Труды Международной Конференции по конструктивной теории функций Варна, 19—25 мая, 1970

Proceedings of the International Conference on Constructive Function Theory, Varna, May 19—25, 1970

ПРИБЛИЖЕНИЕ В L_p МНОГОЧЛЕНАМИ ФИКСИРОВАННОЙ СТЕПЕНИ СЛЕДОВ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ НА НЕГЛАДКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

О. В. Бесов

Резюме. Пусть $x=(x', x'')\in E^n$, где $x'\in E^m$, $x''\in E^{n-m}$, $1\leq m<n$, $1<p<\infty$; s, l целые, $0\leqq s<l-(n-m)/p<s+1$, $\mu=l-(n-m)/p+m/p$, $\delta>0$; $I=\{x: x''=\gamma(x'), x'\in E^m\}$, $\gamma(x')$ удовлетворяет условию Липшица, $\Gamma(\delta; y)=\{z\in\Gamma, |z-y|<\delta\}$.

Показывается, что

$$\sum_{|\beta|\leqq s}\left\{\int\limits_{\Gamma}\int\limits_{\Gamma(\delta;y)} |f^{(\beta)}(z)-P_s^{(\beta)}(z-y; y)|^p\,|z-y|^{(|\beta|-\mu)p}dz'dy'\leqq C\sum_{|\alpha|\leqq l}\left\{\int\limits_{E^n\setminus\Gamma}|f^{(\alpha)}(x)|^p dx\right\}^{\frac{l}{p}}\right.$$

для некоторых многочленов (Тейлора) $P_s(x; y)$ по степеням $x\in E^n$.

Обсуждаются обращение этого предложения и близкие вопросы.

Пусть E^n — эвклидово пространство точек $x=(x', x'')$, $x'\in E^m$, $x''\in E^{n-m}$, $1\leq m<n$, $1<p<\infty$, s, l — целые, $0\leq s<l-(n-m)/p<s+1$,

$$\mu=l-(n-m)/p+m/p,\ \delta>0,$$

$$\Gamma=\{x: x''=\gamma(x'), x'\in E^n\}, \tag{1}$$

где $\gamma(x')$ удовлетворяет условию Липшица, т. е.

$$|\gamma(x')-\gamma(y')|\leqq M_0|x'-y'|,\ x'\in E^m, y'\in E^m, \tag{2}$$

$$\Gamma(\delta; y)=\{z: z\in\Gamma, |z-y|<\delta\}.$$

Пусть $\Omega=E^n\setminus\Gamma$ и

$$\|f\|_\Omega=\left\{\int\limits_\Omega|f(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}},\ 1<p<\infty.$$

Аналогично определяется $\|f\|_\Gamma$. Для мультииндекса $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ с целыми неотрицательными α_i положим

$$|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n,\ x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n},$$

$$D^\alpha f(x)=f^{(\alpha)}(x)=\frac{\partial^\alpha f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Через $P_s(w; f(y))$ будем обозначать многочлен Тейлора для функции $f(x)$ по степеням w, построенный в точке y, т. е.

(3) $$P_s(w;f(y))=\sum_{|\alpha|\leq s}\frac{f^{(\alpha)}(y)}{\alpha!}w^{\alpha},$$

$P_s^{(\alpha)}(w;f(y))$ пусть обозначает производную от $P_s(w;f(y))$ по w.

Все дальнейшее посвящено доказательству неравенства

(4) $$\sum_{|\beta|\leq s}\left\{\int\limits_{\Gamma}\int\limits_{\Gamma(\delta;\,y)}|f^{(\beta)}(z)-P_s^{(\beta)}(z-y;f(y))|^p\,|z-y|^{|\beta|p-\mu p}dz'dy'\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq C\left\{\int\limits_{E^n\setminus\Gamma}|f(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}+C\sum_{|\alpha|=l}\left\{\int\limits_{E^n\setminus\Gamma}|f^{(\alpha)}(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Мы будем пользоваться следующим интегральным представлением типа В. П. Ильина [1]:

(5) $$f(x)=f_r(x)+\sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^r\int\limits_{E^n}h^{l-n-1}\Phi_i\left(\frac{y}{h}\right)D_i^l f(x+y)\,dy\,dh,$$

где усреднение функции f

$$f_r(x)=r^{-n\lambda}\int\Phi_0\left(\frac{y}{r}\right)f(x+y)\,dy,$$

$\Phi_i(y)$ — достаточно гладкие финитные ядра, которые можно считать сосредоточенными в наперед заданном кубе из первого координатного угла, функции $f, D_i^l f, i=1,\ldots,n$, суммируемы со степенью p.

