БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ
ИНСТИТУТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
СЕКЦИЯ ВЕРОЯТНОСТИ И СТАТИСТИКА

Емил Петков Каменов

Асимптотични резултати за случайни целочислени разлагания на големи числа

Автореферат

на дисертация за присъждане на образователна
и научна степен „Доктор“ по научна специалност 01.01.10
„Теория на вероятностите и математическа статистика“

Научен ръководител: проф. дмн Любен Мутафчиев

София, 2012

Дисертационният труд е обсъден и препоръчан за започване на процедура по защита на разширено заседание на секция „Вероятности и статистика“ ИМИ БАН, проведено на 17.2.2012г.

Автор: Емил Каменов

Заглавие: Асимптотични резултати за случайни целочислени разлагания на големи числа

Научна специалност: 01.01.10 Теория на вероятностите и матеманическа статистика

Дисертационният труд съдържа 82 страници.
Литературата съдържа 60 заглавия.

Въведение

Всяко представяне на естествено число като ненаредена сума от естествени числа се нарича *Целочислено разлагане*.

Първият писмен източник съдържащ това понятие е хроника от X век. Епископ Уиболд от Камбре изписва всички разлагания на $n \leq 18$ на точно три събираеми, всяко от които е по-малко или равно на шест. Това всъщност са възможните суми при хвърляне на три неразличими зара.

Първите резултати за целочислени разлагания са получени от Ойлер. В 1741 в презентация пред Петербургската академия той дава решението на задача предложена му година по-рано от Филип Нойде. А именно, по колко начина числото 50 може да се представи като сума от 7 различни естествени числа.

В знаменития си труд „Introductio in Analysin Infinitorum“ [10] от 1748 Ойлер извежда пораждащата функция на броя на всички разлагания, както и тези на разлагания с наложени ограничения за събираемите. Ойлер, също така, формулира пентагоналната теорема и извежда рекуренти формули за броя на разлаганията.

В продължение на дълги години един от най-интригуващите и сложни за решаване проблеми е бил въпросът за намирането на формула за броя на всички разлагания. Поблемът е решен в 1918г. с откриването на асимптотична формула от Харди и Рамануджан. Доказателството на тази формула е и първото приложение на така наречения кръгов метод.

Като естествено обобщение на целочислените разлагания Мак Махон [30] въвежда така наречените *Плоски разлагания*. При тях отделните събираеми са подредени в равнината. Мак Махон намира пораждащата функция на броя на всички плоски разлагания. Съответната асимптотична формула за този брой е изведена от Райт [57].

За първи път вероятностен подход при изучаването на целочислените разлагания е приложен от Ердьош и Ленер [13] в 1941г. Те въвеждат равномерно вероятностно разпределение върху множеството от всички разлаганията на фиксирано n и намират математическото очакване на броя на събираемите в дадено разлагане.

В настоящата дисертация са изследвани някой случайни величини свързани с целочислените разлагания. Навсякъде по-долу ще следваме номерацията от дисертацията.

Съдържание на дисертацията

• В Увода са представени познати резултати за целочислените разлагания. Изложението е подробно, тъй като тези факти досега не са били публикувани на български език.

В §0.1 са дадени основните дефиниции и са въведени най-често срещаните означения.

Целочислено разлагане ω на естественото числото n наричаме представянето

$$\omega: \qquad n = \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_r, \qquad \omega_i \geq \omega_{i+1}.$$

Числата ω_i се наричат части на разлагането. С $\mu_j(\omega)$ означаваме броят на частите равни на j в разлагането ω, а с $p(n)$ броят на всички разлагания на n.

Пораждащите функции са важен инструмент за изучаване на свойствата на целочислените разлагания. Те се използват както за намиране на конкретни параметри на фиксирани разлагания, така и за определяне на техните асимптотични свойства. Пораждащата функция $g(x)$ на броя на всички разлагания $p(n)$ е намерена от Ойлер. В §0.3. е представено, макар и нестрого, доказателство на неговия резултат:

Следствие 1 *Пораждащата функция $g(x)$ има следното представяне*

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)\, x^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^n}. \tag{1}$$

В §0.2 е изложен интересен метод за графично представяне на целочислените разлагания - диаграмите на Ферер, споменати за първи път от Силвестър [48]. С помощта на този метод сложни аналитични доказателства се заменят с елементарни трансформации. Като приложение е цитирано доказателството, което прави Франклин [14] на пентагоналната теорема на Ойлер.

