Програмата на Лайбниц: сметки вместо спорове*

Владимир Сотиров

1 Мечти и реалности

Крилатият призив на Лайбниц *Calculemus!* („Да сметнем!“) може да се срещне на много места в неговите ръкописи и то на протежение на целия му 50-годишен творчески път. Това показва централната роля, която той е придавал на математизирането на човешкото познание. Ето една от най-изразителните формулировки на Лайбницовото кредо: „Наистина, когато възникне спор, нуждата от дискусия между двама философи не би била по-голяма, отколкото между двама изчислители. Понеже ще бъде достатъчно те да вземат перата, да седнат пред абака и да си кажат (все едно, че дружески се приканват): Хайде да сметнем!“ [2, с. 497]. Основната идея е била понятията да се заменят с естествени числа (т. нар. *характеристики*), а взаимоотношенията между понятия — с релации между представящите ги числа. По такъв начин логическата истинност на дадено твърдение би трябвало да се превърне в аритметична истинност на някакво числово съотношение, което вече подлежи на пресмятане. На десетки места в ръкописите на Лайбниц можем да прочетем следния красноречив пример, който показва как той си е представял функционирането на превода в аритметиката: ако характеристичното число на понятието ‘живо същество’ е 2, а на ‘разумно’ е 3, тогава на понятието ‘човек’, доколкото той по определение е ‘живо същество, притежаващо разум’, ще съответства числото $6 = 2 \cdot 3$. В такъв случай верността на твърдението ‘Човекът е разумно същество’ се свежда до тривиалната констатация, че 6 се дели на 3.

Днес, 330 години след първите скици на Лайбницовата програма, можем в съвсем точни термини да опишем границите на нейната осъществимост. Преди всичко съотношенията между понятия, които е визирал Лайбниц, се свеждат до твърдения от четири типа и примери за тях са ‘Всички хора са разумни’, ‘Някои хора са мъдри’, ‘Никой човек не е безсмъртен’ и ‘Някои хора не са благодетелни’. Както виждаме, всички твърдения изразяват *свойства* и то по строго канонизиран начин. Накратко казано, за Лайбниц разсъжденията, а оттук и споровете, се изчерпват със *силогистиката* —

*Докладът е финансиран от договор *И*–705/1997 с Министерството на образованието и науката.

един доста тесен фрагмент от логиката, който в духа на две хиляди годишната традиция е бил отъждествяван с *цялата* логика. Силогистиката ще бъде подробно изложена по-нататък, но нека засега отбележим само, че в нейните рамки не се побират например *релациите*. Да речем, твърдението '5 е по-голямо от 3' не може да се разглежда като свойство нито на числото 5, нито на числото 3.

Самият Лайбниц е бил убеден, че релациите са сводими до свойства, дори нещо повече, че вътрешно присъщи на предметите са само свойствата, докато релациите са привнесени, така да се каже, от нашия интелект. За съжаление той не ни е оставил никакви инструкции за аритметичното третиране на релациите между понятия. Това обаче е по-малката беда. По-голямата е, че той се е надявал всички спорове, т. е. *всички* логически разсъждения да бъдат сведени до прости сметки от типа „дели ли се 6 на 3, или не“. Към днешна дата можем да заявим, че подобна надежда няма основания най-малкото поради факта, че за разлика от едноместното предикатно смятане, което е разрешимо, предикатната логика, включваща поне двуместни релации, е неразрешима. А точно това е езикът, на който се формулират що-годе интересните въпроси, например математическите.

Програмата на Лайбниц заслужава да бъде разгледана в още един принципен аспект. Действително ли аритметиката може да бъде панацея за лекуването на всякакви съмнения? Можем ли да се надяваме, че някой ден всеки счетоводител ще е способен да реши спора между двама мислители, които разсъждават дали има нечетни съвършени числа, или не? Тук веднага трябва да направим едно уточнение. Лайбниц никога не е мислел, че с превод в аритметиката ще се решават въпроси от типа 'Има ли живот на Марс'. „Истините на факта“, както той се изразява, са с друга природа: те имат своите основания в Бога, а не в аналитичната връзка между понятията. Казано на днешен език, те не могат да бъдат доказани въз основа на предварително приети аксиоми и дефиниции, които евентуално да бъдат преведени на езика на аритметиката. За разлика от тях хипотезите на аритметиката са точно примери за аналитични твърдения, чиято вярност се корени в експлицитно формулирани първични допускания и никъде другаде. Днес обаче знаем, че именно аритметиката е неразрешима, т. е. не съществува алгоритъм за разпознаване на верните твърдения, изказани на нейния език. Това показва категорично, че програмата-максимум на Лайбниц е била обречена на неуспех, защото в своя неограничен обхват тя би трябвало да включва и аритметичните спорове, а те са алгоритмично неразрешими.

