МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 27, № 1 (1980)

НЕ ФИНИТНО АППРОКСИМИРУЕМЫЕ ИНТУИЦИОНИСТСКИЕ МОДАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ

В. Х. Сотиров

Макинсон [1] строит расширение классической модальной логики T, которое не является финитно аппроксимируемым: существует формула, которая не выводима в этом расширении, но общезначима на любой конечной модели (она, конечно, опровергается на некоторой бесконечной модели). Короче говоря, теоремы этой системы нельзя отличить от некоторых невыводимых формул, используя только конечные модели. Не исключено, однако, существование иных алгоритмов для распознавания, т. е. система может быть разрешимой. С другой стороны, известно [2], что любое (немодальное) расширение суперинтуиционистской логики Даммета LC финитно аппроксимируемо и даже таблично.

Изложенная ниже модальная система LCT^+ обладает следующими особенностями. Во-первых, она является не финитно аппроксимируемым модальным расширением логики LC. Таким образом, показывается, что описанное в [2] свойство системы Даммета присуще только ее немодальным расширениям. Во-вторых, на любой конечной модели для LCT^+ формулы A и $\Box A$ эквивалентны. Отсюда следует, что логика LCT^+ относительно конечных моделей не отличается от чистого исчисления Даммета без модальностей, т. е. ее собственно модальные теоремы можно выделять только при помощи бесконечных моделей.

Наконец, в-третьих, классическая модальная логика, соответствующая LCT^+ — та, которая получается присоединением аксиомной схемы $A \vee \neg A$, тривиальным образом финитно аппроксимируема и даже является модальной только фиктивно: в ней для любой формулы A выводима эквивалентность $\Box A \equiv A$.

Для простоты обозначений будем использовать модели Крипке, но рассуждения легко можно перенести на произвольные алгебраические модели. Семантика Крипке для интуиционистской модальной логики коротко описана в [3], здесь приведем только основные положения. Обозначим через IT интуиционистский аналог классической модальной логики T, который получается расширением интуиционистского пропозиционального исчисления одним унарным оператором $\Box$ («необходимость») вместе со следующими аксиомными схемами и правилами вывода:

$$\Box A \wedge \Box B \leqslant \Box [A \wedge B],$$

$$\Box A \leqslant A, \quad \frac{A \leqslant B}{\Box A \leqslant \Box B}, \quad \frac{A}{\Box B}.$$

($A \leqslant B$ является сокращением для $\vdash A \Rightarrow B$.) Расширение IT аксиомной схемой

$$Ax: \Box A \Rightarrow \Box\Box A \leqslant A \Rightarrow \Box A$$

будем обозначать через IT^+, а LCT^+ является расширением IT^+ аксиомной схемой Даммета

$$[A \Rightarrow B] \vee [B \Rightarrow A].$$

Моделью Крипке IT называется упорядоченная четверка $\langle K, \leqslant, R, \Vdash \rangle$, в которой $\langle K, \leqslant, \Vdash \rangle$ является моделью Крипке для интуиционистского пропозиционального исчисления, R — произвольное бинарное отношение в K, которое рефлексивно и удовлетворяет правилу «экстраполяции»: из xRy, $u \leqslant x$ и $y \leqslant v$ следует uRv, а для форсинга модальности выполняется

$x \Vdash \Box A$ тогда и только тогда, когда $(\forall y)$ [если xRy, то $y \Vdash A$]. Отметим, что адекватным условием для аксиомы Даммета является

$$(\forall x)(\forall y)[x \leqslant y \text{ или } y \leqslant x].$$

ЛЕММА 1. *Формула $p \Rightarrow \Box p$ общезначима на любой конечной модели для LCT^+.*