Твърдение 3 *(Пентагонална теорема)*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m\, x^{\frac{1}{2}m(3m-1)}.$$

От пентагоналната теорема може да се изведе следната рекурентна формула за броя на разлаганията

Следствие 3 *Нека n е естествено число*

$$p(n)-p(n-1)-p(n-2)+p(n-5)+\ldots+(-1)^m p\left(n-\frac{1}{2}m(3m-1)\right)\ldots=0,$$

където приемаме $p(k)=0$ за $k<0$.

Тази формула, получена също от Ойлер, дава прост начин за числено пресмятане на $p(n)$ при зададена конкретна стойност на n.

В §0.4 е цитирана формулата за общия брой на целочислените разлагания изведена от Харди и Рамануджан. Те показват, че $p(n)$ е най-близкото цяло число до

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{q=1}^{\nu}\sqrt{q}A_q(n)\psi_q(n), \tag{2}$$

където

$$\psi_q(n)=\frac{\partial}{\partial n}\exp\left\{\frac{\pi\sqrt{2(n-1/24)}}{q\sqrt{3}}\right\},$$

$$A_q(n)=\sum a\omega_{p,q}e^{-2\pi inp/q}$$

а $\omega_{p,q}$ е корен на единицата от степен $24q$. Сумирането в последната сума се извършва по всички p взаимно прости и по-малки от q. Броят на събираемите ν в (2) е от порядък $\sqrt{n}$. Интересната история на получаването на тази формула е подробно описана от Литълууд [27].

По-късно резултата на Харди и Рамануджан е усъвършенстван от Радемахер [46]. В следващото твърдение е представена точната формула за $p(n)$ във вида предложен от него.

Твърдение 4

$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n) k^{1/2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{\operatorname{sh}\left(\pi/k\sqrt{2/3(x-1/24)}\right)}{\sqrt{x-1/24}} \right]_{x=n},$$

където

$$A_k(n) = \sum_{h \, mod \, k} \omega_{h,k} e^{-2\pi i n h/k},$$

$\omega_{p,q}$ е корен на единицата от степен $24k$.

В §0.5 е въведено равномерно вероятностно разпределение върху множеството на всички целочислени разлагания на фиксирано n. За първи път този подход е предложен от Ердьош и Ленер [13] в 1941г. Цитиран е и техния резултат.

Параграф §0.8 е посветен на плоските разлагания споменати за първи път в 1906 г. от Юнг [58]. Плоските разлагания (*plane partitions*) са естествено обобщение на понятието целочислено разлагане. При тях се разглеждат числа, подредени в таблица, чиито елементи монотонно намаляват от ляво на дясно и от долу на горе, т.е. *плоско разлагане* на естественото число n наричаме таблицата

$$\begin{array}{cccc} \vdots & \vdots & \vdots & \ldots \\ \omega_{2,1} & \omega_{2,2} & \omega_{2,3} & \ldots \\ \omega_{1,1} & \omega_{1,2} & \omega_{1,3} & \ldots \end{array}$$

където $\sum \omega_{i,j} = n$ и са изпълнени неравенствата

$$\omega_{i,j} \geq \omega_{i,j+1}, \qquad \omega_{i,j} \geq \omega_{i+1,j}, \qquad \forall\, i,j \geq 1.$$

Първите резултати в тази област принадлежат на Мак Махон [30] (1916г). Той разглежда плоски разлагания с и без ограничения за броя на редовете, броя на стълбовете и големината на частите и извежда пораждащите функции във всичките тези случаи. Неговите резултати са представени в §0.9. По-конкретно, Мак Махон показва, че пораждащата функция $G(x)$ на броя на плоските разлагания $Q(n)$ има вида:

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Q(n)\, x^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^n)^n}. \tag{3}$$

• В Глава 1 е намерена асимптотиката при $n \to \infty$ на броя на различните части по-големи от дадено число s в случайно разлагане на n. Дефиницията и някой предварителни резултати за тази случайна величина са изложени в §0.5.

За всяко целочислено разлагане ω на естественото число n ще дефинираме следните индикатори

$$\beta_j(\omega) = \begin{cases} 1, & \mu_j(\omega) > 0 \\ 0, & \mu_j(\omega) = 0. \end{cases}$$

Нека

$$Y_{s,n}(\omega) = \beta_s(\omega) + \beta_{s+1}(\omega) + \ldots + \beta_n(\omega). \tag{4}$$

Пример 4 *Ще разгледаме следното конкретно разлагане на* $n = 9$

$$\omega : \qquad 9 = 4 + 2 + 2 + 1,$$

тогава $Y_{1,9}(\omega) = 3$*,* $Y_{2,9}(\omega) = 2$*,* $Y_{3,9}(\omega) = Y_{4,9}(\omega) = 1$*.*