Ако се върнем на изначалната Лайбницова идея — поне въпросите за взаимното включване на понятия да бъдат сведени до елементарни аритметични операции, тя пък може да събуди недоумение в светлината на казаното: след като знаем, че силогистиката е разрешима, а аритметиката — не, каква ще ни е ползата да прехвърляме въпросите от област, където те имат решение, в област, където нямат? Работата е там, че в представите на Лайбниц преводите на логическите изрази не са произволни аритметични твърдения, а имат доста специален вид. В тях например никъде не участва *събирането* на числа. Както ще видим, и в реализацията, която е описана от Лайбниц, но която по ред причини е била незадоволителна дори за самия него, и в реализациите, които са далеч по-прозрачни и отговарят на неговите първоначални намерения, участват само понятията *делимост*, *НОК*, *НОД*, *реципрочна стойност* и т. н. Накратко казано, преводът се извършва в *мултипликативния* фрагмент на аритметиката, който съдържа операцията умножение, но не и събиране, а този фрагмент, както е доказал Т. Сколем [8], е разрешим. Естествено Лайбниц не е можел да знае нито за неразрешимостта на предикатното смятане и аритметиката, нито за разрешимостта на силогистиката, едноместното предикатно смятане, мултипликативната аритметика и т. н. — все понятия, изяснени повече от два века след неговата смърт. Въпреки това обаче трябва да отдадем дължимото на неговата интуиция, защото без да е притежавал точните понятия и доказателства, тя го е била насочила в правилната посока.

2 Лайбниц: успехи и неуспехи

Без все още да навлизаме в подробности, ще въведем необходимите означения. Както вече споменахме, силогистиката работи с четири типа твърдения. Към първия от тях спадат т. нар. *общоутвърдителни*, които имат вида 'Всяко s е p' и по традиция се означават с $s\mathcal{A}p$, а s и p се наричат *термини*, или *термове* (s е *субект*, а p — *предикат* на твърдението). Вторият тип включва *частноутвърдителните* от вида 'Някои s са p', означавани с $s\mathcal{I}p$. Последните два типа са отрицания на първите два и по тази причина можем да не се занимаваме специално с тях: *частноотрицателните* са от вида 'Някои s не са p' ($s\mathcal{O}p$), а *общоотрицателните* са от вида 'Никое s не е p' ($s\mathcal{E}p$). Както вече знаем, на термините (т. е. на понятията) s и p трябва да се съпоставят естествени числа, които за простота ще означаваме със същите букви, а за силогистичните релации $\mathcal{A}$ и $\mathcal{I}$ трябва да се подберат подходящи аритметични релации. Да видим какво предлага Лайбниц.

За общоутвърдителните отговорът вече ни е известен: $s\mathcal{A}p$ е вярно, когато s се дели на p. Лайбниц означава този факт с $s = xp$. Той обаче прави едно важно допълнение: по правилата на *универсалната характеристика* на понятието 'разумен човек' би трябвало да съпоставим числото $6 \cdot 3$, т. е. $2 \cdot 3 \cdot 3$. В такъв случай, за да бъде вярно твърдението 'Всеки човек е *разумен човек*', би трябвало 6 да се дели на $6 \cdot 3$, което няма да е изпълнено, без изкуствено да отъждествим повтарящите се множители. Въпреки че подобно действие е некоректно от аритметично гледище, Лайбниц подхожда чисто алгебрично: приемаме, казва той, че aa и a са еквивалентни. Съвсем очевидно е, че ще избегнем подобни неприятности, ако още от самото начало забраним в характеристиките да участват кратни множители. Очевидно е също, че ще трябва да променим правилото за намиране на характеристиката на съставните понятия: тя не може да бъде просто произведението на съставките, ако не искаме в аритметиката да се наблюдават ексцентрични равенства от типа „$3 \cdot 3 = 3$". Какво да бъде правилото — това ще видим, когато разгледаме разширената силогистика, включваща *композиция* на понятия.

