Труды Международной Конференции по конструктивной теории функций Варна, 19—25 мая, 1970

Proceedings of the International Conference on Constructive Function Theory, Varna, May 19—25, 1970

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕННОВ И ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

Е. Божоров

Резюме. В настоящей работе, используя известное построение Л. Илиева, находятся новые функции, для которых многочлен

$$\int_{-1}^{1} \Phi(t) p(z+t) dt$$

не имеет нули вне полосы, параллельной мнимой оси и содержащей нули $p(z)$.

В этом сообщении результаты связаны в основном с функциями вида

$$(1) \qquad \int_{0}^{1} f(t)[\,p(z+t)+\lambda p(z-t)]dt, \ |\lambda|=1, \ \lambda=\text{const},$$

где $f(t)$ является действительной R-интегрируемой функцией, $p(z)$ — многочленом с нулями в полосе $\alpha \leqq \operatorname{Re}(z) \leqq \beta$, или целой функцией, границей таких многочленов. Задача, связанная с (1), состоит в нахождении таких $f(t)$, для которых нули (1) лежат в $\alpha \leqq \operatorname{Re}(z) \leqq \beta$.

В ряде публикаций Илиева [1], [2], [3], [4] была показана тесная связь целых функций типа Лагерра, к которым числятся и (1), с теорией ортогональных многочленов. Весьма эффективной оказалась связь интегрального представления целых функций класса T_1 или T_2 (см. [5]) с интегральной представимостью ортогональных многочленов. Иными словами, упомянутые исследования раскрыли совершенно новое применение целых функций типа Лагерра в вопросах функционального анализа, теории ортогональных многочленов и внутренних проблемах классической теории распределения нулей.

В первую очередь выдвигается задача об эффективном построении функций типа (1) и их исследовании.

Илиевым [6], [7] даны конкретные конструкции функций вида (1), одна из которых, по нашему мнению, особенно полезна.

Так как переход от (1) к более известным целым функциям

$$(2) \qquad C_f(z)=\int_{0}^{1} f(t)\cos tz dt, \quad S_f(z)=\int_{0}^{1} f(t)\sin tz dt$$

непосредствен, мы расскажем о некоторых результатах для нулей этих двух функций, несмотря на то, что свойства, которые мы укажем, относятся к более общему классу (1).

Предварительно введем некоторые обозначения. Так как в наших рассуждениях интервал $[0, 1]$ остается неизменным, вместо $f(t)$ для $t \in [0, 1]$ будем писать просто знак f. Вместо выражения „$f(t)$ возрастающая", будем писать $f\uparrow$. Аналогично $f\downarrow$. Выражение $\overline{f\uparrow}$ будет логическим отрицанием $f\uparrow$, т. е. $\overline{f\uparrow}$ будет означать, что $f(t)$ не возрастает в $[0, 1]$. Условие $f(t)>0$, $t \in [0, 1]$ будем записывать $f>0$.

Множество натуральных чисел будем обозначать через N.

Определение 1. Множество функций C:

$$f \in C <=> \{z: C_f(z)=0\} \subset \{x: -\infty < x < \infty\}.$$

Определение 2. Множество функций S:

$$f \in S <=> \{z: S_f(z)=0\} \subset \{x: -\infty < x < \infty\}.$$

Определение 3. Множество функций E:

$$f \in E <=> \left\{z: \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) z^k = 0,\ \forall n \in N'\right\} \subset \{z: |z| \leq 1\},$$

где N' является возрастающей неограниченной последовательностью натуральных чисел.

Конструкция Илиева связана с следующим предложением:

Теорема. Если $f \in E$, нули (1) лежат в $\alpha \leq \mathrm{Re}(z) \leq \beta$. В частности: $f \in E => f \in C$, $f \in S$.

Общий результат Пойа [8]: $(f>0, f\uparrow) => f \in E$ и, следовательно, $f \in C$, $f \in S$.

Дальнейшие исследования направлены на поиск невозрастающих функций из C и S; самым естественным объектом под влиянием теоремы Энестрема—Какея [9] являются $f>0$ и $f\downarrow$.

