Труды Международной Конференции по конструктивной теории функций Варна, 19—25 мая 1970

Proceedings of the International Conference on Constructive Function Theory, Varna, May 19—25, 1970

ПОРЯДОК ПРИБЛИЖЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ ЛИНЕЙНЫМИ МЕТОДАМИ СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ ФУРЬЕ

В. А. Баскаков

Резюме. Пусть $L_n = L_n(f;x;\lambda)$ — линейный метод суммирования рядов Фурье; U — некоторый класс методов; E — некоторое множество непрерывных функций $f(x)$. Находится точный порядок характеристики приближения

$$\varrho_n(E,U) = \sup_{L_n\in U}\ \sup_{f\in E}\ \max_x |L_n(f;x;\lambda) - f(x)|$$

для классов методов, удовлетворяющих условию С. Б. Стечкина

$$n^{p-1}\sum_{k=0}^{n} |\Delta\lambda_k^{(n)}|^p \le C, \quad p>1,$$

и некоторых других, когда в качестве множества E выступают классы H_ω, $C(F)$ и классы сопряженных функций $\widetilde{H}(\omega)$.

Будем рассматривать треугольные методы суммирования рядов Фурье

$$L_n(f;x;\Lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)U_n(t)dt,$$

$$U_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)}\cos kt; \quad \Lambda = \|\lambda_k^{(n)}\|; \quad \lambda_0^{(n)} = 1; \quad \lambda_k^{(n)} = 0, \quad k>n.$$

В настоящее время существует ряд условий, которые можно налагать на матрицу Λ, чтобы для любой функции $f(x)\in C_{2\pi}$ равномерно для всех x

(1) $$L_n(f;x;\Lambda) \rightrightarrows f(x).$$

Эти условия можно разбить на две группы: условия, гарантирующие определенную скорость сходимости для некоторых классов непрерывных функций (например, для классов H_ω) и условия, не гарантирующие какой-либо скорости сходимости.

Так первое полученное условие — условие С. М. Никольского [1], — как нетрудно убедиться (см. [2]), не гарантирует какой-либо скорости сходимости для самых хороших функций. Тем более не гарантируют никакой скорости сходимости такие известные условия, как условия Б. С. Надь [3], А. В. Ефимова [4], С. А. Теляковского [5] и др., обобщающие условие С. М. Никольского.

В последнее время получены условия иного типа. Они и будут являться предметом рассмотрения.

Пусть $\Lambda(U)$ обозначает класс матриц Λ, удовлетворяющих некоторому условию U, и $\mathfrak{M}_C$ обозначает некоторый класс непрерывных функций. Величина

$$A_n(\mathfrak{M}_C;\ U)=\sup_{\Lambda\in\Lambda(U)}\ \sup_{f\in\mathfrak{M}_C}\ \max_x |L_n(f;x;\Lambda)-f(x)|$$

представляет собой гарантированную скорость приближения для всех функций класса $\mathfrak{M}_C$, осуществляемую всеми линейными методами суммирования, удовлетворяющими условию U.

Естественно, что $A_n(\mathfrak{M}_C;\ U)$ представляет интерес только для тех условий U, для которых она стремится к нулю при $n\to\infty$.

1. Условие U_1 С. Б. Стечкина (случай $p=2$ принадлежит Г. А. Фомину [6]):

$$(n+1)^{p-1}\sum_{k=0}^{n}|\Delta\lambda_k^{(n)}|^p\leq C^*;\quad p>1;\quad C^*=\text{const}.$$

Теорема 1. Существуют две положительные константы K_1 и K_2, зависящие только от p и от C^*, такие, что для всех n и любого модуля непрерывности $\omega(\delta)$

$$K_1\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\omega^q\left(\frac{1}{k}\right)\right\}^{\frac{1}{q}}\leq A_n(H_\omega;\ U_1)\leq K_2\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\omega^q\left(\frac{1}{k}\right)\right\}^{\frac{1}{q}},$$

где $q=\frac{p}{p-1}$.