Веднага прави впечатление, че според правилото на Лайбниц по-общите понятия получават по-малко характеристично число от частните. В нашия пример, макар че хората са част от живите същества, тяхното число е 6, докато на живите същества е 2. Това е точно обратното на нашите представи: днес и детето ще нарисува един голям кръг, който да изобразява живите същества, а вътре в него ще впише по-малък кръг, който да представя хората. Лайбниц много добре познава тази интуиция, признава я за законна и дори посочва, че тя е типична за „школата“, т. е. за схоластиците: според нея понятията са класове от обекти и ‘човек’, да речем, се отъждествява с множеството на всички хора. Допустима е обаче и друга интуиция, според която на понятията се гледа като на снопове от свойства: тогава ‘човек’ ще притежава допълнителни свойства спрямо ‘живо същество’ и рисунката, разбира се, ще бъде обратна на „нашата“. Самият Лайбниц предпочита втората представа и затова нататък ще я наричаме *лайбницова*, а за първата ще използваме неговия термин и ще я наричаме *схоластична*. Нека подчертаем, че разграничаването на двете взаимно дуални представи щеше да е напълно излишно, ако не беше неуспехът на Лайбниц в тяхното аритметично моделиране, а този неуспех се дължи на куриозното им смесване.

Как да интерпретираме в аритметиката частноутвърдителните твърдения? Тук започват трудностите и... гафовете. За жалост Лайбниц не дава никакъв конкретен пример, който да ни покаже как си е представял съотношението между характеристиките на понятията в твърдение от типа ‘Някои живи същества са бозайници’. След няколко несполучливи формулировки последната, която той предлага, е: $s\mathcal{I}p$ е вярно, когато s, умножено по друго число, се дели на p. Следва кратък запис: $sx = yp$. Очевиден е стремежът на Лайбниц да получи критерий, който да е еднотипен с критерия за общоутвърдителните ($s = xp$), а мотивът му вероятно е, че както понятието ‘човек’ съвпада с понятието ‘живо същество’, обогатено с допълнителното свойство ‘разумно’ (x), така и, да речем, твърдението ‘Някои французи са поети’ изразява факта, че понятието ‘французин’ (s) с допълнителното свойство ‘пишещ стихове’ (x) съвпада с понятието ‘поет’ (p), обогатено с ‘френски произход’ (y).

Сега отново се налага да направим важно допълнение. Ако разбираме критерия на Лайбниц буквално, той става тривиален, защото *всяко* число s, умножено по подходящо число, става делимо на *всяко* p — достатъчно е да го умножим например по самото p. За да има смисъл условието, естествено е да поискаме множителят, с който ще умножаваме числото на субекта, да бъде *строго по-малък* от числото на предиката. В такъв случай критерият добива много по-прозрачно аритметично съдържание: твърдението ‘Някои s са p’ е вярно, когато s и p имат общ делител (естествено по-голям от 1), т. е. просто когато НОД$(s, p) > 1$. А критерият на Лайбниц за общоутвърдителните може да се формулира в същия дух: твърдението ‘Всички s са p’ е вярно, когато всеки делител на p е делител на s. Сега вече, ако минем към привичните ни кръгове, критерият за частноутвърдителните ще изразява, че двата кръга (представящи делителите) имат непразно сечение — в пълно съответствие с нашата съвременна интуиция (която според Лайбниц е всъщност схоластичната и по тази причина нека наречем *схоластичен* критерия за частноутвърдителните в тази му форма). Тогава обаче между двата критерия изплува явно противоречие: да не забравяме, че според Лайбницовия критерий за общоутвърдителните включването е дуално на схоластичното!

