ИНСТИТУТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ

АПРОКСИМАЦИИ С РАЦИОНАЛНИ ФУНКЦИИ В КОМПЛЕКСНАТА РАВНИНА

Николай Руменов Икономов

АВТОРЕФЕРАТ

НА ДИСЕРТАЦИОНЕН ТРУД, ПРЕДСТАВЕН ЗА ПРИСЪЖДАНЕ
НА ОБРАЗОВАТЕЛНАТА И НАУЧНА СТЕПЕН ДОКТОР

Научен ръководител:
проф. дмн Ралица Ковачева

София, 2016

Защитата на дисертационния труд ще се състои на .... от ...... в заседателната зала на Института по математика и информатика при Българската академия на науките (ул. "Акад. Г. Бончев" №8).

Дисертационните труд е обсъждан на научен семинар на секция "Анализ, геометрия и топология" на ИМИ на 15.12.2015 г.

Дисертационният труд съдържа 3 глави и заключение, и е в обем от 101 страници. Цитирани са 63 източника.

Автор: Николай Руменов Икономов

ЗАГЛАВИЕ: Апроксимации с рационални функции в комплексната равнина

Глава 1

Редове на апроксимации на Паде

В тази глава изследваме зависимостта на равномерното разпределение на точки на интерполация и максималната сходимост на редове на апроксимации на Паде. В първи и втори раздел разглеждаме многоточкови апроксимации на Паде, а в трети — обобщени апроксимации на Паде.

1.1 Многоточкови апроксимации на Паде с фиксирана степен на знаменателя

В този раздел изследваме зависимостта на равномерното разпределение на точки на интерполация и максималната сходимост на редове от многоточкови апроксимации на Паде.

1.1.1 Въведение

Нека E е компакт (ограничено и затворено множество) в комплексната равнина $\mathbb{C}$. Нека неговото допълнение E^C е свързано и регулярно, в смисъл че E^C притежава класическа функция на Грийн $G(z) := G_E(z, \infty)$, с полюс в безкрайната точка (припомняме, че $G(z)$ е хармонична и положителна в $E^C \setminus \infty$ и е равна на нула по границата на E). Отбелязваме с Γ_σ линиите на ниво $G(z) = \log \sigma$, $\sigma > 1$, и с E_σ – вътрешността на Γ_σ [56].

Нека f е холоморфна функция (еднозначна аналитична функция или еднозначен клон на многозначна аналитична функция) върху E, по-нататък използваме означението $f \in \mathscr{H}(E)$. Въвеждаме понятието радиус на холоморфност $\tau_0 := \tau_0(f)$, т.е.

$$\tau_0 := \sup\{\tau > 1,\ f \in \mathscr{H}(E_\tau)\}.$$

Нека m и κ са естествени числа, нека $\kappa > 1$. Казваме, че $f \in \mathscr{M}_m(E_\kappa)$, ако f може да бъде продължена като мероморфна функция в E_κ с не повече от m полюса (полюсите се броят с тяхната кратност). Аналогично на радиуса на холоморфност, въвеждаме радиус на m-мероморфност $\tau_m := \tau_m(f)$, т.е.

$$\tau_m := \sup\{\tau > 1,\ f \in \mathscr{M}_m(E_\tau)\}.$$

Ако f не е холоморфна върху E, тогава полагаме $\tau_m = 1$.

Нека $\|\cdot\|_E = \max_{z\in E}|\cdot|$ е максималната норма на E.

Нека Π_n е класа на всички полиноми от степен най-много n и нека $\mathscr{R}_{n,m} := \{p/q, p \in \Pi_n, q \in \Pi_m, q \not\equiv 0\}$, $n, m \in \mathbb{N}$ е класа на рационални функции от степени n и m, съответно на числителя и знаменателя.

Нека $q \in \Pi_m$ и $1 \leq m_0 \leq m$. Използваме нормализацията

$$q = \begin{cases} \prod_{k=1}^{m_0}(z-\xi_k)\prod_{k=m_0+1}^{m}(1 - z/\xi_k^*) = \widetilde{q}q^*, & 1 \leq m_0 < m, \\ \prod_{k=1}^{m}(z-\xi_k), & m_0 = m, \end{cases}$$

където $\xi_k \in G \cup E$ и $\xi_k^* \in F$.

Дефиниция 1 (Сходимист по m_1-мярка)**.** Въвеждаме понятието сходимост в m_1-мярка от [21]. Нека A е множество, такова че $A \subset \mathbb{C}$, нека $m_1(A) := \inf\{\sum_i |U_i|\}$, като инфимума е взет от всички покрития $\{U_i\}$ на A с кръгове U_i, където $|U_i|$ е радиуса на всеки кръг. Нека Ω е област в $\mathbb{C}$ и φ е непрекъсната функция, която е дефинирана в Ω и е със стойности в $\overline{\mathbb{C}}$. Казваме, че редицата от функции $\{\varphi_n\}$, мероморфни Ω, клони по m_1-мярка към φ върху компактни подмножества на Ω, ако за всеки компакт $K \subset \Omega$ и всяко $\varepsilon > 0$ имаме че

$$m_1(\{z \in K : |\varphi - \varphi_n| \geq \varepsilon\}) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Дефиниция 2 (m_1-почти равномерна сходимост)**.** Ако за всеки компакт $K \subset \Omega$ и всяко $\varepsilon > 0$ съществува множество $K_\varepsilon \subset K$, такова че $m_1(K \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$, както и че редицата $\{\varphi_n\}$ е равномерно сходяща в максималната норма към φ върху K_ε, то тогава редицата $\{\varphi_n\}$ е m_1-почти равномерно сходяща към φ върху компактни подмножества на Ω.

Известно е [21, Lemma 1], че ако редицата $\{\varphi_n\}$ е сходяща по m_1-мярка към φ върху компактни подмножества на Ω, всяко $\varphi_n \in \mathscr{M}_m(\Omega)$, и φ има точно m полюса в Ω, то тогава всички φ_n имат точно m полюса в Ω (при n достатъчно голямо), полюсите на $\{\varphi_n\}$ клонят към полюсите на φ (със съответните кратности), и редицата $\{\varphi_n\}$ е равномерно сходяща към φ върху компактни подмножества на област, която е Ω без полюсите на φ.

Припомняме понятието максимална сходимост на полиноми от [56, §4.7]. Нека S е регулярен компакт, означаваме с $G_S(z, \infty)$ функцията на Грийн с полюс в безкрайната точка, като $G_S(z, \infty)$ е дефинирана за допълнението на S. За число $\sigma > 1$ въвеждаме каноничната област S_σ спрямо $G_S(z, \infty)$, както следва:

$$S_\sigma := \{z,\ G_S(z, \infty) = \ln \sigma\}.$$

Нека $g \in \mathscr{H}(S)$, нека $\sigma_0 := \sigma_0(g)$ е радиусът на холоморфност спрямо $G_S(z, \infty)$, т.е.

$$\sigma_0 := \sup\{\sigma,\ g \in \mathscr{A}(S_\sigma)\}.$$

Казваме, че редицата от полиноми $\{p_n\}$ е максимално сходяща към g върху S, ако

$$\limsup_{n\to\infty} \|g - p_n\|_S^{1/n} \leq \frac{1}{\sigma_0}.$$

Когато интерполационните точки са екстремални спрямо S, то неравенството става на равенство [56, §4.7], т.е.

$$\limsup_{n\to\infty} \|g - p_n\|_S^{1/n} = \frac{1}{\sigma_0}.$$

Също така, следното равенство важи за всеки компакт $K \subset S_{\sigma_0}$

$$\limsup_{n\to\infty} \|g - p_n\|_K^{1/n} = \frac{e^{\|G_S(z,\infty)\|_K}}{\sigma_0}, \tag{1.1}$$

като наричаме това точна максималната сходимост.

Нека m е естествено число, въвеждаме отново радиус на m-мероморфност, $\sigma_m := \sigma_m(g)$ спрямо $G_S(z, \infty)$, като $\sigma_m(g) < \infty$. Казваме, че редицата от функции $\{r_{n,m}\}$, $n, m \in \mathbb{N}$, m – фиксирано, $r_{n,m} = p_{n,m}/q_{n,m}$ е максимално сходяща към g върху S, ако

$$\limsup_{n\to\infty} \|\widetilde{q}_{n,m} g - \widetilde{q}_{n,m} r_{n,m}\|_S^{1/n} \leq \frac{1}{\sigma_m}.$$

Отново имаме точна максимална сходимост [21], аналогично на (1.1), т.е. за всеки компакт $K \subset S_{\sigma_m} \setminus S$, който не съдържа полюси на g, важи равенството:

$$\limsup_{n\to\infty} \|\widetilde{q}_{n,m}g - \widetilde{q}_{n,m}r_{n,m}\|_K^{1/n} = \frac{e^{\|G_S(z,\infty)\|_K}}{\sigma_m}.$$

Обобщеният случай, когато степените на знаменателя на рационалната апроксимация се увеличават, може да се намери в [20].

