ and } \mu_2 \text{ are absolutely continuous and } \int\limits_{t_0}^{t_1} f(t, -\mu_1(t), \dot{\mu}_2(t))\,dt<\infty\right\}$, where

$$F^*(a, \mu_1, \mu_2) = \sup_{x_1, x_2} \left[\langle a, x_1(t_0) \rangle + \int_{t_0}^{t_1} \langle \dot{x}_1(t), d\mu_1(t) \rangle \right.$$

$$\left. + \int_{t_0}^{t_1} \langle x_2(t), d\mu_2(t) \rangle - \int_{t_0}^{t_1} f(t, x_1(t), x_2(t))\, dt \right],$$

$$f^*(t, y_1, y_2) = \sup_{x_1, x_2} [\langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle - f(t, x_1, x_2)].$$

The following equation is satisfied when f is restricted as mentioned above and if $x_1(t_0) = x_0$, $x_1(t_1) = x_1$

$$\inf_x \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt = \sup_{y \in A} \left[\langle x(t), y(t) \rangle \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} f^*(t, \dot{y}(t), y(t))\, dt \right],$$

where A is the set of all absolutely continuous in $[t_0, t_1]$ functions $y(t)$.

Next Euler's equations and the canonical equations are derived.

The following theorem is proved for f increasing linearly in $\dot{x}$.

Theorem. Let the functional

$$F^*(t) = x_1 y(t_1) - x_0 y(t_0) - \int_{t_0}^{t_1} f^*(t, \dot{y}(t), y(t))\, dt$$

reach the maximum on the curve $y_0(t)$. If there exists a curve $x_0(t)$ satisfying the conditions:

a) $x_0(t_0) = x_0$, $x_0(t_1) = x_1$;

b) $x_0(t)$ is differentiable everywhere in the interval $[t_0, t_1]$ except the points $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$ at which $y_0(\tau_i) \in \partial Y_{\tau_i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$ (∂Y denotes the boundary of Y) where it has discontinuities and

$$\operatorname{sign} [x_0(\tau_i + 0) - x_0(\tau_i - 0)] = \begin{cases} 1 \text{ if } y_0(\tau_i) = \sup_y \{y \in Y_{\tau_i}\}, \\ -1 \text{ if } y_0(\tau_i) = \inf_y \{y_1 \in Y_{\tau_i}\} \end{cases}$$

and at the other points

$$x_0(t) \in \partial f_1^*(t, \dot{y}_0(t)), \quad \dot{x}_0(t) \in \partial f_2^*(t, y_0(t))$$

then the curve $x_0(t)$ is a solution of the problem for

$$\inf \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t)) dt$$

if f is of the type $f(t, x, \dot{x}) = f_1(t, x) + f_2(t, \dot{x})$.

The linear control problem with a convex in (x, u) functional and convex restrictions in u are considered, the dual problem is obtained and Krotov's principle of optimality is proved. The latter appears to be not only a sufficient but also a necessary condition for such problems.