Пусть $F=\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$, $F_n\downarrow 0$ и $E_n(f)$ — наилучшее приближение функции $f(x)$ тригонометрическими многочленами порядка $\leq n$. Обозначим через $C(F)$ класс функций $f(x)\in C_{2\pi}$, для которых $E_n(f)\leq F_n$, $n=0, 1, \ldots$

Теорема 2. Существуют две положительные константы K_3 и K_4, зависящие только от p и от C^*, такие, что для любого класса $C(F)$ и для всех натуральных n

$$K_3\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}F_k^q\right\}^{\frac{1}{q}}\leq A_n(C(F);U_1)\leq K_4\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}F_k^q\right\}^{\frac{1}{q}},$$

где $q=\frac{p}{p-1}$. Доказательства теорем 1 и 2 опубликованы в работе [13].

2. Условие U_2 Г. А. Фомина ([7], теорема 8). Пусть для каждого n найдется такое натуральное число m_n, $m_n<n$, $m_n\to\infty$, $n\to\infty$, что для некоторого $r>1$

$$m_n^{r-1}\sum_{k=0}^{m_n}|\Delta\lambda_k^n|^r\leq C_1^*,\ C_1^*>1,$$

где $\Delta\lambda_{m_n}^{(n)} = \lambda_{m_n}^{(n)}$ и при некотором p, $1 < p \leqq 2$,

$$\sum_{k=m_n+1}^{n} |\Delta\lambda_k^{(n)}|^p \leqq C_2^*; \quad C_1^*, C_2^* = \text{const}.$$

Это условие несколько обобщает условие С. Б. Стечкина. Как показал Г. А. Фомин, при выполнении условия U_2 имеет место сходимость (1).

Докажем несколько вспомогательных предложений.

Лемма (Лейндлер [8]). Для любых m_1 и m_2 и любого $p > 1$

$$\sum_{k=m_1}^{m_2} |\Delta\lambda_k^{(n)}| \, |S_k(f; x) - f(x)| \leqq C(p) E_{m_1}(f) \left\{ m_2^{p-1} \sum_{k=m_1}^{m_2} |\Delta\lambda_k^{(n)}|^p \right\}^{\frac{1}{p}},$$

где $S_k(f; x)$ — частные суммы ряда Фурье функции $f(x)$ и константа $C(p)$ зависит только от p.

Эта лемма содержится в доказательстве теоремы 1 указанной работы.

Лемма А. Если условие U_1 выполнено для некоторого $p > 1$, то для сильного метода суммирования

$$U_n(f; x) = \sum_{k=0}^{n} \Delta\lambda_k^{(n)} \, |S_k(f; x) - f(x)|$$

справедливо неравенство

$$U_n(f; x) \leqq C_1 \left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} E_k^q(f) \right\}^{\frac{1}{q}}, \quad q = \frac{p}{p-1},$$

где константа C_1 зависит только от p и C^*.

Доказательство. Пусть v — такое целое число, что $2^{v-1} \leqq n < 2^v$. Тогда

$$U_n(f; x) = \sum_{k=0}^{1} |\Delta\lambda_k^{(n)}| \, |S_k(f; x) - f(x)|$$

$$+ \sum_{i=0}^{v-2} \sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}} |\Delta\lambda_k^{(n)}| \, |S_k(f; x) - f(x)| + \sum_{k=2^{v-1}+1}^{n} |\Delta\lambda_k^{(n)}| \, |S_k(f; x) - f(x)|.$$

Применяя лемму Лейндлера и неравенство Гельдера, после несложных вычислений получаем утверждение леммы.

Для $1 < p \leqq 2$ и для линейных методов суммирования лемма А была приведена Г. А. Фоминым в докладе на семинаре по теории функций в МАДИ в 1966 г.

Лемма В. Если $f(x) \in C_{2\pi}$, $q \geqq 2$, то

$$\text{(2)} \qquad \sum_{k=n}^{\infty} |a_k|^q + |b_k|^q \leqq C_1 \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} E_k(f) \right)^q, \quad C_1 \equiv C_1(q),$$

где a_k и b_k — коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Доказательство можно провести методом С. Б. Стечкина, использованном Н. К. Бари ([9], стр. 609—610) для получения близкого к (2) неравенства.