Нека $\beta := \{\beta_{n,k}\}_{k=1}^n$, $n = 1, 2, \dots$ е безкрайна триъгълна таблица от точки, която няма точки на сгъстяване, външни за E (като всички точки на сгъстяване са върху E). Полагаме

$$\omega_n(z) := \prod_{k=1}^{n} (z - \beta_{n,k}), \quad n = 1, 2, \dots$$

Точките $\{\beta_{n,k}\}$ се наричат екстремални спрямо E, ако

$$\lim_{n\to\infty} \|\omega_n(z)\|_E^{1/n} = \mathrm{cap}\,(E),$$

където $\mathrm{cap}\,(E)$ е логаритмичния капацитет на E. Припомняме, че

$$\mathrm{cap}\,(E) := \exp\left(-\lim_{n\to\infty} (G(z) - \log|z|)\right).$$

Както е известно $\mathrm{cap}\,(E) > 0$ тогава и само тогава, когато E е регулярен компакт.

Нека сега $f(z) \in \mathscr{H}(E)$ и (n, m) е фиксирана двойка от естествени числа. Съществуват полиноми $p(z) \in \Pi_n$ и $q(z) \in \Pi_m$, такива че

$$h_{n,m} := \frac{q(z)f(z) - p(z)}{\omega_{n+m+1}(z)} \in \mathscr{H}(E). \tag{1.2}$$

Полагаме $\pi^\beta_{n,m}(f) = \pi^\beta_{n,m} := p(z)/q(z)$. Казваме, че $\pi^\beta_{n,m}(z)$ е β-многоточкова апроксимация на Паде към $f(z)$ от тип (n, m). Полагаме

$$\pi^\beta_{n,m}(z) = \frac{P_{n,m}(z)}{Q_{n,m}(z)},$$

където полиномите $P_{n,m}(z)$ и $Q_{n,m}(z)$ нямат общ множител, и $Q_{n,m}(z)$ е със старши коефициент единица. Нулите на $Q_{n,m}(z)$ се наричат свободни полюси на $\pi^\beta_{n,m}(z)$. Известно е, че рационалната функция $\pi^\beta_{n,m}(z)$ винаги съществува и е еднозначно определена (виж [21], [32]).

Теорема 1 (Гончар [21]). *Нека E е регулярен компакт в $\mathbb{C}$ със свързано допълнение, и нека точките $\{\beta_{n,k}\}$ са екстремални спрямо E. Нека функцията $f(z)$ е холоморфна върху E. Нека $m \in \mathbb{N}$ е фиксирано число, като $\tau_m < \infty$. Тогава редицата $\{\pi^{\beta}_{n,m}\}$ е максимално сходяща към $f(z)$ върху E при $n \to \infty$.*

От теоремата следва че, ако $f(z)$ има точно m полюса в E_{τ_m}, то редицата $\{\pi^{\beta}_{n,m}\}$ е равномерно сходяща към $f(z)$ при $n \to \infty$ в сферичната метрика върху компактни подмножества на E_{τ_m}. Тази теорема е аналог на теоремата на Монтесу Де Балор относно класически апроксимации на Паде [16].

Ще докажем следното твърдение: ако за всяка функция $f(z) \in \mathscr{H}(E)$ при $\tau_m < \infty$ редицата $\{\pi^{\beta}_{n,m}\}$ е максимално сходяща към $f(z)$ върху E, то точките $\{\beta_{n,k}\}$ са екстремални спрямо E.

Нека фиксираме число $t \notin E$, полагаме $\tau_t := e^{G_E(t,\infty)}$. Нека още $\alpha_i \in E_{\tau_t} \setminus E$, $i = 1, \dots, \nu$. Въвеждаме функцията $f_t(z)$:

$$f_t(z) := \frac{1}{Q(z)(t-z)}, \quad \text{където} \quad Q(z) := \prod_{i=1}^{\nu}(z-\alpha_i). \tag{1.3}$$

1.1.2 Основни резултати

Основният резултат е:

Теорема 2. *Нека точките $\{\beta_{n,k}\}_{k=1}^{n}$, $n = 1, 2, \dots$ нямат точки на сгъстяване външни за E. Нека $m \geq \nu$ е фиксирано число. Ако редицата $\{\pi^{\beta}_{n,m}\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \to \infty$ е максимално сходяща към $f_t(z)$ върху E, т.е.*

$$\limsup_{n\to\infty} \|f_t(z) - \pi^{\beta}_{n,m}(z)\|_E^{1/n} = \frac{1}{\tau_t}, \tag{1.4}$$

то $\{\beta_{n,k}\}$ са екстремални спрямо E, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \|\omega_n(z)\|_E^{1/n} = \operatorname{cap}(E). \tag{1.5}$$

Аналог на Теорема 2 може да се намери в [31].

1.2 Многоточкови апроксимации на Паде със степен на знаменателя $m_n = o(n/\log n)$

В тази глава разглеждаме m_1-почти равномерна сходимост на редици от многоточкови апроксимации на Паде от ред (n, m_n), където $m_n = o(n/\log n)$. Излагаме достатъчно условие за равномерното разпределение на точките на интерполация спрямо равновесната мярка на носителя.

1.2.1 Основните резултати

Следващата теорема е следствие от резултатите на Гончар [21]:

Теорема 8 (Gonchar [21])**.** *Нека E е регулярен компакт със свързано допълнение, нека $f \in \mathcal{A}(E)$. Предполагаме, че $\tau_m < \infty$. Нека $\{m_n\}$, $m_n \to \infty$, $m_n = o(n/\ln n)$ е безкрайна редица от естествени числа. Предполагаме още, че $\beta := \{\beta_{n,k}\}$ е триъгълна таблица от точки, екстремални спрямо E. Нека знаменателите на π^{β}_{n,m_n} са нормализирани спрямо E_{τ_m}. Тогава редицата от многоточкови апроксимации на Паде е m_1-почти равномерно сходяща към f върху компактни подмножества на E_{τ_m}. Скоростта на сходимост се характеризира от*

$$\limsup_{n\to\infty} \|Q_{n,m_n}(f - \pi^{\beta}_{n,m_n})\|_E^{1/n} \le \frac{1}{\tau_m}$$

и върху всеки компакт $K \subset E_{\tau_m}$, който не съдържа полюси на f и на π^{β}_{n,m_n}, имаме

$$\limsup_{n\to\infty} \|Q_{n,m_n}(f - \pi^{\beta}_{n,m_n})\|_K^{1/n} \le \frac{e^{\|G_E(z,\infty)\|_K}}{\tau_m}$$

(сравни (1.2)).

Излагаме следната теорема от [13]:

Теорема 9 (Blatt, Kovacheva [13])**.** *При условията на Теорема 8, предполагаме че функцията f притежава многократна съществена особеност върху Γ_{τ_m}. Тогава*

$$\limsup_{n\to\infty} \|Q_{n,m_n}(f - r_{n,m_n})\|_E^{1/n} = \frac{1}{\tau_m}$$

и за всяко δ, $1 < \delta < \tau_m$, важи следното:

$$\limsup_{n\to\infty} \|Q_{n,m_n}(f - r_{n,m_n})\|_{\Gamma_\delta}^{1/n} = \frac{\delta}{\tau_m}.$$

Теорема 10. *Нека E е регулярен компакт в $\mathbb{C}$ със свързано допълнение, $f \in \mathcal{A}(E)$, $\tau_m < \infty$. Нека $m_n = o(n/\ln n)$, $m_n \to \infty$ при $n \to \infty$ и нека $\beta := \{\beta_{n,k}\}_{k=1}^n$, $n \geq 1$ е триъгълна таблица от точки, която няма точки на сгъстяване външни за E. Нека π_{n,m_n}^β е многоточковата апроксимация на Паде спрямо β, като знаменателите са нормализирани спрямо $B \supset E_{\tau_m}$. Ако*

$$\limsup_{n\to\infty} \|Q_{n,m_n}(f - \pi_{n,m_n}^\beta)\|_E^{1/n} = \frac{1}{\tau_m}, \tag{1.14}$$

и за всяко $1 < \sigma < \tau_m$

$$\limsup_{n\to\infty} \|Q_{n,m_n}(f - \pi_{n,m_n}^\beta)\|_{E_\sigma}^{1/n} = \frac{\sigma}{\tau_m}, \tag{1.15}$$

то тогава съществува редица $\Lambda \subset \mathbb{N}$, такава че

$$\widetilde{\mu}_n \xrightarrow{*} \mu_E \quad \text{при} \quad n \in \Lambda,$$

където $\widetilde{\mu}_n$ са балаяжите на броящата мярка, асоциирана с полиномите ω_n, като балаяжите са върху ∂E (сходимостта е в слабата топология).

От Теорема 8, 9, 10 следва:

Следствие 1. *При същите условия като в Теорема 10, нека да предположим че f притежава многократна съществена особеност върху Γ_{τ_m}; предполагаме още, че (1.14) е в сила. Тогава твърдението на Теорема 10 също е в сила.*

Теорема 10 е доказана в [14]; тук излагаме ново доказателство.

1.3 Обобщени апроксимации на Паде с фиксирана степен на знаменателя

Нека (E, F) е равнинен кондензатор, нека α и β са триъгълни таблици от точки; $\alpha \in E$, $\beta \in F$. В статията е доказан критерий относно екстремалното разпределение на таблиците α и β. Резултатите са постигнати чрез използване на обобщена апроксимация на Паде, която е асоциирана с таблиците α и β.

1.3.1 Равнинен кондензатор

Нека D е област в комплексната равнина $\overline{\mathbb{C}}$, нека $E \subset \mathbb{C}$ е континуум (компакт съдържащ повече от една точка) съдържащ се в D, и $G := D \setminus E$. Предполагаме, че G е регулярна област спрямо проблема на Дирихле. Нека $F := \overline{\mathbb{C}} \setminus D$. Наредената двойка (E, F) се нарича равнинен кондензатор.

