МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2003
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2003
Proceedings of the Thirty Second Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Sunny Beach, April 5–8, 2003

ИЗБИРАТЕЛНИТЕ СИСТЕМИ: МАТЕМАТИЧЕСКИ ПРЕДИЗВИКАТЕЛСТВА*

Владимир Сотиров

Различни избирателни системи са анализирани от единно математическо гледище. Чрез техните недостатъци са изказани няколко естествени свойства, на които те би трябвало да отговарят. Формулирана е теоремата на Ароу, според която тези свойства са несъвместими. Специално е разгледан мажоритарният вот, който притежава недостатъци от коренно нов тип.

1. Предистория. Веднага след освобождението на България от турско робство, още докато Източна Румелия е васална провинция, един от първите български математици, Иван Салабашев (1853-1924), успешно решава критичен за българщината парламентарен въпрос, като с това създава най-ефектния принос на математиката в българския политически живот.

Годината е 1879. Областното събрание в състав 56 депутати заседава в Пловдив, за да избере Постоянен комитет от 10 членове. Според Органическия устав (конституцията на Източна Румелия) този комитет имал извънредно големи пълномощия — и законодателни, и изпълнителни, и съдебни. От него до голяма степен зависел и националният характер на областта. По тази причина авторите на Берлинския договор приели, че при гласуването за Постоянен комитет всеки депутат може да гласува най-много за 6-ма кандидати. Разчитало се по такъв начин българското мнозинство в Областното събрание да не успее да се наложи и поне 4-ма от десетте членове на комитета да бъдат от други националности и вероизповедания.

В навечерието на изборите 30-те български депутати се събрали, за да обсъдят своята тактика. Надделявало мнението, че те могат да получат най-много 8 от 10-те места, защото сметките показвали, че всеки кандидат ще бъде избран с поне 18 гласа. Салабашев обаче бързо пресметнал, че българите разполагат точно с $30 \times 6 = 180$ гласа и следователно проблемът е в рационалното разпределение на тези гласове. Както личи, не е било допустимо никакво дублиране на вота! Салабашев успял да комбинира гласовете така, че наистина били избрани само 10-те български кандидати. Неговото разпределение е представено в [1].

В този доклад ще опишем в най-общи черти математическия поглед върху избирателните системи. Ще видим техните недостатъци и ще отговорим на въпроса, доколко те могат да се отстранят. Ползата е, че в една област, която най-често

*Докладът е подпомогнат от договор И–1102/2002 с Министерството на образованието и науката.

присъства в нашето ежедневие под формата на „приказки за политика“, се внася категоричността на математическите теореми.

Налага се да предупредим читателя, че тук той няма да намери нищо, което да е свързано с българския политически живот и предстоящи или минали избори.

2. Избирателните системи: какви не трябва да бъдат. В тази част са разгледани няколко популярни и на пръв поглед естествени избирателни системи. С елементарни примери ще видим недостатъците на всяка от тях. По-подробен сравнителен анализ на избирателните системи може да се намери в [6].

Най-проста и най-близко до ума изглежда системата на *простото мнозинство*. Тази система се прилага най-вече във Великобритания и САЩ и затова се нарича още *англо-американска*. При нея за избран се смята този кандидат, който е получил най-много гласове, независимо каква част са те от общия брой на гласоподавателите. Очевидно системата на простото мнозинство почива на принципа „малко, но повече от другите“ и точно в това се състои основният ѝ недостатък. Защото, ако погледнем резултата от другата страна, може да се окаже, че *против* избрания кандидат са настроени мнозинството от избирателите!

Ето един красноречив пример за неудовлетворителността на системата на простото мнозинство въпреки нейната простота. Нека избирателното тяло се състои от 9 души, а кандидатите са трима (да ги означим с a, b и c). Предпочитанията на избирателите са показани в *табл. 1*, като всяка колонка съдържа реда на предпочитаните кандидати (отгоре надолу) и броя на избирателите с конкретното предпочитание:

3	2	4
a	b	c
b	a	b
c	c	a

Табл. 1

6	5	4	2
a	c	b	b
b	a	c	a
c	b	a	c

Табл. 2

Както се вижда, избран е c, понеже за него гласуват относително най-много избиратели (4 души срещу 2 за a и 2 за b). Мнозинството обаче (5 от 9) го класира на последно място! Лесно можем да доведем до абсурд тази система: да си представим общност, в която всички глави на семейства са се кандидатирали за някакъв пост. Тогава очевидно ще спечели кандидатът с най-многолюдното семейство, макар абсолютната му популярност да е нищожна.