Противоречието между формулираните от Лайбниц критерии не закъснява да се прояви. Да вземем за пример аристотеловия силогизъм *Darii* с конкретни термини: ‘Всички хора са разумни; някои двуноги животни са хора, следователно някои двуноги животни са разумни’. Да оставим числото 2 за ‘животно’, 3 за ‘разумно’ (така числото на ‘човек’ остава 6), а на ‘двуногое’ да съпоставим 5. Тогава първите две предпоставки са верни, понеже 6 се дели на 2, а 10 ($= 5 \cdot 2$) и 6 имат общ делител, но заключението престава да е вярно, понеже 10 и 3 нямат общ делител (по-голям от 1). По всяка вероятност самият Лайбниц е забелязал, че двата критерия не вървят заедно, защото след април 1679 г. — месеца, в който са концентрирани всички негови аритметични интерпретации на силогистиката, разглежданият превод повече не се появява. Неговите търсения завършват с формулирането на коренно различен модел в аритметиката, който си заслужава да опишем. Този път на понятията се съпоставят *двойки взаимнопрости* числа и ако на s е съпоставена двойката (s_1, s_2), а на p — (p_1, p_2), $s\mathcal{A}p$ се приема за вярно, когато s_1 се дели на p_1, а s_2 — на p_2; $s\mathcal{I}p$ е вярно, когато s_1 и p_2, също както и s_2 и p_1, са взаимнопрости. Лайбниц проверява в новия модел редица силогизми и правила на силогистиката, но няколкото ръкописа, в които моделът е изложен, остават непубликувани до 1901 г. (вж. [5] и [6])[1]. Това впрочем се отнася и за останалите логически ръкописи на Лайбниц, които по тази причина не успяват да извършат революцията в логиката, която Бул и Де Морган извършват век и половина по-късно. Чак през 1948 г. Й. Слупецки окончателно доказва, че моделът с двойките взаимнопрости числа е адекватен [9]. По-точно: дадена формула на езика на силогистиката е логически вярна тогава и само тогава, когато нейният превод изразява вярно твърдение от аритметиката (вж. също [3]). За съжаление вторият модел, макар и сполучлив, не притежава интуитивната прозрачност на първия: вече няма и помен от първоначалната идея — на понятията да се съпоставя характеризиращо ги *число*, не са ясни съдържателните функции на двете компоненти в „бинарната характеристика“, трудно могат да бъдат мотивирани и критериите за вярност на силогистичните твърдения. Най-лошото обаче е, че изобщо не се вижда как моделът с двойките числа би могъл да се разшири за силогистиката, в която участват операции с термове: отрицание, композиция и т. н. След малко ще се убедим, че началната програма на Лайбниц е напълно осъществима, при това в обем, който той не е очаквал.

[1] Наскоро излезе академично издание на логическите ръкописи на Лайбниц [7].

3 Аритметични модели на силогистиката

Силогистиката заслужава нашето внимание поне по три причини. Най-напред, тя е първата формална логическа система, изградена от Аристотел, и е изиграла за дедуктивното развитие на логиката онази роля, която *Елементи* на Евклид са изиграли за геометрията. Втората причина (може би най-маловажната) е нейното канонизиране от традицията и споменатото ѝ отъждествяване с цялата логика в продължение на повече от две хилядолетия. Третата, най-съществената причина е, че силогистиката е твърде интересна: тя е достатъчно проста, затворена в себе си логическа система, която без особени усилия може да бъде преподавана на учениците. Във формалното изложение на традиционната силогистика ще следваме прочутата книга на Ян Лукашевич [3]. То е напълно в духа на Аристотел, но излиза далеч извън рамките на направеното от него и по тази причина коренно се различава от безбройните учебници по „формална логика“, писани главно от философи. Езикът на *традиционната* (аристотеловата) силогистика — за да го различаваме от по-късните разширения с термови операции — се състои от *термови променливи* (накратко *термове*) $t_1, t_2, \ldots$, двете бинарни *термови релации* $\mathcal{A}$ ('всички…са…') и $\mathcal{I}$ ('някои…са…'), *скобите* и общоприетите *съждителни операции* на класическата логика: отрицанието $\neg$, конюнкцията $\wedge$, импликацията $\Rightarrow$ и т. н.; ще използваме популярните съкращения на скоби при писането на формули. *Силогистични атоми* са всички формули от вида $s\mathcal{A}p$ и $s\mathcal{I}p$, където s и p са произволни термове. *Силогизъм* наричаме произволен брой силогистични атоми, свързани със съждителни операции по правилата на класическата логика, т. е. силогизмът е съждителна формула, в която съждителните променливи са заместени със силогистични атоми. В така дефинираното понятие лесно ще открием всички аристотелови силогизми, например споменатия *Darii* $(m\mathcal{A}p) \wedge (s\mathcal{A}m) \Rightarrow (s\mathcal{I}p)$, верижните силогизми, включващи повече от две предпоставки, както и въведените от Лайбниц едноатомни силогизми: $s\mathcal{A}s$ и $s\mathcal{I}s$.