Нека h е хармоничната мярка на ∂F спрямо G. Припомняме, че h е хармонична функция в G, $h = 0$ на ∂E и $h = 1$ на ∂F. Нека $c = c(E, F)$ е капацитета на кондензатора; т.е.

$$c = c(E, F) := \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial h}{\partial \mathrm{n}} ds,$$

където Γ е затворена аналитична крива в G (или краен брой от непресичащи се аналитични криви), която разделя E и F, нормалният вектор n е с посока от E към F. Нека $\operatorname{mod} G$ е модула на кондензатора, т.е.

$$\operatorname{mod} G = \operatorname{mod}(E, F) := 1/c.$$

Нека

$$\rho = \rho(E, F) := \exp(1/c),$$

е Римановият модул на кондензатора. За специалния случай, когато E и F са континууми (затворени свързани множества, които съдържат повече от една точка), параметърът ρ е равен на r_2/r_1, като изобразим G конформно на пръстена $\{r_1 \leq |w| \leq r_2\}$.

Припомняме дефиницията за радиус на холоморфност. Нека m и κ са естествени числа, нека $1 < \kappa \leq \rho$. Казваме, че $f \in \mathscr{M}_m(E_\kappa)$, ако f може да бъде продължена като мероморфна функция в E_κ с не повече от m полюса (полюсите се броят с тяхната кратност).

Аналогично на радиуса на холоморфност, въвеждаме радиус на m-мероморфност $\tau_m := \tau_m(f)$, т.е.

$$\tau_m := \sup\{\tau > 1,\ f \in \mathscr{M}_m(E_\tau)\}.$$

Ако f не е холоморфна върху E, тогава полагаме $\tau_m = 1$.

Полагаме $\Gamma_\tau := \{z : h = c\log\tau\}$, $1 < \tau < \rho$, и $E_\tau := E \cup \{z : h < c\log\tau\}$.

Нека $\lambda := \exp(h/c)$.

Аналогично на максимална сходимост на полиноми, и като обобщаваме идеите от [13], въвеждаме понятието максимална сходимост на рационални функции в случай на кондензатори. Нека $f \in \mathscr{H}(E)$, нека m е фиксирано. Предполагаме, че $\tau_m \le \rho$. Редицата $\{r_{n,m}\}$, $r_{n,m} \in \mathscr{R}_{n,m}$, $r_{n,m} = p/(\widetilde{q}_{n,m}q^*_{n,m})$, $n \in \mathbb{N}$ е максимално сходяща към f върху E спрямо кондензатора (E, F), ако

$$\limsup_{n\to\infty} \|\widetilde{q}_{n,m}f - \widetilde{q}_{n,m}r_{n,m}\|_E^{1/n} \le \frac{1}{\tau_m}$$

и за всеки компакт $K \subset E_{\tau_m} \setminus E$, който не съдържа полюси на f, имаме

$$\limsup_{n\to\infty} \|\widetilde{q}_{n,m}f - \widetilde{q}_{n,m}r_{n,m}\|_K^{1/n} \le \frac{\|\lambda\|_K}{\tau_m}.$$

Нека $\alpha := \{\alpha_{n,k}\}_{k=1}^n$ и $\beta := \{\beta_{n,k}\}_{k=1}^n$, $n \in \mathbb{N}$ са триъгълни таблици от точки, с точки на сгъстяване принадлежащи съответно на E и F. Полагаме

$$\omega_n^\alpha := \prod_{k=1}^n (z - \alpha_{n,k}) \ \text{ и } \ \omega_n^\beta := \prod_{k=1}^n (z - \beta_{n,k}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Казваме, че точките (α, β) са екстремални спрямо кондензатора (E, F), ако равенството

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\omega_n^\alpha}{\omega_n^\beta}\right|^{1/n} = C_0 \exp\left(\frac{h}{c}\right) = C_0\lambda \tag{1.21}$$

важи равномерно върху всяко затворено множество от G, като C_0 е положителна константа. Относно съществуването на редицата, вижте [21, §3, Remark 2], [56, §8.7, Theorem 9], [8]. Ако някоя точка от $\{\beta_{n,k}\}$ е равна на безкрайност, то разликата $z - \beta_{n,k}$ за тази точка се заменя с единица (в случай, че $\infty \in F$). Когато всички

$\{\beta_{n,k}\}_{k=1}^n = \infty$, то константата е равна на капацитета на линията на ниво, разположена във външността на S, т.е. $C_0 := \operatorname{cap}(S)e^{G_S(z,\infty)}$.

Когато точките $\{\alpha_{n,k}\}_{k=1}^n \in \partial E$ и $\{\beta_{n,k}\}_{k=1}^n \in \partial F$, казваме, че те са равномерно разпределени спрямо кондензатора (E, F), като $C_0 = \rho$, иначе $C_0 > 0$. Отново, ако $\{\beta_{n,k}\}_{k=1}^n = \infty$, то константата е равна на логаритмичния капацитет на S, т.е. $C_0 := \operatorname{cap}(S)$.

Например, нека $G := \{z,\ 1 < |z| < 2\}$ (взимаме единичния кръг за E и $|z| \geq 2$ за F). Виждаме, че хармоничната мярка $h = \ln|z|/\ln 2$, $c = 1/\ln 2$ и $\rho = 2$. Нека ω_n^α, ω_n^β да бъдат съответно $(z^n - 1,\ z^n - 2^n)$, $(z^n,\ z^n - 2^n)$, $(z^n,\ 1)$ и $(z^n - 1,\ 1)$. Редиците $|\omega_n^\alpha/\omega_n^\beta|^{1/n}$ са локално равномерно сходящи върху компактни подмножества на G към $|z|/2$, което е умножено съответно по $1, 1, 2, 2$.

Нека да отбележим, че ако точките (α, β) са екстремални спрямо кондензатора (E, F), то те са екстремални спрямо всеки кондензатор $(E_{\eta_1}, E_{\eta_2}^C)$ при $1 < \eta_1 < \eta_2 < \rho$ (като $E_{\eta_2}^C$ е допълнението на E_{η_2}).

Сега припомняме дефиницията на обобщена апроксимация на Паде, асоциирана с точките (α, β) (виж [21]).

Нека $f \in \mathscr{H}(E)$, нека (n, m) е фиксирана двойка от естествени числа, $n \geq m$. Съществуват полиноми $p \in \Pi_n$ и $q \in \Pi_m$, такива че

$$z \mapsto h_{n,m}(z) := \frac{q\omega_{n-m}^\beta f - p}{\omega_{n+m+1}^\alpha} \in \mathscr{H}(E). \tag{1.22}$$

Полагаме $\pi_{n,m}^{\alpha,\beta}(f) = \pi_{n,m}^{\alpha,\beta} := p/(q\omega_{n-m}^\beta)$. Наричаме $\pi_{n,m}^{\alpha,\beta}$ обобщена апроксимация на Паде към f от ред (n, m) спрямо (α, β). Полагаме

$$\pi_{n,m}^{\alpha,\beta} = \frac{P_{n,m}}{Q_{n,m}\omega_{n-m}^\beta},$$

където полиномите $P_{n,m}$ и $Q_{n,m}$ нямат общ множител. Нулите на $Q_{n,m}$ се наричат свободни полюси на $\pi_{n,m}^{\alpha,\beta}$. Останалите полюси, ако има такива, са фиксирани в безкрайната точка, $z = \infty$. Както е известно [21], [32], рационалната функция $\pi_{n,m}^{\alpha,\beta}$ винаги съществува и е единствена. Тази дефиниция обобщава класическата апроксимация на Паде [16] ($\{\alpha_{n,k}\}_{k=1}^n = 0$, $\{\beta_{n,k}\}_{k=1}^n = \infty$, $n \in \mathbb{N}$), както и многоточковата апроксимация на Паде [44] ($\{\beta_{n,k}\}_{k=1}^n = \infty$, $n \in \mathbb{N}$).

Припомняме резултата на Гончар (вече дефинирахме, че τ_m е радиусът на m-мероморфност и ρ е Римановият модул на кондензатора):

Теорема 12 (Гончар [21]). *Нека (E, F) е регулярен равнинен кондензатор, нека f е холоморфна върху E, нека m е фиксирано, нека $\tau_m \leq \rho$. Предполагаме, че триъгълноте таблици от точки $\alpha := \{\alpha_{n,k}\}_{k=1}^n \in E$ и $\beta := \{\beta_{n,k}\}_{k=1}^n \in F$ имат екстремално разпределение спрямо (E, F), и техните точки на сгъстяване принадлежат съответно на E и F. Тогава редицата $\{\pi_{n,m}^{\alpha,\beta}\}$ е максимално сходяща към f върху компактни подмножества на E_{τ_m} при $n \to \infty$, и за всеки компакт $K \subset E_{\tau_m} \setminus E$, който не съдържа полюси на f, важи неравенството*

$$\limsup_{n\to\infty} \|\widetilde{q}_{n,m} f - \widetilde{q}_{n,m} \pi_{n,m}^{\alpha,\beta}\|_K^{1/n} \leq \frac{\|\lambda\|_K}{\tau_m}.$$

При условията на теоремата, нека f има точно m полюса в $E_{\tau_m} \setminus E$, нека да са в точките a_i, $i = 1, \ldots, m$. Полагаме $q_m := \prod_{i=1}^m (z - a_i)$. Тогава, от [21, Lemma 1], всеки полюс на f привлича толкова свободни полюса на $\pi_{n,m}^{\alpha,\beta}$ при $n \to \infty$, колкото е неговата кратност, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} Q_{n,m} = q_m.$$

Трябва да отбележим, че това не важи, ако функцията f има помалко от m полюса в $E_{\tau_m} \setminus E$, тогава трябва да умножим по $\widetilde{q}_{n,m}$, както е в дефиницията по-горе.

