Труды Международной Конференции по конструктивной теории функций Варна, 19—25 мая, 1970

Proceedings of the International Conference on Constructive Function Theory, Varna, May 19—25, 1970

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ НА БЕСКОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ ЛИНЕЙНЫМИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

В. М. Веселинов

Резюме. Эта статья является обзором нескольких работ ([6], [7], [8] и [9]), где рассмотрены вопросы об аппроксимации функций линейными положительными операторами на бесконечном интервале, а также некоторые вопросы об аппроксимации полунепрерывных функций на отрезке.

1. Приведем сначала некоторые определения.

Пусть $f(x)$ — функция, заданная и ограниченная на отрезке Δ. Обозначим через $S^f_\Delta(x)$ и $I^f_\Delta(x)$ соответственно верхнюю и нижнюю функции Бэра для функции $f(x)$ на отрезке Δ [5]:

$$S^f_\Delta(x)=\lim_{\delta\to 0}\sup_{|t-x|\leqq\delta} f(t),$$

$$I^f_\Delta(x)=\lim_{\delta\to 0}\inf_{|t-x|\leqq\delta} f(t).$$

Дополненный график $\bar{f}_\Delta$ функции $f(x)$ на отрезке $\mathring{\Delta}$ называется множество точек (x, y) на плоскости, для которых $x\in\Delta$, $I^f_\Delta(x)\leqq y\leqq S^f_\Delta(x)$ [1].

Обозначим через $\varrho_\Delta(f, g)$ равномерное расстояние между функциями $f(x)$ и $g(x)$, непрерывными на отрезке Δ:

$$\varrho_\Delta(f, g)=\max_{x\in\Delta}|f(x)-g(x)|.$$

Хаусдорфовое расстояние между функциями $f(x)$ и $g(x)$ на отрезке Δ определяется следующим образом [1]:

$$r_\Delta(f, g)=r(\bar{f}_\Delta, \bar{g}_\Delta)=\max\{\max_{X\in\bar{f}_\Delta}\min_{Y\in\bar{g}_\Delta} d(X, Y), \max_{X\in\bar{g}_\Delta}\min_{Y\in\bar{f}_\Delta} d(X, Y)\},$$

где $d(X, Y)=d(X(x_1, y_1), Y(x_2, y_2))=\max\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\}$.

Обозначим через $C_{[a, b]}$ совокупность функций, заданных на интервале $(-\infty, \infty)$, непрерывных на отрезке $\Delta=[a, b]$, непрерывных справа в точке b и слева в точке a. Через $D_{[a,b]}$ будем обозначать совокупность функций $f(x)$, заданных на интервале $(-\infty, \infty)$, непрерывных в точках a и b, для которых

$$\overline{I}^f_\Delta = \overline{f}_\Delta = \overline{S}^f_\Delta, \quad \Delta = [a, b].$$

Заметим, что $C_{[a,\, b]} \subset D_{[a,\, b]}$ однако множество $D_{[a,\, b]}$ существенно шире чем $C_{[a,\, b]}$.

Функция $f(x)$, заданная на интервале $[\alpha, \beta]$, называется выпуклой m-ого порядка, если для произвольной системы точек $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_m$ интервала $[\alpha, \beta]$ выполнено неравенство

$$[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_m; f] \geqq 0,$$

где $[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_m; f]$ — m-ая разделенная разность функции $f(x)$ [10]. Совокупность всех выпуклых функций m-ого порядка на интервале $[\alpha, \beta]$ обозначим через $K^m_{[\alpha, \beta]}$.

Будем говорить, что функция $\widehat{f^{(m)}}(x) \in D_{[a,\, b]}$ является m-ой G-производной функции $f(x)$, если $m-1$-ая производная $f^{(m-1)}(x)$ функции $f(x)$ существует и является интегралом функции $\widehat{f^{(m)}}(x)$ на отрезке $\Delta = [a, b]$.

Оператор $L[f(t); x]$ ($t \in (-\infty, \infty)$, $x \in [a, b]$) называется выпуклым m-ого порядка, если отображает $K^m_{(-\infty, \infty)}$ в $K^m_{[a, b]}$ [1].

Пусть $\varphi(x) \geqq 0$ — функция, заданная и непрерывная на интервале $(-\infty, \infty)$.