Так как

$$f(x+h)-f(x-h)\approx 2\sum_{k=1}^{\infty}(b_k\cos kx-a_k\sin kx)\sin kh,$$

то, применяя теорему Хаусдорфа—Юнга (см., например, [9] стр. 211), получим

$$2^q\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|^q+|b_k|^q)\,|\sin kh|^q\leq\left\{\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(x+h)-f(x-h)\,|^p dx\right\}^{\frac{q}{p}}.$$

Проинтегрируем обе части этого неравенства по h в пределах $[0,\pi/n]$:

$$(3)\ 2^q\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|^q+|b_k|^q)\int_0^{\pi/n}|\sin kh|^q\,dh\leq\int_0^{\pi/n}\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+h)-f(x-h)|^p dx\right\}^{\frac{q}{p}}dh.$$

Оценим интеграл

$$\int_0^{\pi/n}|\sin kh|^q\,dh=\frac{1}{k}\int_0^{\pi k/n}|\sin z|^q\,dz.$$

Пусть $l\geqq 1$ — некоторое число. Для k, $l\leqq k/n<l+1$, имеем

$$\int_0^{\pi/n}|\sin kh|^q\,dh\geqq\frac{l}{n(l+1)}\int_0^{\pi}|\sin z|^q\,dz.$$

Если $k\geqq n$, то найдется такое $l\geqq 1$, что $l\leqq k/n<l+1$ и так как $l\geqq 1$, $l/(l+1)\geqq 1/2$, то

$$(4)\qquad \int_0^{\pi/n}|\sin kh|^q\,dh\geqq\frac{1}{2n}\int_0^{\pi}|\sin z|^q\,dz\equiv\frac{1}{2\pi}\,I^{(q)}.$$

Из (3) и (4) следует

$$2^{q-1}I^{(q)}\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{\infty}|a_k|^q+|b_k|^q\leqq C_2\frac{1}{n}\omega^q\left(\frac{1}{n},f\right).$$

Используя неравенство С. Б. Стечкина [10]

$$\omega\left(\frac{1}{n},f\right)\leqq C_3\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}E_k(f),$$

получаем утверждение леммы.

Теорема 3. Если выполнено условие U_2, то для любой функции $f(x)\in C_{2\pi}$

$$\sup_x|L_n(f;x;\Lambda)-f(x)|\leqq C_4\left\{\frac{1}{m_n+1}\sum_{k=0}^{m_n}E_k^{r'}(f)\right\}^{\frac{1}{r'}},\ r'=\frac{r}{r-1},$$

где константа C_4 не зависит ни от f, ни от n.

Доказательство. По определению

$$L_n(f;x;\Lambda)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{m_n}\lambda_k^{(n)}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)+\sum_{k=m_n+1}^{n}\lambda_k^{(n)}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

$$=L_{n,m_n}(f;x;\Lambda)+R_{m_n}(f;x;\Lambda).$$

Следовательно,

$$|L_n(f;x;\Lambda)-f(x)|\leqq|L_{n,m_n}(f;x;\Lambda)-f(x)|+|R_{m_n}(f;x;\Lambda)|.$$

На основании леммы A

$$|L_{n,m_n}(f;x;\Lambda)-f(x)|\leqq C_5\left\{\frac{1}{m_n+1}\sum_{k=0}^{m_n}E_k^{r'}(f)\right\}^{\frac{1}{r'}}.$$

Применяя неравенство Гельдера и лемму B, получим

$$|R_{m_n}(f;x;\Lambda)|\leqq\left\{\sum_{k=m_n+1}^{n}|\lambda_k^{(n)}|^p\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\sum_{k=m_n+1}^{n}|a_k|^q+|b_k|^q\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqq C_6\left\{\frac{1}{m_n+1}\sum_{k=0}^{m_n}E_k(f)\right\}\leqq C_6\left\{\frac{1}{m_n+1}\sum_{k=0}^{m_n}E_k^{r'}(f)\right\}^{\frac{1}{r'}}.$$

Теорема следует из последних трех неравенств.

Теорема 4. Существуют две константы K_5 и K_6, не зависящие ни от n, ни от F, такие, что для любого класса $C(F)$ и для всех n

$$K_5\left\{\frac{1}{m_n+1}\sum_{k=0}^{m_n}E_k^{r'}(f)\right\}^{\frac{1}{r'}}\leqq A_n(C(F);U_2)\leqq K_6\left\{\frac{1}{m_n+1}\sum_{k=0}^{m_n}E_k^{r'}(f)\right\}^{\frac{1}{r'}},$$

где $r'=\frac{r}{r-1}$.