Теорема 12 обобщава класическата теорема на Монтесу де Балор [16].

1.3.2 Основната теорема за кондензатор

Поставаме въпроса, дали m_1-почти равномерна сходимост на обобщени апроксимации на Паде към дадена функция е необходимо условие за екстремално разпределение на точки (1.21), свързани със самата апроксимация.

Нека (E, F) регулярен равнинен кондензатор, нека $\alpha \in E$, $\beta \in F$ са триъгълни таблици от точки, със точки на сгъстяване извън G. Фиксираме число τ, $1 < \tau < \rho$, фиксираме точки $z_i \in E_\tau \setminus E$, $i = 1, \ldots, m$, въвеждаме за всяко $t \in \Gamma_\tau$ функцията $f_t(z)$:

$$f_t(z) := \frac{1}{Q(z)(t - z)}, \quad \text{където} \quad Q(z) := \prod_{i=1}^m (z - z_i).$$

Нека $t \in \Gamma_\tau$ е произволно число, полагаме $\pi^{\alpha,\beta}_{n,m}(f_t) := \pi^{\alpha,\beta}_{n,m,t}$,

$$\pi^{\alpha,\beta}_{n,m,t} = \frac{P_{n,m,t}}{Q_{n,m,t}\omega^{\beta}_{n-m}}.$$

Теорема 13. *Нека точките $\alpha = \{\alpha_{n,k}\}_{k=1}^{n} \in E$ и $\beta = \{\beta_{n,k}\}_{k=1}^{n} \in F$, $n \in \mathbb{N}$ са дадени, като имат точки на сгъстяване принадлежащи съответно на E и F. Нека m е фиксирано, нека полиномът $Q(z)$ е както преди. Ако за всяко $t \in \Gamma_\tau$ редицата $\{\pi^{\alpha,\beta}_{n,m,t}\}$ е максимално сходяща към $f_t(z)$ върху компактни подмножества на E_τ при $n \to \infty$, то точките (α, β) са екстремално разпределени спрямо кондензатора (E, F).*

Следствие 2. *Точките (α, β) са екстремални спрямо кондензатора (E, F), тогава и само тогава, когато за всяка функция $f \in \mathscr{H}(E)$ редицата от рационални функции $\{\pi^{\alpha,\beta}_{n,m}\}$ е максимално сходяща към f върху компактни подмножества на D.*

Глава 2

Диагонали на апроксимации на Паде

В тази глава е изведено интегралното уравнение на Натол, в случай че комплексната функция $\sigma(x)$ не се обръща в нула и изпълнява условията на Дини–Липшиц. С помощта на това уравнение е получен комплексния аналог на класически асимптотически формули на Бернщайн. за полиноми, ортогонални на единичната отсечка $\Delta = [-1, 1]$ спрямо комплексната функция на тегло $h(x) = \sigma(x)/\sqrt{1 - x^2}$.

2.1 Въведение

Интегралното уравнение на Натол е получено при по-слаби ограничения на изходната комплексната функция на тегло σ отколкото това е направено в оригиналната работа на Дж. Натол [41]. В [41] Натол е разгледал клас от функция на тегло, които удоволетворяват условията на Дини–Липшиц (вж Теорема 20, формула (2.27)). Чрез това, с помощта на уравнението на Натол (2.27), е направен пълен аналог на асимптотическата формула на Бернщайн, която важи на Δ и извън Δ, но вече за комплексна функция на тегло σ.

Получен е комплексния аналог на класическата асимптотическа формула на Бернщайн при тези условия за теглото, при които и оригиналните резултати. А именно, предполагаме че функцията на тегло h е комплексната на единичната отсечка $\Delta = [-1, 1]$ и такава, че съответстващата (в терминологията на Бернщайн) функция на тегло $\sigma(x) := h(x)\sqrt{1 - x^2}$ е различна от нула на Δ, $\sigma\colon \Delta \to$

$\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, и удоволетворява условието на Дини–Липшиц на $\Delta - \sigma \in \mathrm{DL}(\Delta)$, което е дефинирано в параграф 2.2. Резултатът е получен чрез метода на Натол, основан на сингулярното интегрално уравнение, доказателството не използва апроксимационния метод на Бернщайн–Сегьо (можем да отбележим, че интегралното уравнение на Натол няма никакво отношение към интегралното уравнение, използвано в метода на Бернщайн–Сегьо). Подчертаваме, че метода на Натол е доста перспективен, понеже в последно време е бил обобщен за полиноми, неермитово ортогонални на няколко реални интервала, за дъги, съставляващи компакта на Штал (вж [49], [5], [55]), за полиноми на Ермит–Паде (вж [40], [4]), както и за променливи (variable) функции на тегло (вж [3], [60]). С помощта на този метод е получена формула за следите в някои класове на оператора на Якоби с краен спектър [62], методът се е оказал полезен и при извеждането на формули за силната асимптотика на апроксимации на Паде, както и съответните им ортогонални полиноми в достатъчно широк клас от аналитически функции [49], [24], [6], [5].

Възможностите на метода на Натол не се изчерпват с горе споменатите.

Да напомним, че този метод е разработен от Дж. Натол [41] в 1990 г. за случая на един интервал. В [41] Натол е изследвал силната асимптотика на полиномите на Паде във връзка със задачата за силната асимптотика на съответстващата апроксимация на Паде.

В [41] Натол е разгледал случай, когато зададената на единичния интервал комплексна тригонометрична функция на тегло удоволетворява условието на Хьолдер. Сега разглеждаме по-общ случай, а именно, предполагаме че функцията на тегло удоволетворява условието на Дини–Липшиц (вж дефиниция 9). За случая на реална функция на тегло, при тези условия, С.Н. Бернщайн [59] е получил своите асимптотически формули за ортогонални полиноми. Сега ние разширяваме класическите формули на Бернщайн за случая на комплексна тригонометрична функция на тегло σ, която удоволетворява условието на Дини–Липшиц (вж [50], [36]). Подчертаваме, че доказателството е основано на сингулярното интегрално уравнение на Натол и не използва стандартната апроксимационна техника на Бернщайн–Сегьо (вж [1], [39]).

В настоящия раздел ние разглеждаме само случая за един интервал. Това е частен случай на метода на Натол, ние се ограничаваме поради следните причини. Добре известно е [51], [58], че понятието общи ортогонални полиноми е възникнало през 1885 г. в работата на П.Л. Чебишев [52], във връзка с свойствата на верижните J-дроби[1] за някои класове от аналитични функции. Тези полиноми са възникнали естествено като знаменатели Q_n на n-тата подходяща верижна дроб $J_n = P_n/Q_n$, която съответства на верижната J-дроб.В монографията на Г. Сегьо [51, глава II, параграф 2.2] този факт е отбелязан чрез: "Ние наричаме $p_n(x)$ ортогонални полиноми ... Понякога ги наричат полиноми на Чебишев. Ние ще запазим това означение за специалния случай (1.12.3)."[2] По-нататък теорията за ортогоналните полиноми е започнала да се развива като напълно самостоятелно направление е анализа, практически не свързани с верижните дроби. В основата на тази теория е залегнало самото свойство за ортогоналност:[3]

$$\int Q_n(x)x^k h(x)\,dx = 0, \qquad k = 0,\dots,n-1. \tag{2.3}$$

Най-общите асимптотически формули за такива полиноми са били получени през 1930-те години от С.Н. Бернщайн и Г. Сегьо (вж [51, глава XII]) именно чрез това свойство. Друг подход се състои в това, че в основата на разсъжденията лежи еквивалентно свойство на ортогоналността, а именно, максимално пресичане на подходяща верижна дроб J_n в точката $z = \infty$ и изходната функция, зададена чрез ред на Лоран. Най-естествено този подход се дефинира чрез апроксимации на Паде, по начина по-който е направено това от Натол [41] (ср. [46]).

2.2 Основни дефиниции

Нека на единичната отсечка $\Delta = [-1,1]$ е зададено тегло h, т.е. $h \in L^1(\Delta)$, $h > 0$ почти навсякъде на Δ. При това условие са еднозначно (с точност до нормировка) определени полиноми Q_n,

[1] В някои източници (вж [58]) тези верижни дроби се наричат чебишевски верижни дроби.

[2] Традицията общите ортогонални полиноми да се наричат полиноми на Чебишев е останала дълго време. Чак през 1920-те години В.А. Стеклов [48] е назовал полиномите на Чебишев като полиноми, ортогонални спрямо обобщената функция на тегло на Якоби $(1+x)^\alpha(1-x)^\beta q(x)$, $\alpha, \beta > -1$.

[3] По-точно, еквивалентното условие на (2.3) е свойството на минималност на L^2_h-нормата на ортогоналния полином със старши коефициент единица $Q_n(x) = x^n + \cdots$ сред всички полиноми $q(x) = x^n + \cdots \in \mathbb{R}_n[x]$.