Сокращенно будем писать

(6) $$f(x)=f_r(x)+\sum_{i=1}^{n}f_i(x).$$

Пусть $x\in\Gamma$, $z\in\Gamma$, $v=z-x$. Рассмотрим

(7) $$R^{(\beta)}(z-x;\ f(x))=f^{(\beta)}(z)-P_s^{(\beta)}(z-x;\ f(x))$$

— производную по z от разложения по Тейлору функции f в точке z „из точки x“.

Считая $|\beta|\leq s$, $\bar{s}=s-|\beta|$, оценим $R^{(\beta)}(z-x;\ f_i(x))$, перенося операцию (7) разложения по Тейлору на ядро Φ_i:

$$\left|R^{(\beta)}\left(z-x;\ \Phi_i\left(\frac{x}{h}\right)\right)\right|=\left|\int\limits_0^1\frac{(1-t)^{\bar{s}}}{\bar{s}!}\left(\frac{t}{h}\right)^{|\beta|}\frac{\partial^{\bar{s}+1}}{\partial t^{\bar{s}+1}}\Phi_i^{(\beta)}\left[\frac{x+t(z-x)}{h}\right]dt\right|$$

$$\leq C\sum_{|\alpha|=s+1}\int\limits_0^1\left|\Phi_i^{(\alpha)}\left[\frac{x+t(z-x)}{h}\right]\right|\left(\frac{t}{h}\right)^{|\beta|}dt\left(\frac{|z'-x'|}{h}\right)^{\bar{s}+1}.$$

Этой оценкой будем пользоваться при $|z'-x'|\leq h$.

В случае $|z'-x'|\geq h$ непосредственно ясно, что

$$\left|R^{(\beta)}\left(z-x;\ \Phi_i\left(\frac{x}{h}\right)\right)\right|\leq h^{-|\beta|}\left|\Phi_{i(\beta)}\left(\frac{z}{h}\right)\right|$$

$$+C\sum_{|\beta|\leqq|\alpha|\leqq s} h^{-(\beta)}\left|\Phi_i^{(\alpha)}\left(\frac{x}{h}\right)\right|\left(\left|\frac{z-x}{h}\right|\right)^{-|\beta|+|\alpha|}$$

$$\leqq C_1 h^{-|\beta|}\left(\left|\frac{z'-x'}{h}\right|\right)^s\left[\left|\Phi_i^{(\beta)}\left(\frac{z}{h}\right)\right|+\sum_{|\beta|\leqq|\alpha|\leqq s}\left|\Phi_i^{(\alpha)}\left(\frac{x}{h}\right)\right|\right].$$

С помощью этих оценок получаем теперь

$$|R^{(\beta)}(z-x;\, f_i(x))|\leqq C\int_0^r\int_{E^n} h^{l-n-1-|\beta|}\left(\left|\frac{z'-x'}{h}\right|\right)^s$$

$$\times\left[\left|\frac{z'-x'}{h}\right|\right]_1 \max_{\substack{t\in[0,1]\\ |\beta|\leqq|\alpha|\leqq s+1}}\left|\Phi_i^{(\alpha)}\left[\frac{-y-t(z-x)}{h}\right]\right|\,|D_i^l f(x+y)|\,dydh,$$

где $[a]_1=\min\{a,1\}$ — срезка единицей.

Будем считать, что $|z-x|<\delta$. Тогда

$$|\Phi_i^{(\alpha)}[y-t(z-x)]|\leqq\Phi_\delta(y),\ |\alpha|\leqq s+1,\ 0\leqq t\leqq 1,\ |z'-x'|<\delta,\ z\in\Gamma,\ x\in\Gamma,$$

где $\Phi_\delta(y)$ — непрерывная финитная функция, сосредоточенная в δ — окрестности объединения носителей всех $\Phi_i(y)$.