Доказательство. Оценка сверху следует из теоремы 3. Для получения оценки снизу рассмотрим матрицу Λ_1, образованную числами

$$\lambda_k^{(n)}=\begin{cases}1-\gamma(m_n+1)^{-\frac{1}{r'}}S_n^{-\frac{1}{r}}\sum\limits_{i=0}^{k-1}F_i^{\frac{r'}{r}}, & k=0,1,\ldots,\left[\frac{m_n}{2}\right];\\(1-Q_n)\left(m_n-\left[\frac{m_n}{2}\right]\right)^{-1}(m_n-k), & k=\left[\frac{m_n}{2}\right]+1,\ldots,m_n;\\0, & k=m_n+1,\ldots,n,\end{cases}$$

где $S_n=\sum\limits_{k=0}^{m_n}F_k^{r'}$;

$$Q_n=\gamma(m_n+1)^{-\frac{1}{r'}}S_n^{-\frac{1}{r}}\sum_{i=0}^{\left[\frac{m_n}{2}\right]-1}F_i^{\frac{r'}{r}}\leq\gamma(m_n+1)^{-\frac{1}{r'}}S_n^{-\frac{1}{r}}\left\{\sum_{i=0}^{\left[\frac{m_n}{2}\right]-1}F_i^{r'}\right\}^{\frac{1}{r}}\left(\left[\frac{m_n}{2}\right]\right)^{\frac{1}{r'}}\leq\gamma;$$

γ — константа, которая будет выбрана позднее.

Для чисел $\lambda_k^{(n)}$ имеем

$$\Delta\lambda_k^{(n)}=\begin{cases}\gamma(m_n+1)^{-1/r'}S_n^{-1/r}F_k^{r'/r}, & k=0,1,\ldots,\left[\frac{m_n}{2}\right]-1;\\ (1-Q_n)\left(m_n-\left[\frac{m_n}{2}\right]\right)^{-1}, & k=\left[\frac{m_n}{2}\right],\ldots,m_n-1;\\ 0, & k=m_n,\ldots,n.\end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{m_n}|\Delta\lambda_k^{(n)}|^r=\gamma^2(m_n+1)^{-\frac{r}{r'}}S_n^{-1}\sum_{k=0}^{\left[\frac{m_n}{2}\right]-1}F_k^{r'}+(1-Q_n)^r\left(m_n-\left[\frac{m_n}{2}\right]\right)^{1-r}$$

$$\leq\gamma^r(m_n+1)^{1-r}+(1-Q_n)^r(m_n+1)^{1-r}.$$

Из этих двух неравенств следует, что константу γ можно подобрать таким образом, чтобы $Q_n<1$ и чтобы выполнялось условие U_2.

Рассмотрим функцию $f_1(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(F_{k-1}-F_k)\cos kx$, $f_1(x)\in C(F)$.

Для этой функции

$$f_1(0)-L_n(f_1;0;\Lambda_1)=\sum_{k=1}^{\infty}(F_{k-1}-F_k)-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)}(F_{k-1}-F_k)$$

$$=F_0-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)}(F_{k-1}-F_k).$$

Применим к последней сумме преобразование Абеля:

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)}(F_{k-1}-F_k)=\sum_{k=1}^{m_n-1}\Delta\lambda_k^{(n)}(F_0-F_k)+\lambda_{m_n}^{(n)}(F_0-F_{m_n})$$

$$=\sum_{k=1}^{m_n-1}F_0\Delta\lambda_k^{(n)}-\sum_{k=1}^{m_n-1}F_k\Delta\lambda_k^{(n)}=F_0\lambda_1^{(n)}-\sum_{k=1}^{m_n-1}F_k\Delta\lambda_k^{(n)}.$$

Так как $Q_n<1$, то

$$f_1(0)-L_n(f_1;0;\Lambda_1)=\sum_{k=0}^{m_n-1}F_k\Delta\lambda_k^{(n)}\geq\sum_{k=0}^{\left[\frac{m_n}{2}\right]-1}F_k\Delta\lambda_k^{(n)}$$

$$=\gamma(m_n+1)^{-\frac{1}{r'}}S_n^{-\frac{1}{r}}\sum_{k=0}^{\left[\frac{m_n}{2}\right]-1}F_k^{r'}\geq C_7\left\{\frac{1}{m_n+1}\sum_{k=0}^{m_n}F_k^{r'}\right\}^{\frac{1}{r'}}.$$

Теорема доказана.