$n \in \mathbb{N}$, $\deg Q_n = n$, ортогонални спрямо теглото h:

$$\int_\Delta Q_n(x)x^k h(x)\,dx = 0, \quad k = 0, \dots, n-1. \tag{2.4}$$

Полиномите P_n, $\deg P_n = n-1$,

$$P_n(z) := \int_\Delta \frac{Q_n(z) - Q_n(x)}{z-x} h(x)\,dx \tag{2.5}$$

се наричат полиноми от втори род, функцията

$$R_n(z) := \int_\Delta \frac{Q_n(x)}{z-x} h(x)\,dx \tag{2.6}$$

се нарича функция от втори род. От (2.4)–(2.6) веднага следва, че функциите Q_n, P_n, R_n са свързани чрез

$$R_n(z) = Q_n(z)\widehat{h}(z) - P_n(z), \tag{2.7}$$

където

$$\widehat{h}(z) := \int_\Delta \frac{h(x)\,dx}{z-x} \tag{2.8}$$

е функция на Марков (вж [52], [22], [61], [23], [24]). Поради това че отношението

$$\frac{Q_n(z) - Q_n(x)}{z-x}$$

е полином от степен $n-1$ по променливата x (т.е., ортогонални полиноми $Q_n(x)$), от (2.6) получаваме:

$$\begin{aligned} R_n(z) &= \int_\Delta \frac{Q_n(x)}{z-x} h(x)\,dx = \frac{1}{Q_n(z)} \int_\Delta \frac{Q_n(x)Q_n(z)}{z-x} h(x)\,dx \\ &= \frac{1}{Q_n(z)} \int_\Delta \frac{Q_n(x)(Q_n(z) - Q_n(x) + Q_n(x))}{z-x} h(x)\,dx \\ &= \frac{1}{Q_n(z)} \int_\Delta \frac{Q_n^2(x)}{z-x} h(x)\,dx. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Следователно, за функцията от втори род е изпълнено съотношението:

$$R_n(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \qquad z \to \infty. \tag{2.10}$$

От (2.10) следва, че рационалната функция P_n/Q_n е диагонална апроксимация на Паде $[n/n]_{\widehat{h}}$ на функцията на Марков $\widehat{h}$, т.е. за $[n/n]_{\widehat{h}} = P_n/Q_n$ е изпълнени характеристичното (в класа на всички рационални функции $\mathscr{R}_n := \mathbb{C}_n(z)$ от ред $\leq n$) съотношение:

$$(\widehat{h} - [n/n]_{\widehat{h}})(z) = \frac{1}{Q_n^2(z)} \int_\Delta \frac{Q_n^2(x)}{z-x} h(x)\, dx = O\left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right), \qquad z \to \infty. \tag{2.11}$$

Класическите резултати на С.Н. Бернщайн [59] (вж още [51, гл. XII]) за асимптотиката на ортогоналните полиноми е формулирана и доказана за случая на интервала $\Delta = [-1, 1]$ и реална функция на тегло от вида:

$$h(x) := \frac{1}{\pi} \frac{\sigma(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{2.12}$$

където σ – реална непрекъсната и положителна на Δ функция, която удоволетворява условието на Дини–Липшиц. Прието е функцията σ да се нарича тригонометрична функция на тегло; по-нататък ще наричаме функцията σ просто тегло, като допускаме че σ може да е комплексна функция.

Дефиниция 9 (Условие на Дини–Липшиц)**.** Казваме, че зададената на интервала Δ функция σ удоволетворява условието на Дини–Липшиц (и пишем $\sigma \in \mathrm{DL}(\Delta)$) с някакви константи $C > 0$ и $\gamma > 1$, ако за всички $x, y \in \Delta$ е изпълнено неравенството

$$|\sigma(x) - \sigma(y)| \leq C \big|\log|x-y|\big|^{-\gamma}. \tag{2.13}$$

Следната теорема е в сила:

Теорема 19 (Теорема на Бернщайн (см. [59], [51]))**.** *Нека σ е положителна функция на Δ, нека да удоволетворява условието на Дини–Липшиц на Δ. Тогава, за полиномите Q_n, ортогонални на Δ с тегло* (2.12) *и нормирани чрез условието*[4] $\|Q_n^2\|_{L^2_h} = 2$ *при $n \to \infty$, важат следните асимптотически формули на Бернщайн:*

$$Q_n(z) = D(z;\sigma)\Phi(z)^n(1 + o(1)), \qquad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta, \tag{2.14}$$

$$Q_n(x) = \frac{2}{\sqrt{\sigma(x)}} \cos(n \arccos x + \theta(x;\sigma)) + o(1), \qquad x \in \Delta. \tag{2.15}$$

[4] Такава нормировка е удобна за прилагане на метода на Натол, и е свързана със съотношението (2.27), което се явява ключово при използването на този метод.

В ([2.14](#))–([2.15](#)) $o(1) = O((\log n)^{1-\gamma})$,

$$D(z;\sigma) := \exp\left\{\frac{\sqrt{z^2-1}}{2\pi}\int_\Delta \frac{\log\sigma(x)}{x-z}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right\} \tag{2.16}$$

е функцията[5] *на Сегьо,*

$$\theta(x;\sigma) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{2\pi}\int_\Delta \frac{\log\sigma(x)-\log\sigma(y)}{x-y}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

е фазова функция, $\Phi(z) = z + \sqrt{z^2-1}$ *е обратната функция на Жуковски,* $z = (\zeta + 1/\zeta)/2$, $|\zeta| > 1$, $\Phi(\infty) = \infty$, $\zeta = \Phi(z)$.

Съотношение (2.14) важи в (т.е. върху компактни подмножества на) областта $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta$, съотношение (2.15) важи равномерно на Δ. Случаят $\sigma \equiv 1$ в (2.12) съответства на функцията $D(z;\sigma) \equiv 1$ и класическите полиноми на Чебишев от първи род $T_n(z) = \zeta^n + \zeta^{-n}$.

2.3 Формулировка и доказателство на основните резултати

В този параграф са доказани асимптотическите формули на Бернщайн (2.14), (2.15) чрез метода на Натол за комплексна тригонометрична функция на тегло σ, която не се обръща в нула и удоволетворява условието на Дини–Липшиц (2.13).

Основните резултати са теореми 20 и 21.

Нека функцията g е зададена на единичната окръжност $\Gamma : |t| = 1$, g не се обръща в нула, $g(t) \neq 0$, и удоволетворява условието на Дини–Липшиц ($g \in \mathrm{DL}(\Gamma)$) с някакви константи $C > 0$ и $\lambda > 1$:

$$|g(t) - g(t')| \leq C\left(\log\frac{1}{|t-t'|}\right)^{-\lambda}, \qquad \lambda > 1, \quad t, t' \in \Gamma. \tag{2.26}$$

Нататък, чрез C и λ се обозначават константите от (2.26), чрез M, M' – константи, зависещи само от функцията f (вж. формулировката на Лема 1 и 2), чрез $c_1, c_2, \ldots, c_1', c_2', \ldots$ – някакви абсолютни константи, чиято стойност не е от значение.

[5] Класическата функция на Сегьо за тегло σ е равна на $1/D(z;\sigma)$, но тук е по-удачно да използваме именно $D(z;\sigma)$.

Въвеждаме следните означения:

$$\Gamma_r : |z| = r, \quad U_r : |z| < r, \quad r > 0, \quad \Gamma = \Gamma_1, \quad U = U_1,$$

$$K_R : 1 < |z| < R, \quad \overline{K}_R : 1 \leq |z| \leq R, \quad R > 1.$$

Важат следните твърдения:

Лема 1. *Нека функцията $g \in \mathrm{DL}(\Gamma)$ с константи $C > 0$ и $\lambda > 1$, нека функцията f е холоморфна в пръстена $1 < |z| < R$ и непрекъсната в $1 \leq |z| \leq R$ с някакво $R > 1$. Полагаме*

$$F(z) := \int_{|t|=1} \frac{f(t)g(t)}{t-z}\, dt, \qquad |z| < 1.$$

Тогава имаме:

1) функцията $F(z)$ е равномерно ограничена при $|z| < 1$, за всяка точка $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$ съществува границата по лъча:

$$\lim_{r \to 1-0} F(re^{i\theta}) =: F(e^{i\theta});$$

2) важи оценката:

$$\max_{|t|=1} |F(t)| \leq c_1 C M,$$

където $M = \max\limits_{1 \leq |z| \leq R} |f(z)|$;

3) функцията F е непрекъсната на Γ и удовлетворява условието на Дини–Липшиц с константи $c_2 C M$ и $\mu = \lambda - 1$.

Лема 2. *Нека $g \in \mathrm{DL}(\Gamma)$ с константи $C > 0$ и $\lambda > 1$, нека функцията f е холоморфна в пръстена $1 < |z| < R$, непрекъсната в $1 \leq |z| \leq R$, $R > 1$, и $f \in \mathrm{DL}(\Gamma)$ с константи M' и $\mu = \lambda - 1 > 0$. Тогава за функцията*

$$F_n(z) := \int_{|t|=1} \frac{f(t)g(t)\, dt}{t^{2n}(t-z)}, \quad |z| < 1, \quad n \in \mathbb{N},$$

имаме:

1) за всички $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$ съществува

$$\lim_{r \to 1-0} F_n(r\zeta) =: F_n(\zeta);$$

2) функцията $F_n \in \mathrm{DL}(\Gamma)$ *с константи* $c_3 CM$ *и* $\mu = \lambda - 1$, *где* $M = \max\limits_{1 \le |z| \le R} |f(z)|$;

3) важи неравенството:

$$\max_{|z| \le 1} |F_n(z)| \le c_3 C(M + M')(\log n)^{-\mu}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 20. *Нека функцията* $F_n \not\equiv 0$, $n \in \mathbb{N}$, *е холоморфна в кръга* $|z| < 1$, *непрекъсната в затворения кръг* $|z| \le 1$ *и удоволетворява:*

$$F_n(z) = \int_{|t|=1} \frac{F_n(1/t) g(t)}{t^{2n}(t - z)} dt + C_n, \qquad |z| < 1, \tag{2.27}$$

където функцията $g \in \mathrm{DL}(\Gamma)$ *с константи* $C > 0$ *и* $\lambda > 1$, C_n *е някаква константа. Тогава равномерно по* $|z| \le 1$ *имаме*

$$F_n(z) = C_n(1 + o(1)), \qquad n \to \infty, \tag{2.28}$$

където $o(1) = O\big((\log n)^{-\mu}\big)$, $\mu = \lambda - 1$.