Нашият пример разкрива още една неприемлива особеност на разглежданата избирателна система. Ако сравняваме кандидатите по двойки, тогава c губи и от a, и от b, понеже петима предпочитат някой от тях двамата пред c. Излиза, че ако въпросът бъде поставен директно: „Предпочитате ли c пред останалите“, той би загубил тотално. Какви са резултатите на другите двама кандидати при такава постановка? b побеждава a с 6:3 и c с 5:4. Следователно има резон да приемем, че при описаното разпределение на предпочитанията победител трябва да е a.

Първият, който е разгледал „чифтовото“ сравняване като път към преодоляване на главния недостатък на избора чрез просто мнозинство — ниската представителност на резултата, е французинът Мари Жан Антоан Никола Карита, маркиз дьо Кондорсе. Неговото съчинение е озаглавено *Опит за приложение на анализа към* *вероятността на решенията, получени с мнозинство на гласовете*, и е публикувано през 1785. Затова в нашия пример a може да бъде наречен „Кондорсе-победител“, а c е „Кондорсе-губещ“. Лошото е, че „Кондорсе-победител“ не винаги съществува. Самият Кондорсе посочва съвсем елементарно разпределение на гласовете, при което не може да се излъчи победител, и оттогава този пример е известен като „парадокс на Кондорсе за гласуването“.

Нека избирателите са само трима, а кандидатите са също трима. Да предположим, че първият избирател класира кандидатите в реда $a > b > c$, вторият — в реда $b > c > a$, а третият ги предпочита в реда $c > a > b$. Очевидно е, че поради пълната симетрия никой кандидат няма избирателни предимства пред останалите. Който и да бъде избран, *две трети* от избирателите биха били против него!

По-голяма представителност на крайния резултат би могла да се получи с *гласуване на два кръга*: на първия кръг участват всички кандидати, а *двамата*, спечелили най-много гласове, се явяват на втори кръг. Тогава вече избраният кандидат се радва на мнозинство от гласовете. Такава е системата, по която у нас се избират президент и кметове.

На пръв поглед е невъзможно крайният избор да е в разрез с волята на мнозинството. Системата обаче показва неочаквани недостатъци. Да разгледаме разпределението на предпочитанията на 17 избиратели към трима кандидати, показано на *табл. 2*. На втори кръг отиват a и b; тогава a бие b с 11:6. Ето какво обаче могат да направят последните двама избиратели, чийто фаворит е b. Виждайки, че той така или иначе няма да спечели, те могат да *провалят* a, като го издигнат на първо място в своите класации! При такава подредба на втори кръг ще отидат a (с 8 гласа) и c, а тогава вече c ще бие a с 9:8.

Изводът от този пример е твърде печален за a: ако за него бяха гласували *по-малко* хора, той щеше да спечели. Разбира се, този резултат се постига с избирателни машинации, но системата не ги забранява. Вотът на последните двама избиратели се нарича *спекулативен* (или *стратегически*), понеже не отговаря на техните реални предпочитания. Както виждаме, двукръговата избирателна система е силно уязвима от спекулативни вотове, чрез които едно малцинство фактически определя крайния резултат.

Ето още един красноречив пример за спекулативен вот при гласуване на два кръга, който преобръща очевидно изявените предпочитания на 17 избиратели към 5-ма кандидати (*табл. 3*):

5	4	3	3	2
a	e	c	d	b
b	b	b	b	c
c	c	d	c	d
d	d	e	e	e
e	a	a	a	a

Табл. 3

1	1	1
a	c	b
b	a	d
d	b	c
c	d	a

Табл. 4

По системата на простото мнозинство победител би бил a, макар че 12 от 17 го класират на последно място. Съществува Кондорсе-победител и той е b, макар че само двама са го поставили на първо място. Когато се проведе втори кръг, измежду a и e ще бъде избран e. Ето какво обаче могат да направят последните двама избиратели. Ако гласуват спекулативно за c, на втори кръг отиват a и c, а тогава побеждава c. По такъв начин двамата, които са малцинство, определят избора и чрез неискрено придвижване на c постигат победителят да отговаря на техния втори избор, а не на последното място в тяхната класация.