Доказательство. Покажем, что если на некоторой модели для LCT^+ формула Ax общезначима, а $p \Rightarrow \Box p$ опровергается, то эта модель бесконечна. Допустим, что $x_0 \nVdash p \Rightarrow \Box p$, т. е. для некоторого x_1 верны $x_0 \leqslant x_1$, $x_1 \Vdash p$ и $x_1 \nVdash \Box p$. В модели, однако, общезначима формула

$$[\Box p \Rightarrow \Box\Box p] \Rightarrow [p \Rightarrow \Box p],$$

следовательно, $x_1 \nVdash \Box p \Rightarrow \Box\Box p$; значит, для какого-либо x_2 имеем $x_1 \leqslant x_2$, $x_2 \Vdash \Box p$ и $x_2 \nVdash \Box\Box p$. Но из $x_1 \nVdash \Box p$ и $x_2 \Vdash \Box p$ следует $x_1 \neq x_2$, что вместе с $x_1 \leqslant x_2$ будем обозначать через $x_1 < x_2$. Дальше продолжим по индукции. Допустим, что получена последовательность $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ и $x_n \Vdash \Box^{n-1} p$, $x_n \nVdash \Box^n p$, следовательно, $x_n \nVdash \Box^{n-1} p \Rightarrow \Box^n p$. Из последнего и Ax получаем

$x_n \nVdash \Box^n p \Rightarrow \Box^{n+1} p$, откуда существует x_{n+1}, для которого выполнены $x_n \leqslant x_{n+1}$, $x_{n+1} \Vdash \Box^n p$ и $x_{n+1} \nVdash \Box^{n+1} p$, следовательно, $x_n < x_{n+1}$. Последовательность $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$ показывает, что модель содержит бесконечное число элементов.

ЛЕММА 2. *Формула $p \Rightarrow \Box p$ не выводима в LCT^+.*

Доказательство. Мы построим модель (бесконечную), на которой Ax общезначима вместе с остальными аксиомами LCT^+, а $p \Rightarrow \Box p$ опровергается. Пусть $K = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Определим $x \leqslant y$, когда $x \leqslant y$ в арифметическом смысле; xRy, когда $x \leqslant y + 1$. Сразу видно, что R рефлексивно и «экстраполируемо», откуда следует общезначимость аксиомы $\Box A \leqslant A$; а из сравнимости любых элементов K следует общезначимость аксиомы Даммета. Допустим теперь, что для какого-нибудь форсинга $x \nVdash Ax$, т. е. $x \Vdash \Box A \Rightarrow \Box\Box A$, но $x \nVdash A \Rightarrow \Box A$, значит, для какого-либо y выполняются $x \leqslant y$, $y \Vdash A$ и $y \nVdash \Box A$. Поскольку $x \leqslant y$, то $y \Vdash \Box A \Vdash \Box\Box A$. В частности, из $y \leqslant y + 1$ следует, что, если $(y+1) \Vdash \Box A$, то $(y+1) \Vdash \Box\Box A$. Но, если $(y+1) \Vdash \Box\Box A$, то из $(y+1)Ry$ следует $y \Vdash \Box A$, что является противоречием. Если же $(y+1) \nVdash \Box A$, то существует такое z, что $z \nVdash A$ и $(y+1)Rz$, откуда $y + 1 \leqslant z + 1$, т. е. $y \leqslant z$, что является противоречием с $y \Vdash A$. Следовательно, все аксиомы LCT^+ общезначимы на этой модели. Далее, определим следующий форсинг: $0 \nVdash p$, но, если

$x > 0$, то $x \Vdash p$. Тогда $1 \Vdash p$, но $1 \not\Vdash \Box p$, поскольку $1R0$, а $0 \not\Vdash p$. Следовательно, $1 \not\Vdash p \Rightarrow \Box p$ и формула опровергается.

ТЕОРЕМА 1. *Логика LCT^+ не финитно аппроксимируема.*

Доказательство следует из лемм 1 и 2, поскольку на любой конечной модели для LCT^+ общезначима невыводимая формула $p \Rightarrow \Box p$.

В качестве следствия отметим, что на всех конечных моделях логики LCT^+ общезначима формула $\Box A \equiv A$, следовательно, на таких моделях LCT^+ фактически совпадает с суперинтуиционистской логикой Даммета. Другими словами, собственно модальные теоремы LCT^+ не финитно отделимы от теорем LC.