Нека $w = w(z) = (z^2 - 1)^{1/2}$, като сме избрали такъв клон на многозначната функция $(\cdot)^{1/2}$ при $z \in D := \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$, че

$$w(z) = (z^2 - 1)^{1/2} \sim z \quad \text{при} \quad z \to \infty. \tag{2.32}$$

От (2.32) следва, че $w(z) > 0$ при $z > 0$ и $w^+(x) = i\sqrt{1 - x^2}$ при $x \in (-1, 1)$, като под $w^+(x)$, $x \in (-1, 1)$, се разбира граничната стойност на функцията $w(z)$, $z \in D$, от горната полуравнина:

$$w^+(x) := w(x + i \cdot 0) := \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} w(x + i\varepsilon), \quad x \in (-1, 1), \tag{2.33}$$

и $\sqrt{1 - x^2} > 0$, $x \in (-1, 1)$ (под функциията $\sqrt{a^2} = a$, $a > 0$, ние разбираме положителната аритметична стойност на квадратния корен).

Нека функцията f е зададена чрез:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^{1} \frac{\sigma(x)}{w^+(x)} \frac{dx}{x - z}, \quad z \notin \Delta := [-1, 1], \tag{2.34}$$

където комплексната тригонометрична функция на тегло $\sigma(x) \ne 0$ не се обръща в нула и удоволетворява условието на Дини–Липшиц

$\sigma \in \mathrm{DL}(\Delta)$, с някакви константи $C > 0$ и $\lambda > 1$, т.е. $\sigma\colon \Delta \to \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Нека $\mathfrak{R}_2$ е Риманова повърхнина с род нула, зададена чрез $w^2 = z^2 - 1$. Предполагаме, че Римановата повърхнина $\mathfrak{R}_2$ е на вид като двулистно покритие на Римановата сфера $\overline{\mathbb{C}}$ с точки на разклонение $z = \pm 1$ от втори род. Римановата повърхност $\mathfrak{R}_2$ може да бъде параметризирана по следния начин:

$$z = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right), \quad w = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} - t\right), \quad t \in \overline{\mathbb{C}}. \tag{2.35}$$

Първият лист $\mathfrak{R}^{(1)}$ на $\mathfrak{R}_2$ се задава чрез (2.35) за $|t| < 1$, при това $z^{(1)} = \infty^{(1)}$ при $t = \infty$. Вторият лист $\mathfrak{R}^{(2)}$ се задава чрез (2.35) за $|t| > 1$ и съответно $z^{(2)} = \infty^{(2)}$ при $t = 0$.

Въвеждаме функцията $F(t) := wf(z)$ при $|t| < 1$. Функцията $F(t)$, $|t| < 1$, има гранична стойност $F^+(\tau)$ на единичния кръг $\Gamma := \{\tau : |\tau| = 1\}$, когато t клони към $\tau \in \Gamma$ от вътрешната страна на единичния кръг $\mathbb{D} := \{t \in \mathbb{C} : |t| < 1\}$. Също така, дефинираме функцията:

$$\Sigma(\tau) := F^+(\tau) + F^+(1/\tau) = F(\tau) + F(1/\tau), \quad |\tau| = 1. \tag{2.36}$$

Прилагаме формулата на Сохоцки–Племелкъм функцията f, която е зададена чрез (2.34), получаваме:

$$f^{\pm}(x) = \pm\frac{1}{2}\frac{\sigma(x)}{w^+(x)} + \frac{i}{2}H_f(x), \quad x \in (-1, 1), \tag{2.37}$$

където

$$H_f(x) := \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\sigma(x')}{w^+(x')}\frac{dx'}{x - x'}, \quad x \in \Delta,$$

е преобразованието на Хилбертза функцията σ/w^+. От (2.37) чрез граничен преход при $\mathbb{D} \ni t \to t_0 \in \Gamma$ от вътрешната страна на единичния кръг $\mathbb{D} := \{t \in \mathbb{C} : |t| < 1\}$ следва:

$$\begin{aligned} F(t) = wf(z) \to F^{\pm}(t_0) : &= w^{\pm}(x_0)\left\{\pm\frac{1}{2}\frac{\sigma(x_0)}{w^+(x_0)} + \frac{i}{2}H_f(x_0)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\sigma(x_0) \pm \frac{iw^+(x_0)}{2}H_f(x_0), \quad x_0 \in (-1, 1). \end{aligned} \tag{2.38}$$

От (2.38) за функцията $\Sigma(t)$, $t \in \Gamma$, която е определена чрез (2.36), получаваме равенството:

$$\Sigma(t) := F^{+}(t)+F^{+}(1/t) = \sigma\left(\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right) = \sigma(x) = \sigma(\cos\theta), \quad t = e^{i\theta} \in \Gamma. \tag{2.39}$$

От равенство (2.39) следва, че функцията Σ удовлетворява условието на Дини–Липшиц на окръжността Γ, $\Sigma \in \mathrm{DL}(\Gamma)$, със същите константи $C > 0$ и $\lambda > 1$, с които и изходната функция σ.

Въвеждаме полиноми на Паде на функция f за произволно фиксирано $n \in \mathbb{N}$ и $j = 1,2$ по следния начин. Полиномите на Паде $P_{n,j} = P_{n,j}(z; f) \in \mathbb{C}_n[z]$, $P_{n,2} \not\equiv 0$, на функцията f се определят от следното съотношение:

$$R_n(z) := (P_{n,1} + P_{n,2}f)(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \quad z \to \infty. \tag{2.40}$$

Функцията R_n се нарича функция на остатъка; двойката полиноми $P_{n,1}$ и $P_{n,2}$, $P_{n,j} \in \mathbb{C}_n[z]$ се определят нееднозначно, но рационалната функция $[n/n]_f := -P_{n,1}/P_{n,2}$ е еднозначно определена и се нарича диагонална апроксимация на Паде от ред n.

Въвеждаме две нови функции:

$$\begin{aligned} \Pi_2(t) &:= \exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{|u|=1}\frac{\log\Sigma(u)\,du}{u-t}\right\}, \quad |t| > 1, \\ \Pi_1(t) &:= -f(z)\Pi_2(t), \quad |t| > 1. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Един от основните резултати в този раздел се явява следната теорема (която е комплексния вариант на класическата теорема на Бернщайн ср. [50]):

Теорема 21. *Нека функцията на тегло $\sigma(x)$ удовлетворява условията на Дини–Липшиц на интервала Δ с някакви константи $C > 0$ и $\lambda > 1$. Тогава полиномите на Паде $P_{n,j}(z; f)$, $j = 1,2$ на функцията f, зададена чрез (2.34), са еднозначно определени (с точност до нормировка) за всички достатъчно големи n. При подходяща нормировка на полиномите $P_{n,j}$, $j = 1,2$ за произволно $\delta > 0$ важат следните формули за равномерна асимптотика:*

$$P_{n,j}(z) = t^n\Pi_j(t)(1 + o(1)), \quad |t| > 1 + \delta, \quad n \to \infty, \tag{2.42}$$

$$P_{n,j}(z) = t^n\Pi_j(t) + t^{-n}\Pi_j(t^{-1})1 + o(1), \quad |t| = 1, \quad n \to \infty, \tag{2.43}$$

където $o(1) = O((\log n)^{1-\lambda})$ при $n \to \infty$.

Глава 3

Алгоритми за изчисление на апроксимации на Паде

В тази глава излагаме алгоритмите за изчисление на класическа апроксимация на Паде на $f(z)$, класическа апроксимация на Ермит–Паде за набора от три функции $[1, f, g]$, двуточкова апроксимация на Паде на функция $f(z)$ или на две функции $f(z)$ и $g(z)$, многоточкова апроксимация на Паде на $f(z)$.

След това даваме изходният код на алгоритмите, който е написан за програмата `PARI/GP`.