В спортните класации обикновено се използват различни системи на *последователно елиминиране* на съперници, докато остане победителят. Понякога, когато са предложени няколко алтернативни решения, парламентът може да реши да гласува последователно за предложените алтернативи, докато остане последна двойка. Дали обаче крайният резултат винаги отговаря на волята на мнозинството? С един опростен пример на елиминиране „по двойки“ ще се убедим, че тази система също е уязвима от спекулации и е крайно неустойчива по отношение на фактори, които изобщо не отразяват вота. Да приемем, че трима избиратели подреждат четирима кандидати така, както е показано в *табл. 4*. Да допуснем още, че гласуването „по двойки“ е например в реда $a-b-c-d$, т. е. победителят измежду a и b се състезава с c, а новият победител — с d. Ясно е, че в този ред на елиминиране крайният победител ще бъде d, макар че тримата избиратели единодушно предпочитат b пред него! Нещо повече, в този пример *всеки* кандидат може да се окаже победител в зависимост от реда на елиминирането.

Системата на последователното елиминиране също е податлива на спекулативно гласуване. В нашия пример, при същия ред на гласуване, ако вторият избирател в противоречие с действителните си предпочитания издигне a преди c, гласуването ще излъчи за победител a, а не c. Така той постига своя втори избор, а не последния, както беше, когато се водеше от „чувствата“ си.

Всички описани системи показват една обща слабост: крайният резултат не отразява цялата верига от предпочитания на конкретния избирател. За да избегне този недостатък, Жан-Шарл дьо Борда предложил през 1781 г. всеки избирател да оценява *с числа* „теглата“ на кандидатите според собствените си предпочитания и накрая всички тегла да бъдат сумирани. Борда нарекъл своята система „метод на отметките“. Неговата система включва информацията за цялостното разпределение на предпочитанията и използва тази информация наведнъж, а не последователно. По всичко личи, че „отметките“, събрани от даден кандидат, адекватно отразяват реалното място, което той заема „в сърцата“ на своите избиратели.

Това обаче отново не е така! Ще разгледаме случай с 5 избиратели, които гласуват за трима кандидати; разпределението на предпочитанията е представено в *табл. 5*. Ще оценяваме кандидатите така: за последно място в дадено предпочитание 0 точки; за средно място 1 точка; за първо място 2. Тогава кандидатът a събира общо 6 точки, b — 7, а c — 2. Следователно по системата на Борда трябва да е избран кандидатът b, макар че a е спечелил абсолютно мнозинство!

3	2	
a	b	2
b	c	1
c	a	0

Табл. 5

Методът на отметките също открива широко поле за спекулативно гласуване. Ако в последния пример тримата избиратели разменят местата на c и b в своите предпочитания, a ще събере отново 6 точки, но c ще събере 5 точки за сметка на b, който ще получи само 4. Забележителното в случая е, че макар взаимното положение на a и b да не се е променило, изходът от тяхното противоборство се решава от положението на c. Още по-парадоксално е, че този изход може да бъде решен не от избирателите, а от единия от кандидатите, и то от най-безнадеждния: от c! Достатъчно е той просто да се оттегли, след като вижда, че губи, и двамата фаворити a и b ще си разменят местата в крайното класиране. Подобни трикове често се използват в спортните класификации.

Говори се, че когато посочили на Борда неудобствата на неговата система, свързани с възможността за спекулативен вот, той отговорил: „Но, господа, тя е предназначена за доблестни мъже!“

Най-разпространена в България е *пропорционалната система*. По нея се избират депутати в Народното събрание, общински съветници и др. Тя обаче излиза извън периферията на този доклад, защото не осъществява подреждане на кандидатите, а всеки от „кандидатите“ (в случая те са партии) получава определен брой места според спечелените гласове. Въпреки това ще я разгледаме с помощта на един пример, за да покажем, че нейната максимална представителност („Каквото си посеял, това ще пожънеш“) също е илюзорна. В някои случаи резултатите ѝ са твърде далеч от реалната обществена нагласа.