Для $f>0$, $f\downarrow$ существуют следующие ограничительные условия (неравенства): $(f>0, f\downarrow) => S_f(x)>0$, $0<x<\infty$ (Чакалов [10]) и полученное теми же средствами неравенство ($f>0$, $f\downarrow$, f — выпуклая) $=> C_f(x)>0$, $-\infty<x<\infty$ (Божоров [11]).

Результаты Пойа [8], Илиева [6], [7], Божорова [12] и других: $\exists f: (f>0, f\downarrow) => f \in C$.

Результаты Пойа [8]. Обрешкова]13], Илиева [6], [7] Божорова [14] и других: $\exists \{f\}: (f>0, f\downarrow) => f \in C$. Здесь $\{f\}$ означает классы функций с такими свойствами.

С другой стороны, Илиев [6] создал эффективную конструкцию вида: Пусть $f \in C$; посредством f строится однозначно последовательность $\{f_n: f_n \in C, n \in N\}$.

Расширение E для $N'=N$ дано следующими результатами (Божоров [15]):

Определение 4. Множество G:

$$\varphi \in G <=> \left\{z: \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) z^k = 0,\ \forall n \in N\right\} \subset \{z: |z| \leq 1\}.$$

Теорема. Мультипликативное свойство G:

$$(\varphi_1 \in G_1, \varphi_2 \in G) \Rightarrow \varphi_1\varphi_2 \in G.$$

Теорема. Мультипликативное расширение E:

$$(f \in E,\ f(0) \neq 0,\ \varphi \in G) \Rightarrow f\varphi \in E.$$

Результат получен из одной теоремы Сегё [16].

Теорема (Обрешков [13]). Пусть $\varphi(z)$ действительный многочлен. Тогда

$$\left(\{z: \varphi(z)=0\} \subset \left\{z: \operatorname{Re}(z) \leq \frac{1}{2}\right\}\right) \Rightarrow \varphi \in G.$$

Это свойство следует непосредственно и из мультипликативности G. Новые классы функций, принадлежащие E, даются со следующими двумя утверждениями.

Теорема. Пусть $f \in C_{[0,1]}$ и удовлетворяет условиям:

1) $f(0) < f(t) < f(1)$, $t \in (0, 1)$;

2) $[f(1)f(t) - f(0)f(1-t)]\, 1.$

Тогда $f \in E$.

Доказательство. Строим многочлен

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) z^k$$

и соответствующий Φ^* согласно операции Шура [17]:

$$\Phi^* = z^n \Phi\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{n-k}{n}\right) z^k.$$

Для полинома

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{z}\left[\Phi(z) f(1) - f(0)\Phi^*(z)\right] = \sum_{k=1}^{n}\left[f(1) f\left(\frac{k}{n}\right) - f(0) f\left(\frac{n-k}{n}\right)\right] z^{k-1},$$

так как $f(1) \geq f\left(\frac{n-k}{n}\right)$, $f\left(\frac{k}{n}\right) \geq f(0)$ имеем

$$f(1)f\left(\frac{k}{n}\right) - f(0)f\left(\frac{n-k}{n}\right) > 0, \quad 1 \leq k \leq n,$$

$$\left[f(1)f\left(\frac{k}{n}\right) - f(0)f\left(\frac{n-k}{n}\right)\right]\uparrow, \quad 1 \leq k \leq n$$

и в соответствии с теоремой Энестрема—Какея имеет место

$$\{z: \Phi_1(z) = 0\} \subset \{z: |z| \leq 1\},$$

а из теоремы Шура — соответственно

$$\left\{z:\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) z^k=0\right\} \subset \{z: |z| \leqq 1\},$$

т. е. $f \in E$ и теорема доказана.

Из $f\uparrow \Rightarrow [f(1)f(t)-f(0)f(1-t)]\uparrow$ следует обобщение результата Пойа.

Теперь мы осуществим возможность построения прерывных функций из C и S.