3. В работе Г. А. Фомина [11] приведено следующее условие, идея применения которого принадлежит П. П. Коровкину, для ограниченности констант Лебега линейных методов суммирования: Если

1) $$|\lambda_k^{(n)}| \leqq C_8,$$

2) $$n^{r-1}\int_0^{\pi} t^r U_n^2(t)\,dt \leqq C_9, \quad 1 < r \leqq 2,$$

C_8 и C_9 — абсолютные постоянные, то константы Лебега

$$L_n(\Lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |U_n(t)|\,dt$$

ограничены в совокупности.

Приведем несколько более общие рассуждения, чем в упомянутой статье.

Лемма (П. П. Коровкин). Если числа a_n, $n = 1, 2, \ldots$, таковы, что

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{a_n} |U_n(t)|\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{a_n}^{\pi} |U_n(t)|\,dt = \frac{1}{2}L_n(\Lambda),$$

то $a_n \geqq \pi/2(2n+1)$.

Доказательство. Пусть $\lambda^{(n)} = \max\limits_k |\lambda_k^{(n)}|$. Тогда, с одной стороны,

$$L_n(\Lambda) = \frac{4}{\pi}\int_0^{a_n} |U_n(t)|\,dt \leqq \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2}+n\right)\lambda^{(n)} \cdot a_n.$$

С другой стороны, для любого k, $0 \leqq k \leqq n$,

$$L_n(\Lambda) \geqq \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kt\, U_n(t)\,dt\right| = |\lambda_k^{(n)}|.$$

Следовательно, $L_n(\Lambda) \geqq \lambda^{(n)}$. Утверждение леммы вытекает из полученных неравенств.

Лемма С. Если выполнено одно из трех следующих условий:

а) $$\int_0^{\pi} t^{rq} |U_n(t)|^q\,dt = O(1), \; r > 0, \; q > 1, \; rp > 1, \; p = \frac{q}{q-1};$$

б) $$\ln^{q-1} n \int_0^{\pi} t^{q-1} |U_n(t)|^q\,dt = O(1), \; q > 1;$$

в) $$n^{\left(r-\frac{1}{p}\right)q}\int_0^{\pi} t^{rq} |U_n(t^q)|\,dt = O(1), \; r > 0, \; q > 1, \; rp > 1,$$

то константы Лебега ограничены в совокупности.

Доказательство. Используя лемму П. П. Коровкина и применяя неравенство Гельдера, получим

$$L_n(\Lambda)=\frac{4}{\pi}\int\limits_{\alpha_n}^{\pi}|U_n(t)|\,dt=\frac{4}{\pi}\int\limits_{\alpha_n}^{\pi}\frac{1}{t^r}\,t^r\,|U_n(t)|\,dt$$

$$\leq\frac{4}{\pi}\left\{\int\limits_{\frac{\pi}{2(2n+1)}}^{\pi}t^{-rp}\,dt\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int\limits_{0}^{\pi}t^{rq}\,|U_n(t)|^q\,dt\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Вычисляя первый интеграл справа, получаем лемму.