ТЕОРЕМА 2. *В классической модальной логике T формулы Ax и $A \Rightarrow \Box A$ являются эквивалентными.*

Доказательство. Покажем сначала, что из Ax следует $A \Rightarrow \Box A$, преобразуя Ax эквивалентным (классически) образом:

$$\Box A \Rightarrow \Box\Box A \Rightarrow [A \Rightarrow \Box A],$$

$$\neg[\Box A \Rightarrow \Box\Box A] \vee \neg A \vee \Box A,$$

$$[\Box A \wedge \neg\Box\Box A] \vee \neg A \vee \Box A,$$

$$\neg A \vee [\Box A \wedge [\Box A \vee \neg\Box\Box A]],$$

$$[\neg A \vee \Box A] \wedge [\neg A \vee \Box A \vee \neg\Box\Box A],$$

$$[A \Rightarrow \Box A] \wedge [A \wedge \Box\Box A \Rightarrow \Box A].$$

В обратную сторону достаточно показать, что из $A \leqslant \Box A$ следует Ax, но это очевидно. Доказанная эквивалентность вместе с аксиомой $\Box A \leqslant A$ дает $\Box A \equiv A$, так что классическая система T^+ является модальной фиктивно.

Рассмотрим еще некоторые логики. Если нас интересует лишь финитная аппроксимируемость назависимо от свойств модальностей, можем дать примеры как систем более слабых — скажем, без аксиомы $\Box A \leqslant A$, так и систем более сильных — например, с дополнительной аксиомой $\Box[\Box A \Rightarrow B] \vee \Box[\Box B \Rightarrow A]$: адекватное условие для R (если xRy и xRz, то yRz или zRy) непосредственно проверяется в модели из леммы 2 и потому доказательство теоремы 1 почти не меняется. Особо надо отметить логику

IT^+: она также является не финитно аппроксимируемой, но на всех конечных моделях совпадает с интуиционистским пропозициональным исчислением, причем снова ее классический аналог является фиктивно модальным и потому привиально разрешимым.

Системы LCT^+ и IT^+ не входят ни в какую из известных классификаций модальных логик. Поэтому дадим пример не финитно аппроксимируемой логики между IT и $IS4$: она получается присоединением к IT аксиомы

$$\Box\Box A \Rightarrow \Box\Box\Box A \leqslant \Box A \Rightarrow \Box\Box A.$$

Формулой, общезначимой на всех конечных моделях, на этот раз является $\Box\Box p \Rightarrow \Box p$. Соответствующая ей классическая логика совпадает с $S4$ и снова является финитно аппроксимируемой.

Укажем еще пример логики, которая и классически, и интуиционистски не финитно аппроксимируема, беря аксиому Макинсона в пригодном для интуиционистского случая виде: расширения T и IT аксиомой

$$\Box[\Box\Box A \Rightarrow \Box\Box\Box A] \leqslant \Box A \Rightarrow \Box\Box A$$

не финитно аппроксимируемые.

Наконец, дадим пример логики, которая еще «ближе» к логике Даммета в том смысле, что ее классический аналог содержится в T, но тем не менее она не финитно аппроксимируема. Обозначим через $LC(\Diamond)$ расширение интуиционистского пропозиционального исчисления символом $\Diamond$ «возможность» вместе с аксиомами и правилами:

$$[A \Rightarrow B] \vee [B \Rightarrow A],$$

$$\Diamond[A \vee B] \leqslant \Diamond A \vee \Diamond B, \quad \frac{A \leqslant B}{\Diamond A \leqslant \Diamond B}, \quad \frac{\neg A}{\neg\Diamond A}.$$

Расширение $LC(\Diamond)$ аксиомной схемой

$$\Diamond A \Rightarrow \Diamond\Diamond A \leqslant A \Rightarrow \Diamond A$$

обозначим через $LC(\Diamond)^+$. Тогда общезначимой на всех конечных моделях является невыводимая формула $p \Rightarrow \Diamond p$. Следовательно, $LC(\Diamond)^+$ не финитно аппроксимируема, и очевидно, содержится в $LCT(\Diamond)$. Пока не известен пример не финитно аппроксимируемого расширения логики Даммера, содержащегося в $LCT(\Box)$.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
20.III.1978

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Makinson D., A normal modal calculus between T and $S4$ without the finite model property, J. Symbolic Logic, 34, № 1 (1969), 35—38.
[2] Dunn J., Meyer R., Algebraic completeness results for Dummett's LC and its extensions, Z. Math. Logik Grundlag. Math., 17 (1971), 225—230.
[3] Sotirov V., Modal theories with intuitionistic logic, In: Sixth Balcan mathematical congress. Varna, 3—9 June 1977, Summaries, p. 91.