Да приемем съвсем условно и без никаква връзка с българската действителност, че на някакви избори се явяват четири партии, които, за да имат имена, ще наречем *лява*, *дясна*, *монархическа* и *екологична*. Да си представим също, че предпочитанията на избирателите, т. е. отговорите на въпроса „Как подреждате четирите партии?“ се разпределят по следния начин (*табл. 6*):

32 %	30 %	23 %	10 %	3 %	2 %
десни	леви	монарх.	монарх.	еколози	еколози
еколози	еколози	еколози	еколози	монарх.	монарх.
леви	десни	десни	леви	десни	леви
монарх.	монарх.	леви	десни	леви	десни

Табл. 6

Както виждаме, най-много депутати ще имат монархистите — 33 %, а най-малко, 5 % — еколозите. Десните получават 32 %, а левите — 30 %. Такъв парламент обаче в никой случай не отразява реалните настроения в обществото, защото те са точно обратните на крайните резултати: най-популярната партия е екологичната, понеже 70 % от избирателите я предпочитат пред лявата партия, 68 % — пред дясната, и 67 % — пред монархическата. Напротив, монархическата партия е най-непопулярната: 67 % предпочитат екологичната, а 62 % предпочитат едновременно и лявата партия, и дясната. Като добавим някои допълнителни особености, например наличието на избирателна бариера, може да се окаже, че най-популярната партия изобщо не присъства в парламента!

3. Избирателните системи: какви могат да бъдат. Разгледаните примери изявяват няколко нежелателни свойства, които сега ще формулираме и ще отговорим на въпроса, съществува ли избирателна система, който да избягва всички забелязани недостатъци. Най-напред обаче ще опишем абстрактната картина на избирателните системи.

Съвсем очевидно е, че разсъжденията ни представляват интерес, когато *избирателите са поне двама*. Освен това ще допуснем, че *кандидатите са поне трима*. Всеки избирател ги класира в някакъв ред в съответствие със собствените си предпочитания. С помощта на изборите се получава „генерално" класиране на кандидатите, наречено *колективно решение*. Тогава централният въпрос, който трябва да реши всяка избирателна система, е: до каква степен колективното решение отразява „общата воля"?

Всичките ни разглеждания допускат превод на езика на икономиката, само че тогава „кандидатите" са всевъзможни разпределения на блага, цени, труд, свободно време и т. н. Очевидно всеки „избирател", т. е. всеки гражданин предпочита да увеличи получаваните блага и собственото си свободно време, като намали цените и влагания труд. Също толкова очевидно е обаче, че е невъзможно *всеки* да постигне целта си. Съгласуването на индивидуалните предпочитания в крайното обществено разпределение, наречено *функция на благосъстоянието*, се осигурява от икономическите закони. Те именно играят ролята на „избирателна система" и затова са призвани в максимална степен да отразяват „обществения интерес". В този дял ще видим доколко това е възможно.

В нашия пример с последователно елиминиране (*табл. 4*) тримата избиратели единодушно предпочитаха b пред d, макар че системата утвърди d. Явно е нежелателно избирателната система да работи по този начин. Затова да формулираме първото си естествено изискване:

1) *Принцип за единодушието* (известен още като *принцип на Парето*): Ако всеки избирател предпочита a пред b, то и в колективното решение a трябва да е предпочетен пред b.

Гласуването на два кръга пък (*табл. 2* и *3*) доведе до следното противоречие със здравия разум: победителят в гласуването загубва първото си място, ако броят на онези, които го предпочитат пред друг кандидат, нарасне. Ето защо второто естествено изискване към избирателната система ще формулираме като

2) *Принцип за монотонност*: Ако кандидатът a е победител в гласуването и някой от избирателите го изкачи в собствената си класация, a трябва да остане победител.

По-нататък, точковата система на Борда (*табл. 5*) демонстрира следното неудобство: когато част от избирателите променят мястото на определен кандидат c в разположението на своите предпочитания, кандидатите a и b разменят позициите си в крайното класиране, макар че никой от гласоподавателите не ги е разменил в своето предпочитание. За да отстраним този недостатък, ще формулираме следващия

3) *Принцип за независимост* (на ирелевантните алтернативи): Ако a е пред b в крайното класиране и някой от избирателите промени мястото на c в своето предпочитание, без да мени взаимното положение на a и b, трябва a да остане пред b.

Накрая ще формулираме последното изискване, което е толкова естествено, че няма избирателна система, която да го нарушава (по тази причина не дадохме и пример). Очевидно е, че ако колективното решение се определя изцяло от волята на един-единствен човек, този човек заслужава името *диктатор*, а процедурата за взимане на решение може да бъде наречена „избирателна система“ само формално, понеже колективен избор в действителност няма. Така стигаме до последното желателно свойство на избирателната система, ако тя претендира за демократичност:

4) *Принцип за липса на диктатор*: Не съществува избирател, чието предпочитание да определя крайното класиране независимо от предпочитанията на останалите избиратели.