3.1 Апроксимация на Паде на $f(z)$

Нека имаме дадена функция $f(z)$ и нейното разлагане в ред на Тейлор е:

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j.$$

Нека двата полинома $P_{n,m} \in \Pi_n$, $Q_{n,m} \in \Pi_m$ нямат общ множител, $Q_{n,m} \neq 0$, и изпълняват условието:

$$Q_{n,m}(z) f(z) - P_{n,m}(z) = \mathcal{O}\left(z^{n+m+1}\right).$$

Полагаме

$$\pi_{n,m}(z) = \frac{P_{n,m}(z)}{Q_{n,m}(z)} = \frac{p_n z^n + p_{n-1} z^{n-1} + \ldots + p_0}{q_m z^m + q_{m-1} z^{m-1} + \ldots + q_0}$$

за апроксимацията на Паде на $f(z)$. Следователно, имаме че:

$$(q_m z^m + q_{m-1} z^{m-1} + \ldots + q_0)(c_0 + c_1 z + \ldots + c_{n+m} z^{n+m}) - \\ -(p_n z^n + p_{n-1} z^{n-1} + \ldots + p_0) = \mathcal{O}\left(z^{n+m+1}\right).$$

Нека да дадем пример за диагонална апроксимация на Паде чрез $n = m = 3$. Тогава:

$$(q_3 z^3 + q_2 z^2 + q_1 z + q_0)(c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + c_5 z^5 + c_6 z^6) - \\ -(p_3 z^3 + p_2 z^2 + p_1 z + p_0) = \mathcal{O}\left(z^7\right).$$

Сравняваме степените от двете страни, получаваме:

$$\begin{aligned}
z^0 &: q_0 c_0 - p_0 = 0 \\
z^1 &: q_1 c_0 + q_0 c_1 - p_1 = 0 \\
z^2 &: q_2 c_0 + q_1 c_1 + q_0 c_2 - p_2 = 0 \\
z^3 &: q_3 c_0 + q_2 c_1 + q_1 c_2 + q_0 c_3 - p_3 = 0 \\
z^4 &: q_3 c_1 + q_2 c_2 + q_1 c_3 + q_0 c_4 = 0 \\
z^5 &: q_3 c_2 + q_2 c_3 + q_1 c_4 + q_0 c_5 = 0 \\
z^6 &: q_3 c_3 + q_2 c_4 + q_1 c_5 + q_0 c_6 = 0
\end{aligned}$$

Първите четири уравнения са достатъчни за изчисляване коефициентите на полинома $P_{n,m}$. Последните три уравнения имат четири неизвестни променливи. Полагаме $q_0 = 1$, и записваме коефициентите на уравненията в матрица:

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ c_3 & c_4 & c_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_3 \\ q_2 \\ q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_4 \\ -c_5 \\ -c_6 \end{pmatrix}.$$

Решаваме матричното уравнение и получаваме коефициентите на полинома $Q_{n,m}$. Сега изчисляваме коефициентите на $P_{n,m}$ чрез следната формула:

$$p_n = c_n + \sum_{j=1}^{\min(n,m)} q_j \, c_{n-j}$$

или чрез тази формула, понеже имаме $q_0 = 1$,

$$p_n = \sum_{j=0}^{\min(n,m)} q_j \, c_{n-j}.$$

Нека сега да дадем пример за не-диагонална апроксимация на Паде, като $n = 5$ и $m = 3$. Имаме:

$$
\begin{aligned}
&(q_3 z^3 + q_2 z^2 + q_1 z + q_0)\times \\
&\times (c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + c_5 z^5 + c_6 z^6 + c_7 z^7 + c_8 z^8)- \\
&- (p_5 z^5 + p_4 z^4 + p_3 z^3 + p_2 z^2 + p_1 z + p_0) = \mathcal{O}\left(z^9\right).
\end{aligned}
$$

Отново сравняваме степените от двете страни:

$$
\begin{aligned}
&z^0 : q_0 c_0 - p_0 = 0 \\
&z^1 : q_1 c_0 + q_0 c_1 - p_1 = 0 \\
&z^2 : q_2 c_0 + q_1 c_1 + q_0 c_2 - p_2 = 0 \\
&z^3 : q_3 c_0 + q_2 c_1 + q_1 c_2 + q_0 c_3 - p_3 = 0 \\
&z^4 : q_3 c_1 + q_2 c_2 + q_1 c_3 + q_0 c_4 - p_4 = 0 \\
&z^5 : q_3 c_2 + q_2 c_3 + q_1 c_4 + q_0 c_5 - p_5 = 0 \\
&z^6 : q_3 c_3 + q_2 c_4 + q_1 c_5 + q_0 c_6 = 0 \\
&z^7 : q_3 c_4 + q_2 c_5 + q_1 c_6 + q_0 c_7 = 0 \\
&z^8 : q_3 c_5 + q_2 c_6 + q_1 c_7 + q_0 c_8 = 0
\end{aligned}
$$

Както и преди, първите пет уравнения дават коефициентите на $P_{n,m}$. Отново полагаме $q_0 = 1$, и записваме коефициентите на последните три уравнения в матрица:

$$
\left(\begin{array}{ccc} c_3 & c_4 & c_5 \\ c_4 & c_5 & c_6 \\ c_5 & c_6 & c_7 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} q_3 \\ q_2 \\ q_1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} -c_6 \\ -c_7 \\ -c_8 \end{array}\right).
$$

Забелязваме, че коефициентите на матрицата са променени, спрямо диагоналния случай. Решаваме матричното уравнения и получаваме коефициентите на $Q_{n,m}$. Формулата за изчисляване коефициентите на $P_{n,m}$ сега е следната:

$$
p_n = \sum_{j=0}^{\min(n,m)} q_j \, c_{n-j}.
$$

Нека да отбележим, че първите четири коефициента, p_0, p_1, p_2, p_3, се изчисляват по същия начин като при диагоналния случай. За последните два коефициента прилагаме формулата $\min(n, m)$ – сумата за тези два коефициента е от 0 до 3.

Приноси

I. Научни приноси

Изследване на равномерното разпределение на точките на интерполация, свързани с многоточкова апроксимация на Паде. Разглеждане на аналогичен случай за равнинен кондензатор, тогава имаме два набора от точки, които са свързани с обобщена апроксимация на Паде.

Изследване на класическата теорема на Бернщайн с реална функция на тегло, и разширяването на теоремата при разглеждане на комплексна функция на тегло.

II. Научно-приложни приноси

Реалнизиране на алгоритми за изчисление на класически апроксимации на Паде, апроксимации на Ермит–Паде за набора от три функции $[1, f, g]$, като се използва компютърната алгебра `PARI/GP`.

Алгоритъмът за класическа апроксимация на Паде беше отправната точка, понеже същата може да се представи като апроксимация на Ермит–Паде за набора от две функции $[-1, f]$, и тогава лесно се разширява до набора от три функции $[1, f, g]$.

III. Приложни приноси

Съществуваше софтуер за изчисление на класически апроксимации на Паде, като Maple, Mathematica, и др., но не намерихме работещ софтуер за изчисление на класически апроксимации на Ермит–Паде.

През септември 2012 започнахме да работим по тази задача, и през декември 2013 вече имахме собствен софтуер за изчисление на нулите на Ермит–Паде полиноми от първи тип за набора от три функции $[1, f, g]$, като полиномите имат степен n (еквивалента на диагонална апроксимация на Паде).

Като използвахме този софтуер, представихме нашите хипотези относно асимптотиката на апроксимациите на Ермит–Паде в две статии, публикувани в arXiv през 2015 година, [29], [30].

Реализирахме алгоритмите чрез компютърната алгебра `PARI/GP`, за изчислението на нулите на полиномите на апроксимациите, и `gnuplot` за плотиране на тези точки върху комплексната равнина. Тези програми се използват и от Maple, SageMath, и др.

Библиография

[1] Akhiezer, N. I., “Orthogonal polynomials on several intervals”, Soviet Math. Dokl., 1 (1960), 989–992.

[2] Aptekarev, A.I., “Sharp constants for rational approximations of analytic functions”, Mat. Sb., 193:1 (2002), 3–72; Sb. Math., 193:1 (2002), 1–72.

[3] Aptekarev, A.I., W. Van Assche, “Scalar and matrix Riemann–Hilbert approach to the strong asymptotics of Pade approximants and complex orthogonal polynomials with varying weight”, J. Approx. Theory, 129:2 (2004), 129–166.

[4] Aptekarev, Alexander I.; Kuijlaars, Arno B. J.; Van Assche, Walter, “Asymptotics of Hermite-Padé rational approximants for two analytic functions with separated pairs of branch points (case of genus 0)”, Art. ID rpm007, Int. Math. Res. Pap. IMRP, 2007, №4, 128 pp.

[5] Aptekarev, Alexander I., Maxim L. Yattselev, Padé approximants for functions with branch points – strong asymptotics of Nuttall–Stahl polynomials, http://arxiv.org/abs/1109.0332, 2011, 45 pp.

[6] Aptekarev, A. I., V. I. Buslaev, A. Martinez-Finkelshtein, S. P. Suetin, “Padé approximants, continued fractions, and orthogonal polynomials”, Uspekhi Mat. Nauk, 66:6(402) (2011), 37–122; Russian Math. Surveys, 66:6 (2011), 1049–1131.

[7] Bagby, T. *The Modulus of a Plane Condenser*, J. Math. Mech. **17**:4 (1967), 315–329.

[8] Bagby, T. *On interpolation by rational functions*, Duke Math. J. **36**:1 (1969), 95–104.

[9] Baker, Jr., George A., Graves-Morris, Peter *Padé approximants*, Addison-Wesley Publishing Co. Massachusetts, Volume **I**, 1981.

[10] Baker, Jr., George A., Graves-Morris, Peter *Padé approximants*, Addison-Wesley Publishing Co. Massachusetts, Volume **II**, 1981.

[11] Bernstein, S. N., *On polynomials, orthogonal on a finite interval*, Kharkov, Ukraine, 1937.

[12] Blatt, H.-P., Kovacheva, R. K., Grothmann, R. Poles and alternation points in real rational Chebyshev approximation, *Comput. Methods Funct. Theory* **3**, No. 1–2, 165–177 (2003).