Будем считать, что носитель $\Phi_\delta(y)$ содержится в наперед заданном кубе из первого координатного угла и внутри единичного шара. Этого всегда можно добиться выбором размеров и положения носителей $\Phi_i(y)$ и достаточно малого числа $\delta>0$. Последняя оценка будет в таком случае иметь вид

(8)
$$|R^{(\beta)}(z-x;\, f_i(x))|\leqq C\int_0^r\int_{E^n} h^{l-n-1-|\beta|}\left(\left|\frac{z'-x'}{h}\right|\right)^s$$

$$\times\left[\left|\frac{z'-x'}{h}\right|\right]_1\Phi_\delta\left(\frac{y}{h}\right)|D_i^l f(x+y)|\,dydh.$$

Положим $v=(v',v''(x)),\ x\in\Gamma,\ x+v\in\Gamma,$

(9)
$$A_i(v')=\left\{\int_\Gamma\left|\frac{R^{(\beta)}(v;\, f_i(x))}{|v'|^{\mu}}\right|^p dx'\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Вычисляя норму под знаком интеграла, получаем, очевидно

$$A_i(v')\leqq C_1\int_0^r\int_{E^n} h^{l-n-1}\left(\left|\frac{v'}{h}\right|\right)^s\left[\left|\frac{v'}{h}\right|\right]_1 |v'|^{-\mu}\Phi_\delta\left(\frac{y}{h}\right)\|D_i^l f(\cdot+y)\|_\Gamma\,dydh.$$

После замены $h=|v'|t$ имеем

$$A_i(v')\leq C_1\int\limits_0^{\frac{r}{|v'|}}\int\limits_{E^n} t^{l-n-1-s}\left[\frac{1}{t}\right]_1 |v'|^{-\mu+l-n}$$

$$\times\Phi_\delta\left(\frac{y}{|v'|t}\right)\|D_i^l f(\cdot+y)\|_r dydt.$$

Оценим теперь L_p норму $A_i(v')$ по m-мерному шару $|v'|<\delta$, вынося из-под ее знака интегрирование по t:

$$\|A_i\|_{|v'|<\delta}\leq C_1\int\limits_0^\infty t^{l-n-1-s}\left[\frac{1}{t}\right]_1 dt$$

$$\times\left\{\int\limits_0^{\min\left[\delta,\frac{r}{t}\right]}\left[\int\limits_{E^n}|v'|^{-\mu+l-n+\frac{m-1}{p}}\Phi_\delta\left(\frac{y}{|v'||t|}\right)\|D_i^l f(\cdot+y)\|_r\,dy\right]^p d|v'|\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

После замены $|v'|=t^{-1}a$ получаем

$$\|A_i\|_{|v'|<\delta}\leq C_1\int\limits_0^\infty t^{\mu-s-1-\frac{m}{p}}\left[\frac{1}{t}\right]_1 dt$$

$$\times\left\{\int\limits_0^{\min[\delta t,r]}\left[\int\limits_{E^n}a^{-\mu+l-n+\frac{m-1}{p}}\Phi_\delta\left(\frac{y}{a}\right)\|D_i^l f(\cdot+y)\|_r\,dy\right]^p da\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Перейдем далее к сферическим координатам $y=|y|\zeta=\varrho\zeta$, $dy=\varrho^{n-1}d\varrho d\zeta$ и воспользуемся заменой $\varrho=ab$ и обобщенным неравенством Минковского:

$$\|A_i\|_{|v'|<\delta}\leq C_1\int\limits_0^\infty t^{\mu-s-1-\frac{m}{p}}\left[\frac{1}{t}\right]_1 dt$$

$$\times\left\{\int\limits_0^{\min[\delta t,r]}\left[\int\limits_{|\zeta|=1}\int\limits_0^\infty a^{-\mu+l-n+\frac{m-1}{p}}\Phi_\delta\left(\frac{\varrho\zeta}{a}\right)\|D_i^l f(\cdot+\varrho\zeta)\|_r\,\varrho^{n-1}\,d\varrho d\zeta\right]^p da\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq C_1\int\limits_0^\infty t^{\mu-s-1-\frac{m}{p}}\left[\frac{1}{t}\right]_1 dt\int\limits_0^\infty b^{n-1}db$$