Случайната величина $Y_{0,n}$ равна на броя на различните части, броени без кратността им, в случайно целочислено разлагане е изследвана от Уилф [55]. Той използва принципа за включване и изключване за да намери пораждащата функция на броя на разлаганията, който имат k различни части

$$\sum_{k,n\geq 0} p(n)\, \mathrm{P}(Y_{0,n} = k)\, x^n\, y^k = \prod_{t\geq 1} \left(1 + \frac{yx^t}{1 - x^t}\right)$$

Уилф извежда и следното интересно равенство за математическото очакване на $Y_{0,n}$

$$\mathrm{E}Y_{0,n} = \frac{p(0) + p(1) + \ldots + p(n-1)}{p(n)}.$$

Прилагайки към това равенство формулата на Харди и Рамануджан (2), Уилф достига до следната асимптотична формула

$$\mathrm{E}(Y_{0,n}) \sim \frac{\sqrt{6n}}{\pi}, \qquad n \to \infty. \tag{5}$$

Граничното разпределение на случайната величина $Y_{0,n}$ е намерено от Гох и Шмутц [17]. Те показват, че при подходящо нормиране тази случайна величина е асимптотично нормална.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{Y_{0,n}-\mu_n}{\sigma_n} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt,$$

където

$$\mu_n = \frac{\sqrt{6n}}{\pi}, \qquad \sigma_n^2 = \sqrt{6n}\left(\frac{1}{2\pi} - \frac{3}{\pi^3}\right).$$

Ние обобщаваме формулата на Уилф (5), като намираме математическото очакване на $Y_{s,n}$. Този резултат е представен в следната теорема.

Теорема 1 *Нека $\lambda > 0$ е произволно фиксирано число и*

$$s_n = \frac{\lambda\,\sqrt{6\,n}}{\pi}.$$

Ако s е цяло число, такова че

$$s_n \le s < s_n + 1, \tag{6}$$

то

$$E(Y_{s,n}) \sim \frac{e^{-\lambda}\,\sqrt{6\,n}}{\pi},$$

при $n \to \infty$.

Доказателството на теоремата е представено в §1.1 - §1.5

В §1.1 е изведена пораждащата функция на моментите на случайната величина $Y_{s,n}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)\,\mathrm{E}(Y_{s,n}) = \frac{g(x)\,x^s}{1-x}, \tag{7}$$

където $g(x)$ е пораждащата функция на $p(n)$ (1).

В \$ 1.3 е получено представяне за $\mathrm{E}(Y_{s,n})$. За целта е приложена формулата за коефициентите на Коши към пораждащата функция (7)

$$\mathrm{E}(Y_{s,n}) = \frac{1}{2\,\pi i\,p(n)} \int_C \frac{g(x)\,x^s}{1-x} \frac{1}{x^{n+1}}\,dx,$$

като интегрирането се извършва по окръжност $C : x = r_n\,e^{i\theta}$, $-\pi \le \theta \le \pi$ лежаща вътре в единичния кръг. Радиусът r_n е дефиниран с тъждеството

$$r_n = 1 - \frac{\pi}{\sqrt{6\,n}} - \frac{\lambda}{2\,n} + O\left(n^{-3/2}\right).$$

По-нататък контурът на интегриране е разделен на две части. Дъгата $-\delta_n < \theta < \delta_n$ и останалата част на окръжността, където

$$\delta_n = \frac{\omega(n)}{n^{3/4}},$$

а $\omega(n)$ е произволна функция, такава че $\omega(n) \to \infty$, но $\omega(n) = o(n^{1/12})$.

Асимптотичният анализ на интеграла върху първата дъга е представен в §1.4. В §1.5 е доказано, че върху втората дъга интегралът е пренебрежим.

Л. Мутафчиев [33] намира граничното разпределение на $Y_{s,n}$. Той доказва, че тази случайна величина е асимптотично нормално разпределена

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{Y_{s,n} - \mu_n(\lambda)}{\sigma_n(\lambda)} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt,$$

където s е дефинирано с (6), а

$$\mu_n(\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\sqrt{6n}}{\pi}, \qquad \sigma_n^2(\lambda) = \sqrt{6n}\left(\frac{e^{-\lambda}(2-e^{-\lambda})}{2\pi} - \frac{3e^{-2\lambda}(\lambda+1)^2}{\pi^3}\right).$$

• В Глава 2 е изведена асимптотична формула за дисперсията на броя на частите с дадена кратност в случайно разлагане. Някой предварителни сведения за същата случайна величина са представени в §0.7

Нека ω е случайно избрано разлагане на естественото число n. За всяко фиксирано m с $X_{m,n}(\omega)$ ще означим броят на частите в това разлагане, които се срещат точно m пъти

$$X_{m,n}(\omega) = |\{j : \mu_\omega(j) = m\}|. \tag{8}$$

Пример 5 *Нека $n = 26$ и ω е следното конкретно разлагане*

$$\omega : \qquad 26 = 7 + 5 + 3 + 3 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1.$$

Тогава частите, които се срещат само веднъж са две, а именно '5' и '7', следователно $X_{1,26}(\omega) = 2$, аналогично $X_{2,26}(\omega) = 2$ частите са '1' и '3' и $X_{3,26}(\omega) = 1$.