Разбира се, формалната силогистика е само език, на който можем да записваме определени твърдения, но тяхната вярност е извън силогистиката и се дава от нейната *семантика*. По-точно, ще въведем *две* семантики, основани на теорията на множествата. Най-близката до нашата интуиция отговаря на представата ни за кръговете и поради съображенията, които изтъкнахме по-горе, ще я наречем *схоластична*. Ако S и P са произволни *непразни* множества, $s\mathcal{A}p$ се интерпретира като $S \subseteq P$, $s\mathcal{I}p$ — като $S \cap P \neq \emptyset$, а формалните съждителни операции се заместват с техните неформални аналози, т. е. с човешки думи. По такъв начин всеки силогизъм се превръща в твърдение за множества. Ако това твърдение е вярно за произволни множества, силогизмът се нарича *верен* (в схоластичен смисъл). Тук изрично трябва да посочим една особеност на модела: термовете се интерпретират само с непразни множества. Това ограничение не е съществено и е по-скоро дан на традицията: някои от силогизмите, изучавани от Аристотел, престават да бъдат верни, ако допуснем празни понятия. Особено показателни са двата „минимални“ силогизма на Лайбниц: ‘Всички дяволи са дяволи’ е вярно независимо дали наистина има дяволи, докато ‘Някои дяволи са дяволи’ ще бъде вярно, само ако те наистина съществуват.

Втората семантика е дуална на първата и ще я наречем *лайбницова*. В нея предварително е фиксирано непразно множество U („универсум“) и термовите променливи се заместват с подмножества на U, *различни* от цялото U. Ако S и P са такива множества, $s\mathcal{A}p$ се интерпретира като $S \supseteq P$, $s\mathcal{I}p$ — като $S \cup P \neq U$, а логическите операции отново се заместват с неформални. Силогизмът се нарича *верен в* U, когато полученото твърдение е вярно за произволни подмножества на U, различни от него самото; нарича се *верен* (в *лайбницов* смисъл), когато е верен в произволно непразно множество U. Поради дуалността на моделите двата смисъла на верността очевидно съвпадат. Преходът от едната семантика в другата става, като вземем допълненията на множествата, с които са оценени термовите променливи.

Голяма роля за моделирането на силогистиката в аритметиката ще играе нейната разрешимост, т. е. възможността да бъде удостоверявана верността на даден силогизъм, като се използват само множества с предварително ограничен брой елементи. Разрешимостта се гарантира от следната теорема, за чието доказателство ще се позовем на [10]:

Теорема 1 *Даден традиционен силогизъм с n променливи е верен точно тогава, когато е верен във всяко множество с не повече от 2^n елемента.*

Сега можем да формулираме двете аритметични интерпретации, съответни на двете семантики в теорията на множествата. Първата отново ще наречем *схоластична*. Нека $a_1, a_2, \ldots$ са естествени числа, *по-големи* от 1. Когато е даден силогизъм, заместваме $t_i\mathcal{A}t_j$ с $a_i|a_j$ (a_i дели a_j), а $t_i\mathcal{I}t_j$ — с релацията НОД$(a_i, a_j) > 1$ (иначе казано, a_i и a_j имат общ делител, по-голям от 1). Ще наричаме силогизма *аритметично верен* (в *схоластичен* смисъл), когато полученото твърдение е вярно в аритметиката. За *лайбницовата* аритметична интерпретация ще се наложи да въведем число-„универсум“ $u > 1$, а числата, с които ще заместваме термовите променливи, са делители на u, *по-малки* от него. Заместваме $t_i\mathcal{A}t_j$ с релацията „a_i се дели на a_j“, а $t_i\mathcal{I}t_j$ — с релацията НОК$(a_i, a_j) < u$ (иначе казано, съществува прост делител на u, който не дели нито a_i, нито a_j). Силогизмът се нарича *верен по отношение* на дадено u, когато полученото твърдение е аритметична истина; нарича се *аритметично верен* (в *лайбницов* смисъл), когато е верен по отношение на произволно $u > 1$. Връзката между двете интерпретации се получава с елементарен преход към реципрочни стойности, а като се използва подходящ изоморфизъм между елементите на крайното множество от теорема 1 и простите множители на u, се доказва главната теорема за адекватност на въведените интерпретации:

Теорема 2 *Даден традиционен силогизъм е верен точно тогава, когато е аритметично верен в схоластичен или в лайбницов смисъл.*

Доказателството се намира в [10], а тук само ще отбележим, че ако допуснем празни понятия, в схоластичната интерпретация те ще бъдат оценявани с числото 1, а в лайбницовата — с числото u.

Сега се убеждаваме, че Лайбниц е дал заченките на *две* правилни интерпретации на традиционната силогистика в аритметиката, но за съжаление ги е смесил в една — грешна. Можем само да гадаем за действителните причини за това смесване, но най-вероятната е подвеждащият запис на двата критерия ($s = xp$ и $sx = yp$), който е твърде далеч от привичните рисунки, наричани днес „кръгове на Ойлер“. Разбира се, Ойлер е живял много по-късно, но Лайбниц използва кръговата интерпретация на понятията седемдесет години преди него! Единственото обяснение е, че чертежите на Лайбниц се появяват две десетилетия след логическите му изследвания от април 1679, очевидно по време, когато интересът му към аритметичната интерпретация вече е бил охладнял.

Накрая ще разгледаме аритметичните модели на нетрадиционните силогистики, като само ще скицираме интерпретирането на термовите операции. На първо място, в системата може да участва *отрицание*; тогава например от 'Човекът е смъртен' се извежда 'Никой безсмъртен не е човек'. Числото-„универсум“ става задължително за двете интерпретации, като допълнително се налага то да не съдържа *кратни* множители. Термовете се оценяват с делители на u, които, ако продължаваме да отхвърляме празните термове, ще трябва да са различни от 1 и от самото u. Единственото ново е, че ако стойността на терма t е делителят a, стойността на отрицанието му $-t$ е частното $\frac{u}{a}$. Когато пък силогистиката е разширена с термова *конюнкция* (или *композиция*), става възможно например от понятията 'французин' и 'поет' да образуваме 'френски поет' (или 'поетичен французин'?). Ако стойностите на двата терма s и p са съответно a и b, които са делители на u, в схоластичната интерпретация стойността на композицията sp е НОД(s, p), а в лайбницовата интерпретация тя е НОК(s, p). Теоремите за адекватност се получават след подходящи модификации на теоремата за разрешимост на традиционната силогистика.

4 Аритметична интерпретация на едноместното предикатно смятане

Езикът на *едноместното предикатно смятане* съдържа само *едноместни предикати* $P_1, P_2, \ldots$, *индивидни променливи* $x, y, z, \ldots$, обикновените *съждителни операции* и двата *квантора*: за общност ($\forall$) и за съществуване ($\exists$). Въпреки че на този език могат по различен начин да се преведат изразите на силогистиката, силогистиката си остава автономна логическа система, която има собствена прелест и не се нуждае от предикати, за да бъде излагана. От друга страна, едноместното предикатно смятане може да се разглежда като обща логика на свойствата, в която пък е възможно да се формулират твърдения, недостъпни за силогистиката. Такива са например твърденията 'Всяко число е или четно, или нечетно', 'Някои числа са четни, а други — нечетни' и т. н. Основното, което липсва в този език, са релациите. В него няма дори равенство (макар че то може да бъде добавено, без да доведе до катаклизми).

Понеже в духа на Лайбницовата програма ще се интересуваме дали дадена формула е логически закон, или не, спокойно можем да се занимаваме само със *затворени* формули, т. е. с такива, в които не участват индивидни променливи, несвързани с квантори. Ако е имало свободни променливи, те могат да бъдат свързани с квантори за общност пред цялата формула — от гледище на общовалидността получената формула е еквивалентна на изходната. За подобни формули ще приложим процедурата, описана в [1, теорема 25.4]:

Лема 1 *Всяка затворена формула на едноместното предикатно смятане е еквивалентна на затворена формула със същите предикати, но само с една индивидна променлива.*