$$\times\left\{\int\limits_0^{\min[\delta t,r]}\left[\int\limits_{|\zeta|=1}a^{-\mu+l+\frac{m-1}{p}}\Phi_\delta(b\zeta)\|D_i^l f(\cdot+ab\zeta)\|_r\,d\zeta\right]^p da\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Воспользуемся заменой $a=b^{-1}\varrho$:

$$\|A_i\|_{|v'|<\delta}\leq C_1\int\limits_0^\infty t^{\mu-s-1-\frac{m}{p}}\left[\frac{1}{t}\right]_1 dt\int\limits_0^\infty b^{n-1+\mu-l-\frac{m}{p}}db$$

$$\times\left\{\int_0^{b\min[\delta\, t, r]}\int_{|\zeta|=1}[\Phi_\delta(b\zeta)]^p\varrho^{-\mu p+lp+m-1}\|D_i^l f(\cdot+\zeta\varrho)\|_\Gamma^p\,d\zeta\,d\varrho\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Пусть

$$G(r)=\{|y|<r\}\cap\sup\max_{0\leqq b\leqq 1}\Phi_\delta(by).$$

Учитывая ограниченность и удаленность от начала координат носителя Φ_δ и неравенство $0<\mu-s-\frac{m}{p}<1$, получаем

$$\|A_i\|^p_{|v'|<\delta}\leqq C_2\int_{G(r)}|y|^{-m}\|D_i^l f(\cdot+y)\|_\Gamma^p\,dy$$

$$=C_2\int_{G(r)}\int_{E^m}|y|^{-m}|D_i^l f(x'+\gamma(x')+y)|^p\,dx'dy.$$

Здесь и в дальнейшем через x' мы обозначаем как вектор из E^m, так и вектор $x=(x',0)\in E^n$. Аналогично здесь $\gamma(x')$ — n-мерный вектор вида $(0,\gamma(x'))$.

Совершим замену переменных

$$\widetilde{x}'=x'+y',\ \widetilde{y}'=y',\ \widetilde{y}''=y''+\gamma(x')-\gamma(x'+y')$$

с якобианом, равным почти всюду единице. Будем считать, что $\Phi_\delta(y)$ сосредоточена в достаточно малой окрестности некоторой точки на оси x_n. Тогда при некотором $\varepsilon>0$ на области интегрирования в последнем интеграле имеем $\varepsilon|\widetilde{y}'|<|\widetilde{y}''|<r$. Поэтому в силе неравенство

$$\|A_i\|^p_{|v'|<\delta}\leqq C_3\int_{\varepsilon|\widetilde{y}'|<|\widetilde{y}''|<r}\int_{E^m}|\widetilde{y}'|^{-m}|D_i^l f(\widetilde{x}'+\gamma(\widetilde{x}')+\widetilde{y}'')|^p\,d\widetilde{x}'d\widetilde{y}'d\widetilde{y}''$$

(10)

$$\leqq C_4\int_{|\widetilde{y}''|<r}\int_{E^m}|D_i^l f(\widetilde{x}'+\gamma(\widetilde{x})+\widetilde{y}')|^p\,d\widetilde{x}'d\widetilde{y}''.$$

Неравенства (8), (9), (10) приводят к оценке (4) для f_i, $i=1,\ldots,n$, из (6). Остается, таким образом, получить оценку (4) для f_r из (6). Для этого заметим лишь, что $f_r(x)$ является бесконечно дифференцируемой функцией, каждая производная которой оценивается через $\|f\|_{E^n\setminus\Gamma}$. Тем самым, доказательство (4) завершено.

Как видно из доказательства, область интегрирования в правой части (4) на самом деле можно брать меньше.

Оценка (4) устанавливает скорость приближения следа функции на поверхности Γ по дифференциальным свойствам этой функции в области $E^n\setminus\Gamma$. Было бы интересно найти обращение этой оценки, именно, по скорости приближения (в смысле левой части (4)) заданной на Γ функции некоторой системой многочленов (которые априори не являются многочленами Тейлора), указать возможность распространения этой функции на $E^n \diagdown \Gamma$ с конечной правой частью (4).

ЛИТЕРАТУРА

1. О. В. Бесов, В. П. Ильин. Естественное расширение класса областей в теоремах вложения. *Матем. сборник*, **75** (1968), 483—495.

Математический институт АН СССР
ул. Вавилова 42
Москва В-333 СССР

Поступило 17 июля 1970