Лемма D. Если выполнено условие б) или в) леммы С, то

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_k^{(n)}=1\,;\quad k=1,2,\ldots$$

Доказательство.

$$|1-\lambda_k^{(n)}|=\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(1-\cos kt)\,U_n(t)dt\right|=\left|\frac{4}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\sin^2\frac{kt}{2}\,U_n(t)dt\right|$$

$$\leq\frac{4}{\pi}\left|\int\limits_{0}^{1/n}\sin^2\frac{kt}{2}\,U_n(t)\,dt\right|+\frac{4}{\pi}\left|\int\limits_{1/n}^{\pi}\sin^2\frac{kt}{2}\,U_n(t)dt\right|$$

$$\leq\frac{1}{\pi}\,\frac{k^2}{n^2}\int\limits_{0}^{\pi}|U_n(t)|\,dt+\frac{k^2}{\pi}\int\limits_{1/n}^{\pi}t^2\,|U_n(t)|\,dt.$$

Так как при выполнении условия б) или в) леммы С константы Лебега ограничены, то

$$|1-\lambda_k^{(n)}|\leq\frac{C_{10}k^2}{n^2}+\frac{k^2}{\pi}\int\limits_{1/n}^{\pi}t^2\,|U_n(t)|\,dt.$$

Оценим дважды интеграл, стоящий справа, применяя неравенство Гельдера:

1) так как $p>1$, то

$$\int\limits_{1/n}^{\pi}t^2\,|U_n(t)|\,dt=\int\limits_{1/n}^{\pi}t^{2-\frac{1}{p}}\,t^{\frac{1}{p}}\,|U_n(t)|\,dt$$

$$\leq\left\{\int\limits_{1/n}^{\pi}t^{\left(2-\frac{1}{p}\right)p}\,dt\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int\limits_{1/n}^{\pi}t^{\frac{q}{p}}\,|U_n(t)|^q\,dt\right\}^{\frac{1}{q}}\leq C_{11}\left\{\int\limits_{0}^{\pi}t^{q-1}\,|U_n(t)|^q dt\right\}^{\frac{1}{q}};$$

2) $$\int\limits_{1/n}^{\pi}t^2\,|U_n(t)|\,dt=\int\limits_{1/n}^{\pi}t^{2-r}\,t^r\,|U_n(t)|\,dt\leq\left\{\int\limits_{1/n}^{\pi}t^{(2-r)p}\,dt\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int\limits_{0}^{\pi}t^{rq}\,|U_n(t)|^q\,dt\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Так как

$$\left\{\int_{1/n}^{\pi} t^{(2-r)p}\,dt\right\}^{\frac{1}{p}}=\begin{cases} O(1), & (2-r)p>-1, \\ O\left(\ln^{\frac{1}{p}} n\right), & (2-r)p=-1, \\ O\left(n^{r-2-\frac{1}{p}}\right), & (2-r)p<-1, \end{cases}$$

то лемма следует из полученных неравенств.

Следствие. Если выполнено условие б) или в) леммы C, то для любой функции $f(x)\in C_{2\pi}$ равномерно для всех x

$$L_n(f;x;\Lambda)\rightrightarrows f(x).$$

Это утверждение является следствием лемм C и D и теоремы Банаха о сходимости последовательности линейных операторов.

Обозначим через U_3 условие, которое заключается в том, что

$$n^{\left(r-\frac{1}{p}\right)q}\int_0^{\pi} t^{rq}\,|U_n(t)|^q dt\leq C_q,$$

где $q>1$, $p=\frac{q}{q-1}$, $\max\left\{\frac{1}{p},\ \frac{1}{q}\right\}<r<\frac{2}{p}$,

$$C_q=\max\left\{\frac{\pi^{rq+1}}{2(rq+1)}+\frac{2^{q-1}\pi^{2q}}{(2-r)q-1},\ \pi^q 2^{q+rq}\int_0^{\infty}\frac{\sin^{2q}z}{z^{(2-r)q}}dz\right\}+1.$$

Теорема 5. Существуют такие постоянные K_7 и K_8, не зависящие ни от n, ни от $\omega(\delta)$, что для любого класса H_ω и для всех n

$$K_7\left\{n^{1-rp}\int_{1/n}^{\pi}\frac{\omega^p(t)}{t^{rp}}\,dt\right\}^{\frac{1}{p}}\leq A_n(H_\omega;\ U_3)\leq K_8\left\{n^{1-rp}\int_{1/n}^{\pi}\frac{\omega^p(t)}{t^{rp}}dt\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Доказательство. Рассмотрим разность

$$|L_n(f;x;\Lambda)-f(x)|=\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+t)-f(x)]U_n(t)dt\right|\leq\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\omega(t)\,|U_n(t)|\,dt$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{1/n}\omega(t)\,|U_n(t)|\,dt+\frac{2}{\pi}\int_{1/n}^{\pi}\omega(t)\,|U_n(t)|\,dt\equiv I_1+I_2.$$