Получихме общо пет изисквания към избирателната система, за да можем да я оценим като „добра“. За съжаление *не съществува* система, която да ги удовлетворява едновременно. Това е съдържанието на знаменитата

Теорема 1 (Кенет Ароу, 1950). *Условията 1 – 4 са несъвместими.*

С други думи резултатът на Ароу може да се формулира така: *единственото правило, което удовлетворява принципите за единодушие, монотонност и независимост, е правилото на диктатора.* Твърде обезнадеждаващ резултат, поне за привържениците на демокрацията!

Теоремата на Ароу притежава стотици доказателства, в които условията варират в твърде широки граници; огромен брой от тях са разгледани в [4]. Образно може да се каже, че ако някой вижда причината за несъвместимостта на изискванията в някой от формулираните принципи, може да му се посочи формулировка на теоремата на Ароу, в която спорният принцип отсъства и тя пак е вярна.

Печалната ситуация с избирателните системи има съвсем ясно логическо съдържание и то е добре познато на логиците. Да наречем *решаваща коалиция* (decisive set) всяко множество от избиратели, които могат да наложат колективното предпочитание да съвпада с тяхното собствено. Иначе казано, ако всеки член на решаващата коалиция предпочита кандидата a пред кандидата b, в крайното подреждане a също е пред b. Да означим с I множеството на всички избиратели, а с D — множеството на всички решаващи коалиции. Тогава принцип 1 заедно с допускането, че избирателите са най-малко двама, а кандидатите — най-малко трима, означава, че

a) *всички избиратели образуват решаваща коалиция*, т. е. $I \in D$.

Ако към принцип 1 добавим принцип 2, получаваме, че

b) *всяко разширение на решаваща коалиция също е решаваща коалиция*, т. е., ако $A \in D$ и $A \subseteq B$, то $B \in D$.

По-нататък, ако добавим и принцип 3, получаваме

c) *общата част на две решаващи коалиции също е решаваща коалиция*, т. е., ако $A \in D$ и $B \in D$, то $A \cap B \in D$.

В условията a) — c) логиците и алгебристите веднага ще съзрат, че множеството на решаващите коалиции D образува *филтър*.

Сега нека формулираме по-точно условията, които би трябвало да удовлетворява *релацията на предпочитание*. В действителност тя е индивидуална и зависи от избирателя, но понеже изискванията към нея ще бъдат общи, няма нужда да уточняваме нейния носител. Затова да я означим просто с $\leq$ и нека $a \leq b$ означава, че конкретният избирател предпочита b пред a или пък двамата кандидати са му безразлични. Съвсем естествено е за кои да е двама кандидати да е изпълнено $a \leq b$ или $b \leq a$, което означава, че избирателите са наясно с предпочитанията си. По-нататък, избирателите трябва да проявяват последователност в своите предпочитания и ако някой предпочита b пред a, както и c пред b, той трябва да предпочете c пред a.

Условията върху релацията на предпочитание изглеждат разумни и минимално ограничителни, когато избирателите знаят „какво искат“. Проблемът е, че в някои ситуации *обществото като цяло* не може да реши какво иска. Парадоксът на Кондорсе показва точно това: всеки от тримата избиратели има определено предпочитание, но е невъзможно да се вземе разумно колективно решение, което да не е в противоречие в волята на мнозинството.

Ако добавим условията за релацията на предпочитание към изброените принципи 1 – 4, получаваме

d) *ако дадено множество избиратели не могат да наложат своето предпочитание, останалите депутати налагат своето*, т. е. за произволно A, или $A \in D$, или $\overline{A} \in D$.

Сега вече свойствата a) – d) показват, че множеството на всички решаващи коалиции образува *ултрафилтър* (или, което е същото, *максимален филтър*). Базисното множество обаче, I, е *крайно*, защото това е множеството на всички избиратели. От теорията на филтрите е известно (и това не се доказва трудно), че *всеки ултрафилтър над крайно множество се състои от множествата, които съдържат фиксиран елемент*. В нашия случай, щом множеството на решаващите коалиции е ултрафилтър, съществува фиксиран елемент, да го означим с x_0, така че, щом $\{x_0\} \subseteq A$, изпълнено е $A \in D$. Иначе казано, всяка коалиция, включваща фиксирания елемент x_0, е решаваща. Това означава, че и самото множество $\{x_0\}$ е решаваща „коалиция“, т. е. избирателят x_0 е диктатор! Това е логическото доказателство на теоремата на Ароу; вж. например [3].