Пораждащата функция и асимптотична формула за математическото очакване на случайната величина $X_{m,n}(\omega)$ са намерени от Кортел, Пител, Савидж и Уилф [8]. Пораждаща функция на $X_{m,n}$ има вида

$$\sum_{n,j\geq 0} x^n\, y^j\, p(n)\, P(X_{m,n} = j) = g(x) \prod_{k=1}^{\infty} \left[1 + (y-1)x^{mk}(1 - x^k)\right]$$

От тук със стандартна техника, т.е. диференциране по y и полагане $y = 1$, се получава представяне за математическо очакване на $X_{m,n}$

$$\mathbf{E}(X_{m,n}) = \sum_{j\geq 0} j\, P(X_{m,n} = j) = \sum_{j\geq 0} \frac{p(n - jm) - p(n - (m+1)j)}{p(n)}$$

По нататък в своето изследване Кортел, Пител, Савидж и Уилф, доказват, че за всяко фиксирано m средният брой елементи с кратност m в случайно целочислено разлагане е

$$\mathbf{E}(X_{m,n}) \sim \frac{\sqrt{6n}}{\pi} \frac{1}{m(m+1)} = \mu_n(m), \qquad n \to \infty. \tag{9}$$

Ние ще продължим тяхното изследване, като ще изведем формула за дисперсията на случайната величина $X_{m,n}$. Нашият резултат е формулиран в следната

Теорема 2 *Нека $X_{m,n}$ е броя на частите с кратност m в случайно разлагане на n. Тогава, за всяко фиксирано m, дисперсията на $X_{m,n}$ удовлетворява следната асимптотична еквивалентност*

$$\mathrm{D}(X_{m,n}) \sim \frac{\sqrt{6n}}{\pi} \frac{4m+1}{2m(m+1)(2m+1)},$$

при $n \to \infty$.

Доказателството на тази теорема е аналогично на доказателството на Теорема 1. В §2.1 вторият факториален момент на $X_{m,n}$ е представен, като интеграл по подходящо избран контур в комплексната област.

$$\mathbf{E}[X_{m,n}(X_{m,n}-1)] = \frac{1}{2\pi i\, p(n)} \int_C g(x) F(x) \frac{1}{x^{n+1}} dx,$$

където

$$F(x) = \left[\frac{x^m}{1-x^m} - \frac{x^{m+1}}{1-x^{m+1}}\right]^2 - \frac{x^{2m}}{1-x^{2m}} + \frac{2\, x^{2m+1}}{1-x^{2m+1}} - \frac{x^{2m+2}}{1-x^{2m+2}}.$$

Интегралът отново е разделен на две части, пресметнати съответно в §2.2 и §2.3. Окончателната формула за дисперсията на $X_{m,n}$ е получена в §2.4

• В Глава 3 е представено ново доказателство на формулата на Райт за броя на плоските разлагания, като е отсранена и една неточност в нея. Редица познати факти за плоските разлагания са изложени в §0.8- §0.10.

Плоските разлагания са естествено обобщение на понятието целочислено разлагане. При тях се разглеждат числа, подредени в таблица, чиито елементи монотонно намаляват по ред и по стълб. Плоско разлагане ω на n ще наричаме всеки двумерен масив от цели неотрицателни числа,

$$\begin{array}{cccc} \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \omega_{2,1} & \omega_{2,2} & \omega_{2,3} & \dots \\ \omega_{1,1} & \omega_{1,2} & \omega_{1,3} & \dots \end{array}$$

за които $\sum \omega_{i,j} = n$ и са изпълнени неравенствата

$$\omega_{i,j} \geq \omega_{i,j+1}, \qquad \omega_{i,j} \geq \omega_{i+1,j}, \qquad \forall\, i,j \geq 1.$$

Мак Махон [30] намира пораждащата функция $G(x)$ на броя на плоските разлагания $Q(n)$

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Q(n)\, x^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^n)^n}.$$

Райт [57] е първият, който изследва асимтотичното поведение на числата $Q(n)$ при големи n. В 1931г. той публикува следния резултат

$$Q(n) \sim \frac{[\zeta(3)]^{7/36}}{2^{11/36}\pi^{1/2}} n^{-25/36} \exp\{3[\zeta(3)]^{1/3}(n/2)^{2/3} + 2c\}, n \to \infty,$$