Так как нормы операторов ограничены, то

$$I_1\leq\frac{2}{\pi}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\int_0^{\pi}|U_n(t)|\,dt\leq C_{12}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

Применяя неравенство Гельдера и используя условие U_3, получаем

$$I_2=\frac{2}{\pi}\int\limits_{1/n}^{\pi}\frac{\omega(t)}{t^r}\,t^r\,|U_n(t)|\,dt$$

$$\leq\frac{2}{\pi}\left\{\int\limits_{1/n}^{\pi}\frac{\omega^p(t)}{t^{rp}}\,dt\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int\limits_{0}^{\pi}t^{rq}\,|U_n(t)|^q\,dt\right\}^{\frac{1}{q}}\leq C_{13}\left\{n^{1-rp}\int\limits_{1/n}^{\pi}\frac{\omega^p(t)}{t^{pr}}\,dt\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Так как $\left\{n^{1-rp}\int\limits_{1/n}^{\pi}\frac{\omega^p(t)}{t^{rn}}\,dt\right\}^{\frac{1}{p}}\geq C_{14}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)$, то оценка сверху для $A_n(H_\omega, U_3)$ следует из полученных соотношений.

Для получения оценки снизу для $A_n(H_\omega; U_3)$ рассмотрим матрицу Λ_2, составленную из чисел

$$\lambda_k^{(n)}=\begin{cases}1-AI_n^{-\frac{1}{q}}\,n^{-\left(r-\frac{1}{p}\right)}\sum\limits_{i=1}^{k}\dfrac{\omega^{p/q}\left(\frac{1}{i}\right)}{i^{2-rp}}, & k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ [B.\,n]+1,\\[2ex] \lambda_{[B.n]+1}^{(n)}\,\dfrac{n-k}{n-[B.\,n]-1}, & K\,[B.\ n]+2,\ \ldots,\ n.\end{cases}$$

где $I_n=\int\limits_{1/n}^{\pi}t^{-rp}\omega^p(t)dt\sim\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\omega^p\left(\frac{1}{i}\right)}{i^{2-rp}}$, а коэффициенты A и B подбираются таким образом, чтобы было выполнено условие U_3.

Пусть $f_2(t)-2\pi$-периодическая функция, которая на отрезке $[0,\pi]$ совпадает с $\omega(t)$. Оценивая снизу $|L_n(f_2;0;\Lambda_2)-f_2(0)|$, получим нужную оценку снизу для $A_n(H_\omega; U_3)$.

4. Условие U_4. Пусть функция $\lambda(t)\in Lip\alpha$, $\alpha>1/2$, $\lambda(0)=1$, $\lambda(\pi)=0$ $\lambda_k^{(n)}=\lambda\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right)$. Р. М. Тригуб показал [12], что при этом условии нормы операторов $L_n(\Lambda)$ равномерно ограничены.

Теорема 6.

$$A_n(H_\omega; U_4)\leq K_9\left(n^{1-2\alpha}\int\limits_{n^{1-2\alpha}}^{\pi}\frac{\omega^2(t)}{t^2}\,dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

где K_9 не зависит ни от n, ни $\omega(\delta)$.

Доказательство. Пусть $f(x)\in H_\omega$. Оценим разность

$$|L_n(f;x;\Lambda)-f(x)|=\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}[f(x+t)-f(x)]\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)}\cos kt\right)dt\right|$$

$$\leq\frac{2}{\pi}\left(\int\limits_{0}^{n^{1-2\alpha}}+\int\limits_{n^{1-2\alpha}}^{\pi}\right)\omega(t)\left|\sum_{k=0}^{n}\Delta\lambda_k^{(n)}\frac{\sin(2k+1)\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}\right|dt\equiv I_1+I_2.$$

Так как нормы операторов $L_n(\Lambda)$ равномерно ограничены, то

$$I_1 \leq \frac{2}{\pi}\,\omega\left(n^{1-2\alpha}\right)\int_0^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{n}\Delta\lambda_k^{(n)}\frac{\sin(2k+1)\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}\right|dt \leq C_{15}\omega(n^{1-2\alpha}).$$