Нека тази единствена променлива е x. Допълнително можем да предположим, че във формулата не участват фиктивни квантори, т. е., че в никое свое участие x не е свързана два пъти с квантор (ако това не е така, фиктивният квантор може да бъде премахнат). По такъв начин, ако някоя подформула на изходната формула има вида $(Qx)A$, където A е формула, а Q е квантор, можем да сме сигурни, че x наистина участва свободно в A. Освен това можем да сме сигурни, че никъде няма да се срещне булева комбинация (т. е. конюнкция, импликация и т. н.) на две подформули $A(x)$ и B, едната от които съдържа x свободно, а другата — не. Накратко казано, можем да предполагаме, че интересуващата ни формула или е във вида $(Qx)A(x)$, като A не съдържа други квантори (и следователно е булева комбинация на предикати), или е булева комбинация на кванторни формули от този вид. За да я интерпретираме в аритметиката, нека $u > 1$ е естествено число *без кратни множители* и нека на всяка предикатна буква P_i припишем някой негов делител d_i. Следвайки построението на формулата, на всяка подформула, която съдържа x свободно, ще съпоставим *делител* на u, а на подформула, която не съдържа свободни участия на x, ще съпоставим *твърдение* за делителите на u. Правилата са следните:

- на $P_i(x)$ съпоставяме пак делителя d_i;
- ако с подформулите $A(x)$ и $B(x)$ са асоциирани съответните делители a и b, на $A(x) \wedge B(x)$ съпоставяме НОД(a, b), на $\neg A(x)$ съпоставяме $\frac{u}{a}$ и аналогично за останалите съждителни операции;
- ако с $A(x)$ е асоцииран делителят a, на $(\forall x)A(x)$ и $(\exists x)A(x)$ съпоставяме съответно твърденията $a = u$ и $a > 1$;
- ако с подформулите A и B (без свободни участия на x) са асоциирани съответно твърденията p и q, на $A \wedge B$ и $\neg A$ съпоставяме съответно твърденията „p и q“ и „не p“; аналогично за останалите съждителни операции.

По такъв начин изходната формула се превръща в аритметично твърдение за числото u. Ако това твърдение е вярно за всяко u, формулата се нарича *аритметично вярна*.

Теорема 3 *Дадена формула на едноместното предикатно смятане е общовалидна точно тогава, когато е аритметично вярна.*

Изложената интерпретация бе анонсирана без доказателство в [11]. За доказателството ще използваме известния факт, че едноместното предикатно смятане е разрешимо [4]. Съществения момент тук е, че ако дадена формула с n предиката не е общовалидна, тя се опровергава в област D с не повече от $N = 2^n$ елемента. Затова е достатъчно да се занимаваме само с крайни интерпретации. Нека елементите на D са $e_1, \ldots, e_N$ и интерпретацията на предиката P_i е подмножеството D_i, а дадената оценка съпоставя на единствената индивидна променлива x някакъв елемент e от D. Както вече приехме, изходната формула е булева комбинация на кванторни формули от вида $(Qx)A(x)$, като евентуално може в комбинацията да участва само една формула. Да означим с A^* *твърдението*, което се получава, когато заменим в $A(x)$ всеки предикат $P_i(x)$ с $e \in D_i$, а формалните съждителни операции — с неформални. $A(x)$ е вярна за дадената оценка при дадената интерпретация, когато A^* е вярно. По-нататък да означим с A^{**} *множеството*, което се получава, когато заменим в $A(x)$ предиката $P_i(x)$ с D_i, а съждителните операции — с техните аналози от теорията на множествата (т. е. $\wedge$ с $\cap$, $\neg$ с допълнение и т. н.). A^* е вярно точно тогава, когато е вярно $x \in A^{**}$. Следователно $(\forall x)A(x)$ ще е вярна при дадената интерпретация, когато $A^{**} = U$, а $(\exists x)A(x)$ — когато $A^{**} \neq \emptyset$. Сега вече лесно се вижда, че интерпретациите на формулата в теорията на множествата са изоморфни на моделите ѝ в аритметиката. Когато е дадена горната интерпретацията, да вземем N *прости* (и различни) числа $a_1, \ldots, a_N$ и да означим с u тяхното произведение. Ако подмножеството D_i е непразно, с d_i да означим делителя на u, който се получава, като умножим простите числа, които имат индексите на елементите, принадлежащи на D_i; ако D_i е празно, нека $d_i = 1$. Когато пък е даден произволен аритметичен модел с „универсум" u (без кратни множители!), да означим с D множеството на простите множители на u, а с D_i — множеството на простите множители, на които се разлага произволен негов делител d_i (ако $d_i = 1$, полагаме $D_i = \emptyset$). Тогава, каквато и подформула $A(x)$ да вземем, A^{**} ще съвпада с множеството на простите на множители на онзи делител на u, който се получава като аритметична стойност на $A(x)$. Очевидно е, че той ще е равен на u (т. е. $(\forall x)A(x)$ ще е аритметично вярна) точно тогава, когато $A^{**} = U$ (т. е., когато стойността на $(\forall x)A(x)$ е истина, независимо каква е оценката на променливата). Аналогично е разглеждането на $(\exists x)A(x)$. Следователно всяка подформула от вида $(Qx)A(x)$ ще бъде аритметично вярна точно тогава, когато е вярна при съответната интерпретация с множества.