[13] Blatt, H.-P., Kovacheva, R. K. *Growth Behavior and Zero Distribution of Rational Approximants*, Constr. Approx. **34** (2011), 393–420.

[14] Blatt, H.-P., Kovacheva, R. K. *Distribution of Interpolation Points of Maximally Convergent Multipoint Padé Approximants*, J. Approx. Theory **191** (2015), 46–57.

[15] Buslaev, V. I., Martínez-Finkelshtein, A., Suetin, S. P. Method of Interior Variations and Existence of S-Compact Sets, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics* **279**, 2012, pp. 25–51.

[16] De Montessus De Ballore, M. R. *Sur les fractions continues algébriques*, Bull. Soc. Math. France **20** (1902), 28–36.

[17] Díaz-Mendoza, C., González-Vera, P., Jiménez Paiz, M., Orive, R. On certain symmetric strong distributions, two-point Padé approximation and related quadratures, *Applied Numerical Mathematics* **59**, 2009.

[18] Dumas, S., Sur le d'eveloppement des fonctions elliptiques en fractions continues, These, Zürich, 1908, 59.

[19] Gonchar, A. A. *Zolotarev problems connected with rational functions*, Math. USSR Sbornik **7**:4 (1969), 623–635.

[20] Gonchar, A. A. *On a theorem of Saff*, Math. USSR Sbornik **23**:1 (1974), 149–154.

[21] Gonchar, A. A. *On the convergence of generalized Padé approximants of meromorphic functions*, Math. USSR Sbornik **27**:4 (1975), 503–514.

[22] Goncar, A. A., “On convergence of Padé approximants for some classes of meromorphic functions”, Math. USSR-Sb., 26:4 (1975), 555–575.

[23] Gonchar, A. A., “Rational approximation of analytic functions”, Proc. Steklov Inst. Math., 272, suppl. 2 (2011), 44–57.

[24] Gonchar, A.A., Suetin, S.P., “On Padé approximants of Markov-type meromorphic functions”, Proc. Steklov Inst. Math., 272, suppl. 2 (2011), 58–95.

[25] Gonchar, A. A., Suetin, S. P. *On Padé Approximants of Meromorphic Functions of Markov Type*, Sovrem. Probl. Mat. **5**, Steklov Math. Inst., RAS, Moscow, 2004, 68 pp.

[26] Gonzalez, A. N electrons in a quantum dot: Two-point Padé approximants, *Journal of Phys.: Cond. Matter* **9**:22, 1997, 4643–4657, http://arxiv.org/abs/cond-mat/9611141v1

[27] Grothmann, R. *Distribution of interpolation points*, Ark. Mat. **34** (1996), 103–117.

[28] Ikonomov, N.: “Multipoint Padé approximants and uniform distribution of points of interpolation”, *Compt. rend. Acad. bulg. Sci.* **66**:8 (2013), 1097–1104.

[29] Ikonomov, N. R., Kovacheva, R. K., Suetin, S. P. *Some numerical results on the behavior of zeros of the Hermite-Padé polynomials*, 2015, 95 pp, arXiv:1501.07090.

[30] Ikonomov, N. R., Kovacheva, R. K., Suetin, S. P. *On the limit zero distribution of type I Hermite–Padé polynomials*, 2015, 67 pp, arXiv:1506.08031.

[31] Ivanova, L. I. Interpolation by rational functions and uniform distribution of points, *Compt. rend. Acad. bulg. Sci.* **57**:7 (2004), 17–22.

[32] Kovacheva, R. K. *Generalized Padé approximants and meromorphic continuation of functions*, Math. USSR Sbornik **37**:3 (1980), 337–348.

[33] Kovacheva, R. K. On the behavior of Chebyshev rational approximants with a fixed number of poles, *Mathematica Balkanika*, **3**, 1989, 244–256.

[34] R. K. Kovacheva, Generalized Padé approximants of Kakehashi's type and meromorphic continuation of functions, *Deformation of Mathematical Structures*, Kluwer Academic Publishers, 151–159 (1989).

[35] Landkof, N. S. *Foundations of modern potential theory*, Nauka, Moscow, 1966, English translation in Springer, Verlag, 1972.

[36] Magnus, A.P., "Toeplitz matrix techniques and convergence of complex weight Padé approximants", J. of Comput. and Appl. Math., 19:1 (1987), 23–38.

[37] Markov, A. A. "Deux démonstrations de la convergence de certaines fractions continues", *Acta Math.* **19** (1895), 93–104.

[38] Nuttall, J. "Asymptotics of diagonal Hermite–Padé polynomials", *J. Approx.Theory*, **42** (1984), 299–386.

[39] Nuttall, J., R. S. Singh, "Orthogonal polynomials and Padé approximants associated with a system of arcs", J. Approx. Theory, 21 (1977), 1–42.

[40] Nuttall, J., G. M. Trojan, "Asymptotics of Hermite–Padé polynomials for a set of functions with different branch points", Constr. Approx., 3:1 (1987), 13–29.

[41] Nuttall, J., "Padé polynomial asymptotics from a singular integral equation", Constr. Approx., 6:2 (1990), 157–166.

[42] Perron, O. *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, Bd. II, Teubner, Stuttgart, 1957.

[43] Ransford, T. *Potential Theory in the Complex Plane*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[44] Saff, E. B. *An extension of Montessus de Ballore's theorem on the convergence of interpolation rational functions*, J. Approx. Theory **6** (1972), 63–67.

[45] Springer, G., Introduction to Riemann surfaces, Addison-Wesley, Reading, MA, 1957, viii+307.

[46] Stahl, H., “Three different approaches to a proof of convergence for Pade approximants”, Rational approximation and applications in mathematics and physics, Lancut, 1985, Lecture Notes in Math., 1237, Springer, Berlin, 1987, 79–124.

[47] Stahl, H., “Diagonal Padé approximants to hyperelliptic functions”, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6), 1996, Special Issue, 121–193.

[48] Stekloff, W.(V. Steklov), “Sur le d’eveloppement des fonctions continues en series de polynomes de Tchebychef”, Извъстія Российской Академіи Наукъ. VI серія, 15 (1921), 249–266.

[49] Suetin, S.P., “Uniform convergence of Padé diagonal approximants for hyperelliptic functions”, Sb. Math., 191:9 (2000), 1339–1373.

[50] Suetin, S.P., “Strong asymptotics of polynomials orthogonal with respect to a complex weight”, Sb. Math., 200:1 (2009), 77–93.

[51] Szegö, G., Orthogonal polynomials, xiii+432 pp, Colloquium Publications, XXIII, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1975.

[52] Tchebycheff, P., “Sur les fractions continues”, Journ. de Math. Pures et Appl. Ser. 2, 3 (1858), 289–323.

[53] Tricks of the Trade – Generalized Padé Approximation, by Paul Abbott, *The Mathematica Journal* **9**:4, 2005, http://www.mathematica-journal.com/issue/v9i4/contents/Tricks9-4/Tricks9-4_5.html

[54] Tsuji, M. *Potential theory in modern function theory*, Chelsea, New York, Second Edition, 1975.

[55] Yattselev, M.L., “Nuttall’s theorem with analytic weights on algebraic S-contours”, J. Approximation Theory, 190 (2015), 73–90.

[56] Walsh, J. L. *Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. **20**, Third Edition, 1960.

[57] Zygmund, A., Trigonometric series, 2nd ed., Vols. I, II, Cambridge University Press, New York, 1959, Vol. I. xii+383 pp.; Vol. II. vii+354 pp..

[58] Ахиезер, Н. И., “Чебышёвское направление в теории аппроксимаций”, Математика XIX века, Вып. 3, ред. А. Н. Колмогоров, А. П. Юшкевич, Наука, М., 1987, 9–79.

[59] Бернштейн, С. Н., О многочленах, ортогональных в конечном интервале, ОНТИ, Харьков, 1937.

[60] Комлов, А. В., С. П. Суетин, “Асимптотическая формула для полиномов, орто- нормированных относительно переменного веса. II”, Матем. сб., 205:9 (2014), 121–144.

[61] Никишин, Е. М., В. Н. Сорокин, Рациональные аппроксимации и ортогональ- ность, Наука, М., 1988, 256 стр.

[62] Суетин, С. П., “Сравнительная асимптотика решений и формулы следов для неко- торого класса разностных уравнений”, Совр. пробл. матем., 6, МИАН, М., 2006, 3–74.

[63] Чирка, Е. М., “Римановы поверхности”, Лекц. курсы НОЦ, 1, МИАН, М., 2006, 3–105.

Списък на авторските публикации

[1] Nikolay Ikonomov, “Multipoint Padé approximants and uniform distribution of points of interpolation”, *Compt. rend. Acad. bulg. Sci.* **66**:8 (2013), 1097–1104.

[2] N. R. Ikonomov and R. K. Kovacheva, “Distribution of points of interpolation of multipoint Padé approximants”, *AIP Conf. Proc.* **1631** (2014), 292–296.

[3] Nikolay Ikonomov, “Generalized Padé approximants for plane condenser and distribution of points”, *Math. Slovaka*, in publication.

[4] Н. Р. Икономов, Р. К. Ковачева, С. П. Суетин, “Метод Наттола и асимптотическая формула Бернштайна для многочленов, ортогональных относительно комплексного веса”, *Изв. РАН Сер. Матем.* **79**:6 (2015), 125–144.