където

$$\zeta(s) = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-s}, \qquad c = \int_0^{\infty} \frac{y \log y}{e^{2\pi y} - 1} dy. \tag{10}$$

За съжаление в знаменателя на формулата на Райт е изпусната константата $\sqrt{3}$. Причината за възникването на тази неточност е проследена в Увода §0.10. Нашия резултата е формулиран в следващата

Теорема 3 *Нека n е естественото число, а $Q(n)$ е броя на всички плоски разлагания на n. Тогава при $n \to \infty$ е изпълнено*

$$Q(n) \sim \frac{[\zeta(3)]^{7/36}}{\sqrt{3\,\pi}\, 2^{11/36}} n^{-25/36} \exp\{3[\zeta(3)]^{1/3}(n/2)^{2/3} + 2c\},$$

където c и ζ са дефинирани с (10)

В Глава 3 ние доказваме тази теорема като използваме теоремата на Мейнардус[31], която дава асимптотична формула за цял клас от пораждащи функции.

Теорема на Майнардус *Разглеждаме безкрайни произведения от вида*

$$f(\tau) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^j)^{a_j}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r(n) x^n, \quad |x| < 1.$$

Допускаме, че a_j е редица от неотрицателни реални числа. Разглеждаме също свързания с тази функция ред на Дирихле

$$D(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{j^s}, \quad s = \sigma + it.$$

Предполагаме, че са изпълнени следните четири условия.

(i) *$D(s)$ е сходящ в полуравнината $\sigma > \alpha > 0$.*

(ii) *$D(s)$ може да бъде продължен аналитично в областта $\Re e\ s \geq -C_0$ $(0 < C_0 < 1)$, където $D(s)$ е аналитична функция и има прост полюс при $s = \alpha$ с резидуум $A > 0$.*

(iii) *Съществува константа $C_1 > 0$, такава че$D(s) = O(|t|^{C_1})$ равномерно за $\sigma \geq -C_0$ при $|t| \to \infty$.*

(iv) *Съществуват $\rho, r > 0$ и $j_0 \geq 0$, такива че $a_j \geq \rho j^{r-1}$ за $j \geq j_0$*

(Последното условие в този вид е формулирано от Грановски, Старк и Ерлихсон [18])

Тогава при $n \to \infty$ е изпълнено

$$r(n) = Cn^K \exp\left\{n^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)[A\Gamma(\alpha+1)\zeta(\alpha+1)]^{\frac{1}{\alpha+1}}\right\}(1+O(n^{-K_1})),$$

където

$$C = e^{D'(0)}[2\pi(1+\alpha)]^{-1/2}[A\Gamma(\alpha+1)\zeta(\alpha+1)]^{\frac{1-2D(0)}{2+2\alpha}},$$
$$K = \frac{D(0)-1-\alpha/2}{\alpha+1},$$
$$K_1 = \frac{\alpha}{\alpha+1}\min\left(\frac{C_0}{\alpha}-\frac{\delta}{4}, \frac{1}{2}-\delta\right)$$

δ е произволно положително число, а $\Gamma(\alpha)$ и $\zeta(\alpha)$ са съответно гама и дзета функции на Ойлер.

В нашия случай за редицата $\{a_j\}$ е изпълнено $a_j = j$. Условията (i) - (iv) се оказват добре познати свойства на дзета функция на Ойлер. Така получаваме Теорема 3, като директно следствие от теоремата на Майнардус

- В Глава 4 е доказана гранична теорема за следата на случайно плоско разлагане. Понятията следа и спрегната следа на плоско разлагане са въведени и изследвани от Стенли[49]. Повече информация за неговите резултати е дадена в §0.11 на увода.

Нека n е естествено число и ω е произволно плоско разлагане на n. Следа τ_n на разлагането ω ще наричаме сумата от диагоналните му части, т.е.

$$\tau_n(\omega) = \sum_{j=1}^{n} \omega_{j,j}.$$

Аналогично на едномерния случай, ще въведем равномерно вероятностно разпределение върху множеството от всички плоски разлагания на n, като ще смятаме че всяко едно разлагане се сбъдва с вероятност $1/Q(n)$. Така, следата τ_n на плоското разлагане ω може да се разглежда като случайна величина.

С $\varphi_n(u)$ означаваме пораждащата функция на следата τ_n при фиксирано n

$$\varphi_n(u) = \sum_{m=1}^{n} P(\tau_n = m) u^m.$$

Стенли [49] извежда следното тъждество за $\varphi_n(u)$

$$G(u, x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} Q(n) \varphi_n(u) x^n = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - u x^j)^{-j}. \tag{11}$$

Ние доказваме, че следата на случайно плоско разлагане е асимптотично нормална.