След като се убедихме, че разумните изисквания към избирателните системи са несъвместими, някой може да потърси корените на злото в броя на алтернативните кандидати. Първата неприятност при трима кандидати бе открита още от Кондорсе и, както видяхме, наличието на поне трима кандидати е съществено за теоремата на Ароу. Това наблюдение действително се оказва основателно и самият Ароу показва, че бедите отпадат, когато кандидатите са *само двама*: тогава *гласуването с мнозинство* определя колективния избор, като са спазени принципите 1 – 4. Накратко казано, мажоритарният вот удовлетворява всички разумни изисквания към избирателната система, без непременно да съществува диктатор. В следващата част на доклада обаче ще видим, че мажоритарният вот при избор от две възможности води до резултати, които са не по-малко шокиращи и хвърлят сянка на съмнение върху реалността на демократичните процедури.

4. Добър ли е мажоритарният вот? Съвсем очевидно е, че когато са предложени само двама кандидати, изборът на единия от тях с мнозинство на гласовете не предизвиква никакви критики от типа на изложените, защото принципите за единодушието и за монотонността са автоматично изпълнени, а принципът на независимостта е неуместен, понеже няма трети кандидат. Ние обаче ще разгледаме по-внимателно действието на мажоритарния вот при взимането на решения и тогава ще открием неговите слабости.

Когато избирателното тяло гласува за *личности*, актът на избора завършва с оповестяването на победилия кандидат, а когато кандидатите са повече от двама — с подреждането на всички кандидати. Последиците от избора нямат пряка връзка със следващи гласувания, с други кандидати и други предпочитания. Не е така обаче с гласуването на *решения* в парламента. Там всяко решение трябва да държи сметка за предходните, защото иначе може да се стигне до противоречия. Тази разлика между гласуването за личности и гласуването на закони е съществена. Образно казано, изборът на личност може да доведе до *социални* противоречия, докато гласуването в парламента може да доведе до *логически* противоречия. Ето защо ще разглеждаме последователните гласувания на депутатите като логическа система.

Нашите разглеждания не се ограничават само до парламенти. Заседателите могат да бъдат членове на комисии, на партиен конгрес, на събрание на акционери и т. н. Броят на заседателите също може да бъде най-различен: от трима (някаква комисия) до целия народ (когато се провежда референдум). За да внесем определеност обаче, ще говорим за *парламент*, а членовете му ще наричаме *депутати*. Групите от депутати ще означаваме с малки букви. Всички текстове, които се внасят за гласуване в парламента, ще наричаме *проектозакони*, макар че те могат да бъдат декларации, назначения и др. Ще гледаме на проектозаконите като на *логически съждения*. Затова между тях съществуват най-естествените логически връзки: *отрицание* $\neg$, *конюнкция* $\wedge$, *импликация* $\Rightarrow$ и т. н. Казано на логически език, проектозаконите образуват *Булова алгебра*, т. е. успоредно с даден текст може да бъде разглеждано неговото отрицание, два текста могат да бъдат свързвани със съюза „и“, един текст може да бъде следствие от друг и т. н. Проектозаконите ще означаваме с големи букви.

Множеството депутати, които гласуват за даден проектозакон A, ще означаваме с $[A]$. Проектозаконите, гласувани с мнозинство, т. е. с повече от половината гласове, ще наричаме *закони*. Казваме, че групата депутати *m налага* закона A, когато $[A] = m$ и m е мнозинство. Понеже ще държим сметка за логическите последици от гласуванията, ще разглеждаме не само директно гласуваните закони, но и следствията от тях. Затова ще говорим за *решения* на парламента, като в тях ще включваме както текстовете, приети с гласуване, така и логическите следствия от тях.

Депутатите, които ще опишем, са твърде далеч от своите въплъщения в реалността и затова ще ги наричаме *идеални*. Първо, идеалният депутат е *честен*: той няма да гласува едновременно за даден проектозакон A и за неговото отрицание $\neg A$. Второ, идеалният депутат е *компетентен*, той никога не се въздържа от гласуване и винаги гласува или за A, или за $\neg A$. Трето, идеалният депутат е *последователен*: ако вече е гласувал за твърденията A и $A \Rightarrow B$, ще гласува и за твърдението B. Накрая, идеалният депутат е *логичен* и би гласувал за всеки текст, който е логически закон.