В заключение нека отбележим, че ако разгледаме стандартния превод на силогистиката в едноместното предикатно смятане, т. е. ако заместим $s\mathcal{A}p$ с $(\forall x)(S(x) \Rightarrow P(x))$ и $s\mathcal{I}p$ с $(\exists x)(S(x) \cap P(x) \neq \emptyset)$, току-що въведеният модел на едноместното предикатно смятане ще даде схоластичната интерпретация. Бихме могли да построим, разбира се, дуален модел на предикатното смятане, аналогичен на лайбницовата аритметична интерпретация, но той ще е равносилен на схоластичната интерпретация на дуалните предикатни формули. Един отворен въпрос е как биха могли да се интерпретират по естествен начин двуместните релации в логиката.

Литература

[1] Булос Дж., Джефри Р., *Вычислимость и логика*, Мир, М., 1994 (*превод на*: Boolos G., Jeffrey R., *Computability and Logic*, Cambridge Univ. Press, 3rd ed. 1989).

[2] Лейбниц Г. В., *Сочинения в четырех томах*, т. 3, АН СССР, Мысль, М., 1984 (*преводи от* [6]).

[3] Лукасевич Я., *Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики*, М., 1959 (*превод на*: Łukasiewicz J., *Aristotle's Syllogistic from the Standpoint of Modern Formal Logic*, Clarendon Press, Oxford, 2nd ed. 1957).

[4] Чёрч А., *Введение в математическую логику*, т. 1, М., 1960 (*превод на:* Church A., *Introduction to Mathematical Logic*, Princeton, 1956).

[5] Couturat L., *La logique de Leibniz d'après des documents inédits*, F. Alcan, Paris, 1901 (*reprint*: Olms, Hildesheim, 1969).

[6] Couturat L., *Opuscules et fragments inédits de Leibniz, éxtraits des manuscrits de la Bibliothèque royale de Hanovre*, F. Alcan, Paris, 1903 (*reprint*: Olms, Hildesheim, 1961).

[7] Leibniz G. W., *Sämtliche Schriften und Briefe,* Reihe 6, *Philosophische Schriften,* Hrsg. von der Leibniz-Forschungsstelle der Universität Münster, Bd. 4, 1677–Juni 1690, Akademie Verlag, Berlin 1999.

[8] Skolem T., "Über gewisse Satzfunktionen in der Arithmetik", *Skrifter utgitt av det Norske Videnskaps-Akademie i Oslo*, **7**, 1930.

[9] Słupecki J., "Z badań nad sylogistiką Aristotelesa", *Travaux de la Société des Science et des Lettres de Wrocław, sér. 6*, Wrocław, 1948 (*in Polish*) (= "On Aristotelian syllogistic", *Studia Philosophica*, **4**, Poznań, 1949/50, p. 275–300).

[10] Sotirov V., "Aritmetizations of syllogistic à la Leibniz", *Journal of Applied Non-Classical Logics*, **9**, n. 2-3, 1999, p. 387–405.

[11] Sotirov V., "Monadic predicate calculus arithmetized à la Leibniz", Logic Colloquium '99, Utrecht, August 1-6, 1999, Proceedings (*to appear*).