Теорема 4 *За всяко реално число z, е изпълнено*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\tau_n - c_0 n^{2/3}}{c_1 n^{1/3} \log^{1/2} n} \le z\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{y^2}{2}} dy,$$

където

$$c_0 = \zeta(2) / \left[2\zeta(3)\right]^{2/3} = 0.916597104\ldots,$$

$$c_1 = \sqrt{2/3} / [2\zeta(3)]^{1/3} = 0.609493899\ldots.$$

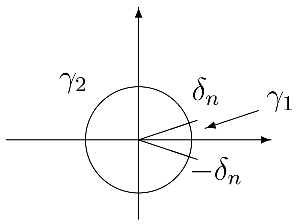
Доказателството е подобно на доказателствата на теореми 1 и 2.

В §4.1 са доказани няколко помощни леми. Направено е изследване на пораждащата функция $G(1, x)$ на броя на всички плоски разлагания в околност на особената и точка $x = 1$. За целта е използвана една от лемите на теоремата на Майнардус.

В §4.2 е получено представяне за $\varphi_n(u)$, като е приложена формулата за коефициентите на Коши върху тъждеството на Стенли.

$$\sum_{m=1}^{n} P(\tau_n = m)\, u^m = \frac{1}{2\pi i\, Q(n)} \int \prod_{j=1}^{\infty} (1 - ux^j)^{-j} \frac{1}{x^{n+1}} dx \tag{12}$$

За контур на интегрирането е избрана окръжността $x = r_n e^{i\theta}$, $-\pi < \theta \leq \pi$,



където радиусът r_n е дефиниран с

$$r_n = 1 - \frac{[2\zeta(3)]^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{1}{3}}} + \frac{[2\zeta(3)]^{\frac{2}{3}}}{2n^{\frac{2}{3}}} - \frac{\zeta(3)}{n} + O(n^{-\frac{4}{3}}).$$

След това контурът на интегриране е разбит на две части първата за $|\theta| \leq \delta_n$, където

$$\delta_n = \frac{n^{-5/9}}{\log n}.$$

В §4.3. е изследван интегралът върху тази част от окръжността. Използвана е Лема 4.2 от §4.1.

В §4.4 е показано, че в останалата част, а именно $\pi \geq |\theta| \geq \delta_n$ интегралът е пренебрежим. Тук е използвана Лема 4.3 от §4.1.

В §4.5 е намерена характеристичната функция на следата τ_n. За целта е извършено полагането $u = e^{iT}$ в (12), където T е следната нормираща константа

$$T = w \Bigg/ \left[\frac{n}{2\zeta(3)}\right]^{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{2\log n}{3}}$$

Така получената характеристичната функция се оказва асимптотично нормална.

Апробация

Резултатите от дисертацията са публикувани в:

[24] E. Kamenov: The average number of large distinct part sizes in a random integer partition. *Appl. of Math. in Enginering an Economics* **26**(2001), 207-210.

[25] E. Kamenov: The number of parts of given multiplicity in a random integer partition. *pliska Stud. Math. Bulgar* **18**(2007), 157-164.

[38] L. Mutafchiev, E. Kamenov, Asymptotic formula for the number of plane partitions of positive integers, *Comptes rend. de l'Acad. Bulg.Sci.* , **59(4)** (2006), A13.

[39] L. Mutafchiev, E. Kamenov, The Limiting Distribution of the Trace of a Random Plane Partition. *Acta Math Hungar.*, **117 (4)** (2007), 293-314. Available at http://arxiv.org/abs/math/0411377.

Статия [38] е цитирана в [5], [18], [45], [60].

Статия [39] е цитирана в [42].

Части от дисертацията са докладвани на:

- Summer School, Sozopol 2000

- XII-th International Summer Conference on Probability and Statistics , Sozopol 2006, 2008

- Общия семинар по стохастика на секция „Вероятности и сстатистика“ ИМИ БАН, Декември 2006.

- 12th International Conference on Random Structures and Algorithms, Poznan 2005

Авторска справка

Основните резултати и приноси на дисертацията, според автора, са следните:

• Теорема 1. Намерена е асимптотиката при $n \to \infty$ на математическото очакване на броя на различните части по-големи от дадено число s в случайно целочислено разлагане на n . Това е обобщение на частния случай $s = 0$ разгледан от Уилф [55].

• Теорема 2. Намерена е асимптотична формула за дисперсията на броя на частите с дадена кратност в случайно разлагане. Това е продължение на изследването на Кортел, Пител, Савидж и Уилф [8], който намират пораждащата функция и математическото очакване на същата случайна величина.