Ще наречем самия парламент *непротиворечив*, когато няма противоречие между неговите решения. Както виждаме, непротиворечивият парламент не допуска противоречие нито между директно гласуваните закони, нито между логическите следствия от тях. Казваме, че парламентът притежава *стабилно мнозинство* a, когато всеки закон е резултат от гласуването на a. Символично, ако B е произволен закон, то $a \subseteq [B]$. Парламентът се нарича *олигархичен*, когато притежава стабилно мнозинство. В такъв парламент очевидно една фиксирана група от депутати е способна да налага всички решения на парламента.

Основният резултат, отразяващ връзката между непротиворечивостта на парламентарните решения и съществуването на парламентарна олигархия, се дава от следната

Теорема 2. *Всеки мажоритарно гласуващ парламент е или противоречив, или олигархичен.*

С други думи, *за да бъде парламентът непротиворечив, той трябва да притежава стабилно мнозинство.*

Тук няма да привеждаме доказателството на тази теорема; то е публикувано в [5]. Ще скицираме само доказателството, основано на теорията на филтрите, за да го сравним с доказателството на теоремата на Ароу. Да наречем *решаващо множество* (за даден закон) всяка група депутати, включваща множество, способно да наложи този закон. В такава група не е задължително всички да са гласували *за*, но гласувалите *за* са мнозинство. Следователно решаващите групи за различните закони, а и за един и същ закон могат да бъдат различни. Съвкупността на всички решаващи множества да означим с D:

$D = \{m|(\exists m_0, P)(m_0 \subseteq m$ и m_0 налага $P)\}$.

Съвсем очевидно е, че парламентът като цяло образува решаващо множество и всяко разширение на решаващо множество пак е решаващо. Въпросът е дали *сечението* на произволни две решаващи множества е решаващо множество. В първия случай, когато това е така, D образува филтър, а знае се, че *всеки филтър над крайно множество* (каквото е парламентът) *се състои от множествата, които включват фиксирано подмножество*. За сравнение, в теоремата на Ароу множеството на решаващите коалиции образуваше ултрафилтър и той се състоеше от всички множества, включващи фиксирано *едноелементно* множество. Тук фиксираното множество, което се включва във всички решаващи множества, е *стабилното мнозинство*, което играе ролята на *олигархия*.

Във втория случай, когато липсва стабилно мнозинство, могат да се намерят две решаващи множества m и n, чието сечение $m \cap n$ не е решаващо множество. Тогава, от една страна, съществуват два проектозакона, P и Q, така че $[P] = m_0$ и $[Q] = n_0$ са мнозинства и $m_0 \subseteq m$, $n_0 \subseteq n$. От друга страна, понеже $m \cap n \notin D$, следва, че какъвто и проектозакон R да вземем, ако $[R] \subseteq m \cap n$, тогава $[R]$ не е мнозинство. Да разгледаме конюнкцията на P и Q в ролята на R. Депутатите, гласуващи едновременно за P и Q, са част от $m \cap n$, следователно $[P \wedge Q]$ не може да е мнозинство. В такъв случай *допълнението* на това множество е мнозинство, а то, понеже депутатите са идеални, съвпада с множеството, гласуващо за *отрицанието* на $P \wedge Q$. Преди това обаче мнозинството m_0 е гласувало P, а мнозинството n_0 е гласувало Q. Двете гласувания заедно дават, че $P \wedge Q$ е решение на парламента.

Току-що видяхме обаче, че $\neg(P \wedge Q)$ също е решение (гласувано от мнозинството $\overline{m_0 \cap n_0}$). Това показва, че парламентът е *противоречив*.

Полученият резултат изглежда малко парадоксален и някой може да остане с грешното впечатление, че в парламент, състоящ се само от непротиворечиви депутати, могат да се образуват две мнозинства, които да гласуват две противоречащи си твърдения. Това, разбира се, не е така. Не съществува мнозинство, което да гласува за $P \wedge Q$, но $P \wedge Q$ е *следствие* от текстове, гласувани от мнозинства. Ще цитираме една красноречива илюстрация, описана в популярното списание *Квант* [2]. Да си представим, че племенният съвет се е събрал, за да осъди някакво престъпление. Вождът на племето настоява, че виновникът трябва да получи смъртна присъда. Десетимата старейшини обаче съвсем не са единодушни: само 4-ма от тях смятат, че *обвиненият е виновен и заслужава смърт*. Да означим тяхното становище с $A \wedge B$. Други 4-ма са съгласни, че *обвиняемият е виновен*, но *не заслужава смъртна присъда*. Тяхното становище е $A \wedge \neg B$. Накрая, последните двама са убедени, че *обвиняемиятнито нито е виновен, нито трябва да се наказва* ($\neg A \wedge \neg B$).