Применяя неравенство Коши—Буняковского и используя неравенство $|\Delta\lambda_k^{(n)}| \leq C_{16}/n^{\alpha}$, вытекающее из условия U_4, получаем

$$I_2 \leq \left(\int_{n^{1-2\alpha}}^{\pi}\frac{\omega^2(t)}{t^2}dt\cdot\int_0^{\pi}\left(\sum_{k=0}^{n}\Delta\lambda_k^{(n)}\sin(2k+1)\frac{t}{2}\right)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{n}(\Delta\lambda_k^{(n)})^2\int_{n^{1-2\alpha}}^{\pi}\frac{\omega^2(t)}{t^2}dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq C_{16}\left(n^{1-2\alpha}\int_{n^{1-2\alpha}}^{\pi}\frac{\omega^2(t)}{t^2}dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Так как

$$n^{1-2\alpha}\int_{n^{1-2\alpha}}^{\pi}\frac{\omega^2(t)}{t^2}\,dt \geq C_{17}\omega^2(n^{1-2\alpha}),$$

то теорема следует из полученных неравенств.

5. Условие U_5. Пусть числа $\lambda_k^{(n)}$ таковы, что $\lambda_0^{(n)}=1$, $\lambda_{n+1}^{(n)}=0$,

$$\sum_{k=0}^{n}|\Delta\lambda_k^{(n)}| \leq C_3^*,\quad |\lambda_{k_1}^{(n)}-\lambda_{k_2}^{(n)}| \leq C_4^*\left|\frac{k_1-k_2}{n}\right|^{\alpha},\quad \alpha>0.$$

Как показал Р. М. Тригуб [12], при этом условии нормы операторов $L_n(\Lambda)$ также равномерно ограничены.

Теорема 7. Существует такая константа K_{10}, независящая ни от $\omega(\delta)$, ни от n, что для любого класса H_ω и любого n

$$A_n(H_\omega; U_5) \leq K_{10}\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\int_{n^{-\alpha}}^{\pi}\frac{\omega^2(t)}{t^2}\,dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 6.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. М. Никольский. О линейных методах суммирования рядов Фурье. *Известия АН СССР*, **12** (1948), 259—278.
2. В. А. Баскаков. О порядке приближения непрерывных функций некоторыми линейными методами суммирования рядов Фурье. *Известия ВУЗ'ов, Математика* (1969), № 7, 20—27.
3. B. Sz.-Nagy. Methodes de sommation des series de Fourier. *Acta Litt. ac Scient. Regiae Univ. Szeged*, **12** (1960), 204—210.
4. А. В. Ефимов. О линейных методах суммирования рядов Фурье. *Известия АН СССР*, **24** (1960), 743—756.

5. С. А. Теляковский. Условия интегрируемости тригонометрических рядов и их приложение к изучению линейных методов суммирования рядов Фурье. *Известия АН СССР*, **28** (1964), 1209—1236.
6. Г. А Фомин. О линейных методах суммирования рядов Фурье. *Матем. сборник*, **65** (1964), 144—152.
7. Г. А. Фомин. О линейных методах суммирования рядов Фурье—Лебега. *Матем. сборник*, **74** (1967) 28—38.
8. L. Leindler. Über die Approximation im starken Sinne. *Acta Math. Acad. Scient. Hung.*, **16** (1965), 355—362.
9. Н. К. Бари. Тригонометрические ряды. Москва, 1961.
10. С. Б. Стечкин. О порядке приближения непрерывных функций. *Известия АН СССР*, **15** (1951), 219—242.
11. Г. А. Фомин. О константах Лебега линейных методов суммирования рядов Фурье. *Известия АН СССР*, **31** (1967), 1133—1148.
12. Р. М. Тригуб. Линейные методы суммирования и абсолютная сходимость рядов Фурье. *Известия АН СССР*, **32** (1968), 24—49.
13. В. А. Баскаков. О порядке приближения непрерывных функций некоторыми линейными средними их рядов фурье. *Матем, заметки*. **9** (1971), 617—627.

ул. Панферова, д. 11, кв. 18
Москва В-261 СССР

Поступило 6 июля 1970