• Теорема 3. Направена е корекция в асимптотичната формула на Райт за броя на плоските разлагания на дадено естествено число n. Представено е и ново, значително опростено доказателство на тази формула.

• Теорема 4. Доказана е гранична теорема за следата на случайно плоско разлагане.

Литература

[1] M. Abramovitz, and I.A. Stegun, *Handbook of Mathemathical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, Dover Publ., Inc (New York, 1965).

[2] G. Almkvist, A rather exact formula for the number of plane partitions, in: *A Tribute to Emil Grosswald: Number Theory and Related Analysis*, eds. M. Knopp and M. Sheingorn, *Contemp. Math.*, **143** (1993), 21-26.

[3] G. Almkvist, Asymptotic formulas and generealized Dedekind sums, *Experim. Math.*, **7** (1998), 343-359.

[4] G.E. Andrews, *The Theory of Partitions, Encyclopedia Math. Appl. 2*, Addison-Wesley, Reading, (MA,1976).

[5] O.Bodini, E.Fusy, C.Pivoteau. Random Sampling of Plane Partitions. *Comb. Prob. Comp.*, **19** (2010), 201-226.

[6] P.R.Boscovich, Giornale de' Letterati, Rome, 1747. 8-10.

[7] L. Carlitz, Recatngular arrays and plane partitions. *Acta Arith.* , **13** (1967), 22-47.

[8] S.Corteel, B.Pittel, C.D.Savage, H.S.Wilf, On the multiplicity of parts in a random partition, *Random Structures and Algorithms*, **14** (1999), 185–197.

[9] L.E. Dickson, History of the theory of numbers. Vol. II, *New York: Dover Publications*, (1920).

[10] L. Euler, [E158], Observationes analyticae variae decomtinationibus, *Comm. Acad. Petrop.*,**13**, ad annum 1741-43, 1751, 64-93.

[11] L. Euler, [E101], Introductio in analysin infinitorum, Lausanne, 1, 1748, Cap. 16, 253-275.

[12] P. Erdős and M. Szalay, On the statistical theory of partitions, in: *Topics in Classical number Theory*, vol.I, ed. G. Halász, North-Holland, (Amsterdam, 1984), pp. 397-450.

[13] P. Erdős and J. Lehner, The distribution of the number of summands in the partition of a positive integer, *Duke. Math.J.*, **8** (1941), 335-345.

[14] F. Franklin, Sur le dŕeveloppement du produit infini $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots$,*Comptes Rendus*, **92** (1881), 448–450.

[15] B. Fristedt, The structure of random partitions of large integers, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **337** (1993), 703-735.

[16] G. Frobenius, Uber die charaketere der symmetrischen Gruppe, *S.B.-Preuss Akad. Wiss.*, (Berlin 1900), 417, 516–534.

[17] W. Goh and E. Schmutz, The number of distinct part sizes in a random integer partitioin, *J. Combin. Theory Ser. A*, **69** (1995), 149-158.

[18] B.Granovsky, D.Stark and M.Erlihson, Meinardus' theorem on weighted partitions: extensions and a probabillistic proof, *Adv. Appl. Math.*, **41** (2008), 307-328.

[19] G.H. Hardy, and S. Ramanujan, Asymptotic formulae in combinatory analysis, *Proc. London Math. Soc.*, **17** (1918), 75-115.

[20] C.B. Haselgrove and H.N.V. Temperley, Asymptotic formulae in the theory of partitions, *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, **50** (1954), 225-241.

[21] W.K. Hayman, A generalization of Stirling's formula, *J. Reine Angew. Math.*, **196** (1956), 67–95.

[22] K.F. Hindenburg, Infinitinomii Dignitatum indeterminatarum Leges ac Formulae. Gottingen: Dieterich, 1779, pp. 73-91.

[23] H.K. Hwang, Limit theorems for the number of summands in integer partitions, *J. Combinatorial Theory, Ser. A*, **96** (2001), 89-126.

[24] E. Kamenov: The average number of large distinct part sizes in a random integer partition. *Appl. of Math. in Enginering an Economics* **26**(2001), 207-210.

[25] E. Kamenov: The number of parts of given multiplicity in a random integer partition. *pliska Stud. Math. Bulgar* **18**(2007), 157-164.

[26] Ch. Knessl: Asymptotic behavior of high-order differences of the plane partition function. *Discrete Mathematics* **126**(1-3)(1994), 179-193.

[27] J. E. Littlewood. Review of „Collected Papers of Srinivasa Ramanujan“. *Mathematical Gasette,* **14** (1929).

[28] D. E. Littlewood. The Theory of Group Characters. 2end. ed., Oxford at the Charendon Press 1940.