Ако вождът постави директно въпроса за смъртното наказание на виновника, би получил само 4 гласа *за*. Затова той решава да постъпи заобиколно и най-напред поставя въпроса „по принцип“: „Съгласни ли сте, че ако обвиняемият е виновен, трябва да бъде наказан със смърт, а ако не е виновен, не трябва да се наказва?“ Фактически той поставя на гласуване еквивалентността $A \equiv B$. Понеже тя следва от $A \wedge B$, първите 4-ма гласуват *за*. Последните двама старейшини обаче също гласуват *за*, понеже $A \equiv B$ следва и от $\neg A \wedge \neg B$. Така предложението на вожда събира 6 гласа от 10 и е прието. Тогава той подлага на гласуване втори въпрос: „Виновен ли е обвиняемият?“ Естествено по този въпрос се получават 8 гласа *за*. От току-що гласуваните решения следва, че обвиняемият заслужава смърт — присъда, която не би минала при директно гласуване. Наистина, ако вождът постави на гласуване решението „Обвиняемият да се оправдае“, т. е. $\neg B$, то би се приело с гласовете на вторите 4-ма старейшини заедно с последните двама. По такъв начин с *три гласувания* вождът на племето реално би довел племенния си съвет до противоречието, набелязано в теоремата.

Както видяхме, мажоритарно гласуващият парламент е или олигархичен, или противоречив. В първия случай не е необходимо той да се събира, за да вземе решение: неговите решения биха съвпадали с решенията на депутатите от онова мнозинство, което нарекохме стабилно (олигархията). Във втория случай, когато липсва стабилно мнозинство, парламентът е противоречив и *всеки текст* става негово решение. При това, както казахме, само с три гласувания може да се стигне до противоречие. Достатъчно е председателят на парламента, който обикновено подготвя дневния ред, да открие два текста (P и Q), които да се гласуват от *две мнозинства, чието сечение не е мнозинство*, и веднага след това да постави на гласуване текста $\neg(P \wedge Q)$.

Оттук авторът на статията в *Квант* прави следния забележителен извод: и в двата случая парламентът е излишен. В първия случай е достатъчно председателят на стабилното мнозинство да съобщи решението на депутатите; във втория случай председателят на парламента трябва само да съобщи, че оповестява трите фатални текста, и резултатът е предварително известен. Излиза че „диктаторът“, който теоремата на Ароу избягваше чрез мажоритарния вот, се явява с маската на демокрацията, защото при олигархичен парламент наблюдаваме *диктатура на ръководителя на мнозинството*, а при противоречив парламент действа *диктатура на неговия председател*.

И все пак, както казва Уинстън Чърчил, може ли някой да предложи нещо по-добро?

ЛИТЕРАТУРА

[1] К. Гъров. Иван Салабашев. В: *Български математици*, съст. И. Чобанов и П. Русев, Народна просвета, С., 1987, 25–29.

[2] А. Шапиро. Логика и парламент. *Квант*, 1995, 3, 6–11.

[3] D. Brown. An approximative solution to Arrow's problem. *J. Econ. Theory*, **9** (1974), 375–383.

[4] J. Kelly. Arrow impossibility theorem, Acad. Press, New York, 1978.

[5] V. Sotirov. The majority voting parliament is either oligarchic or inconsistent. 3rd Panhellenic Logic Symposium, Anogia, Greece, July 17–21, 2001, *Proc.*, 84–90. Достъпна от: `http://www.math.uoa.gr/pls3/proceedings/sotirov.ps`

[6] Ph. Straffin, Jr. Topics in the theory of voting, Birkhuser, Boston, 1980.

Владимир Сотиров
Институт по математика и информатика
ул. Акад. Г. Бончев, бл. 8
1113 София, България
`e-mail: vlsot@math.bas.bg; sotirov@fmi.uni-sofia.bg`
`http://math.bas.bg/~vlsot; http://geocities.com/sotirov.geo`

VOTING SYSTEMS: MATHEMATICAL CHALLENGES

Vladimir Sotirov

Different voting systems are analyzed from a uniform mathematical standpoint. On the base of their disadvantages a few desirable properties are formulated. Arrow's theorem expressing the incompatibility of those properties is exposed. Majority vote is considered especially and its disadvantages of a radically new kind are shown.