Теорема. Пусть α рациональная точка в интервале $(0, 1/2)$, обозначим $\beta=1-\alpha$. Если $f(t)$ положительна, непрерывна и монотонно возрастающая в $[0, \alpha)$, (α, β), $(\beta, 1)$, причем $0<f(0)<f(t)<f(1)$, $0<t<1$ и

$$\text{(A)} \qquad \left|\frac{f(\beta+0)-f(\beta-0)}{f(\alpha+0)-f(\alpha-0)}\right| > \frac{f(1)}{f(0)},$$

то $f \in E$.

Доказательство. Определяем $f(\alpha)=f(\alpha-0)$, $f(\beta)=f(\beta+0)$. Обозначим через m знаменатель несократимых дробей, представляющих α и β. Обозначаем $N'=\{n: n=km, k\in N\}$. Из-за (A) существует такое $n_0 \in N$, что при $n>n_0$ и $n\in N'$ будет иметь место

$$f(1)\left[f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right]-f(0)\left[f\left(\frac{n-k-1}{n}\right)-f\left(\frac{n-k}{n}\right)\right]>0$$

и по теореме Энестрема—Какея, получаема

$$\left\{z:\sum_{k=0}^{n}\left[f(1)\left(\frac{k}{n}\right)-f(0)f\left(\frac{n-k}{n}\right)\right]z^k=0,\ n>n_0,\ n\in N'\right\}\subset\{z: |z|\leqq 1\},$$

что согласно теореме Шура ведет к

$$\left\{z:\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) z^k=0,\ n>n_0,\ n\in N'\right\} \subset \{z: |z| \leqq 1\},$$

т. е. $f \in E$.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Ilieff. Über einige Klassen von Polynomenfolgen. *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, **17** (1964) 797—800.
2. L. Ilieff. Orthogonale Systeme in einigen Klassen von Polynomenfolgen. *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, **18** (1965), 295—298.
3. L. Ilieff. Funktionen die eine Turan'sche Ungleichung befriedigen. *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, **19** (1966), 93—96.
4. L. Ilieff. Über einige Klassen von ganzen Funktionen. *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, **19** (1966), 575—577.
5. L. Ilieff. Integraldarstellung einer Klasse von Polynomenfolgen. *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, **18** (1965), 7—9.
6. Л. Илиев. Върху разпределението на нулите на една класа цели функции. *Годишник СУ, Природо-мат. фак.*, **44** (1948), 143—173.
7. Л. Илиев. Тригонометрични интеграли, които представят цели функции със само реални нули. *Известия МИ БАН*, **1**, кн. 2, (1954), 147—153.

8. G. Polya. Über die Nullstellen gewisser ganzer Funktionen. *Math. Zeitschrift*, **2**, (1918), 352—383.
9. S. Kakeya. On the limits of the roots of an algebraic equation with positive coefficients. *Tohoku Math. Journal*, **2** (1912), 140—142.
10. Л. Чакалов. Върху една класа цели функции. *Списание БАН*, **36** (1927), 51—89.
11. Е. Божоров. Върху някои въпроси, свързани с полиноми и цели функции. *Годишник ХТИ*, 8, кн. 2 (1962), 251—262.
12. Е. Божоров. О расположении нулей одного класса полиномов и целых функций. *Доклады БАН*, **3** (1950), 11—14.
13. Н. Обрешков. Върху нулите на полиномите и на някои цели функции. *Годишник СУ, Мат.-физ.*, **37** (1940/41), 1—115.
14. Е. Божоров. Върху разпределението на нулите на една класа полиноми и цели функции. *Годишник СУ, Мат.-физ.*, **46**, кн. 1 (1949/50), 43—72.
15. Е. Божоров. Върху някои въпроси, свързани с теорията на интегралните полиноми. *Годишник ХТИ*, 2, кн. 2 (1955), 151—161.
16. G. Szegö. Bemerkungen zu einem Satz von J. N. Grace über die Wurzeln algebraischer Gleichungen. *Math. Zeitschrift*, **13** (1922), 28—55.
17. J. Schur. Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind. *J. reine und angew. Math.*, **147** (1917), 205—232

Высший институт химической технологии *София* *Болгария*

Поступило 18 июня 1970