[29] E. Lukacs, *Characteristic Functions*, Griffin, (London, 1970).

[30] P. A. MacMahon, *Combinatory Analysis, Vol. 2*, *Cambridge Univ. Press,* (1916); reprinted by *Chelsea, New York,* (1960).

[31] G. Meinardus, Assymptotische Aussagen über Partitionen,*Math. Z.* **59** (1954), 388-398.

[32] L. Mutafchiev, A limit theorem concerning the likely shape of the Ferrers diagram, *Discr. Math. Appl.*, **9** (1999), 79 - 100; *Correction, ibid.* **9** (1999), 685-686.

[33] L. Mutafchiev, Large Distinct part sizes in a random integer partition, *Acta Math. Hungar.*, **87 (1-2)** (2000), 47-69.

[34] L. Mutafchiev, On the size of the Durfee square in a random integer partition, *J. Comput. Appl. Math.*, **142** (2002), 173–184.

[35] L. Mutafchiev, The typical growth of the kth excess in a random integer partition, *Monatsh. Math*, **136** (2002), 313–325.

[36] L. Mutafchiev, On the maximal multiplicity of parts in a random integer partition, *The Ramanujan J.*, **9** (2005), 305-316.

[37] L. Mutafchiev, The size of the largest part of random plane partitions of large integers, *Integers: Electron. J. Comb. Number Theory*, **6** (2006), A13.

[38] L. Mutafchiev, E. Kamenov, Asymptotic formula for the number of plane partitions of positive integers, *Comptes rend. de l'Acad. Bulg.Sci.* , **59(4)** (2006), A13.

[39] L. Mutafchiev, E. Kamenov, The Limiting Distribution of the Trace of a Random Plane Partition. *Acta Math Hungar.*, **117 (4)** (2007), 293-314. Available at http://arxiv.org/abs/math/0411377.

[40] A. Nijenhuis, and H. Wilf, *Combinatorial Algorithms*, 2nd Ed., Academic Press, (New York, 1978).

[41] A.M. Odlizko and L.B. Richmond, Asymptotic expansions for the coefficents of analytic generating functions, *Aequationes Math.*, **28** (1985), 50–63.

[42] D.Panario, B.Richmond, B. Young, Bivariate Asymptotics for Striped Plane Partitions, SIAM (2009).

[43] B. Pittel, On a likely shape of the random Ferrers diagram, *Adv. Appl. Math.*, **18** (1997), 432-488.

[44] B. Pittel, On dimensions of a random solid diagram, *Combinatorics, Probab. Comput.*, **14** (2005), 873-895.

[45] C. Pivoteau. Generation aleatoire de structures combinatoires. These de doctorat, Universite Paris PMC (2008).

[46] Rademacher H. On the partition function p(n). *Proc. London Math. Soc.*,(2) **43** (1937), 241-254.

[47] J. Riordan, *An Introduction to Combinatorial Analysis*, J. Wiley, New York, 1958.

[48] J.J. Sylvester, On Mr Cayley's Impromptu Demonstration..., *Phil. Mag.*, **5**, (1853), 199-202;

[49] Stanley R. The Conjugate Trace and the Trace of a PlanePartition. *J. Combin. Theory* Ser. A **14** (1973), 53-65.

[50] R.P. Stanley, Theory and application of plane partitions, I, II, *Studies in Appl. Math.*, **50** (1971), 167-188, 259-279.

[51] R.P. Stanley, *Enumerative Combinatorics 2*, Vol. 62 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge Univ. Press, (Cambridge, 1999).

[52] C. Sudler. A direct proof of two theorems on two lines partitions, *Proc. Amer. Math. Soc.* **16** (1965), 161–168, 558.

[53] E. C. Titchmarsh, The theory of functions. Oxford Uni. Press, 1939.

[54] G . Watson The Harmonic Functions Associated with the Parabolic Cylinder *Proc. London Math. Soc.*,(2) **17** (1918), 241-254.

[55] Wilf, H. S. Three problems in combinatorial asymptotics, *J. Combin. Theory* Ser. A **35** (1983), 199-207. 13

[56] E.T. Whittaker and G.N. Watson, *A Course of Modern Analysis* Cambridge Univ. Press (Cambridge, 1927).

[57] E. M. Wright, Asymptotic partition formulae, I: Plane partitions, *Quart. J. Math. Oxford Ser.* **2** (1931), 177-189.

[58] A. Young. On quantitative substitutional analysis. *Proc. London Math. Soc.*, **33**, (1901), 97–146.

[59] Чандрасекхаран, Арифметические функции, Наука, Москва, 1975.

[60] The On Line Encyclopedia of Integer Sequences: http://www.research.att.com/ njas/ sequences/A000219