Справедлива следующая

Теорема 1 [6], [7]. Пусть $\{L_n[f(t); x]\}_1^\infty$ — последовательность линейных положительных операторов ($t \in (-\infty, \infty)$, $x \in [a, b]$), удовлетворяющих условиям

$$(1) \qquad \begin{aligned} &\lim_{n \to \infty} \varrho_\Delta(L_n[t^i; x], x^i) = 0, \quad i = 0, 1, 2; \\ &\lim_{n \to \infty} \varrho_\Delta(L_n[\varphi(t); x], \varphi(x)) = 0. \end{aligned}$$

Тогда, если $f(x) \in D_{[a,\, b]}$ и $|f(x)| \leqq \varphi(x)$ для $x \in (-\infty, \infty)$, то

$$\lim_{n \to \infty} r_\Delta(L_n[f], f) = 0, \quad \Delta = [a, b].$$

Имея в виду связь между хаусдорфовым и равномерным расстояниями [1], из теоремы 1 получаем следующее следствие.

Следствие 1 [6], [7]. Если выполнены все условия теоремы 1 и $f(x) \in C_{[a,\, b]}$, то

$$\lim_{n \to \infty} \varrho_\Delta(L_n[f], f) = 0.$$

В связи со следствием 1 заметим, что другие условия для равномерной сходимости последовательности линейных положительных операторов на бесконечном интервале сформулированы в [11], [3] и [4].

Рассмотрим проблем о сходимости производных линейных положительных операторов.

Имеет место следующая

Теорема 2 [9]. Пусть $\{L_n[f(t); x]\}_1^\infty$, ($t \in (-\infty, \infty)$, $x \in [a, b]$) — последовательность линейных положителных операторов, удовлетворяющих условиям (1) и выпуклых m-ого порядка для каждого m от 0 до $p+1$. Пусть функция $\varphi(x)$ имеет непрерывную производную k-ого порядка ($k \leqq p$) и

$\varphi^{(k)}(x)$ — монотонна на интервале $(-\infty, \infty)$. Тогда, если $\widehat{f}^{(k)}(x) \in D_{[a,\,b]}$ и $|\widehat{f}^{(k)}(x)| \leq \varphi^{(k)}(x)$ для $x \in (-\infty, \infty)$, то*

$$\lim_{n\to\infty} r_{\Delta'}(L_n^{(k)}[f], \widehat{f}^{(k)}) = 0,$$

где $\Delta' = [a', b']$ и a', b' — точки непрерывности функции $\widehat{f}^{(k)}(x)$, $a < a' < b' < b$.

Следствие 2 [9]. Если выполнены все условия теоремы 2 и $f^{(k)}(x) \in C_{[a,\,b]}$, то

$$\lim_{n\to\infty} \varrho_{\Delta'}(L_n^{(k)}[f], f^{(k)}) = 0,$$

где $\Delta' = [a', b']$ и $a < a' < b' < b$.

Замечание. Если функции 1, $\varphi_0(x)$ и $\varphi(x)$ образуют систему Чебышева на любом отрезке и $|\varphi_0(x)| \leq \varphi(x)$ для $x \in (-\infty, \infty)$, то в условии теорем 1 и 2 и следствий 1 и 2 функции 1, x, x^2 и $\varphi(x)$ можно заменить только тремя функциями 1, $\varphi_0(x)$ и $\varphi(x)$. Также интервал $(-\infty, \infty)$ можно заменить любым бесконечным интервалом.

Теоремы 1 и 2 и следствия 1 и 2 можно применить для конкретных операторов [6], [7] и [9].

2. Рассмотрим проблему об аппроксимации полунепрерывных функции на отрезке относительно хаусдорфова расстояния [8].

Пусть $f(x)$ — функция, заданная и ограниченная на отрезке $\Delta = [a, b]$.

Функция $f(x)$ называется полунепрерывной сверху на отрезке Δ, если $f(x) = S_\Delta^f(x)$ для $x \in \Delta$ [5].

Обозначим через $\Omega_{[a,\,b]}^M$ совокупность всех функций $f(x)$, заданных и ограниченных на отрезке $\Delta = [a, b]$, для которых $\overline{f}_\Delta = S_\Delta^f$ и $|f(x)| \leq M$ для $x \in \Delta$.

Ясно, что $\Omega_{[a,\,b]}^M$ содержить все ограниченные и полунепрерывные сверху функции $f(x)$ на отрезке Δ, для которых $|f(x)| \leq M$ $(x \in \Delta)$, однако в $\Omega_{[a,\,b]}^M$ есть и функции, которые не являются полунепрерывными сверху.

Модуль полунепрерывности $\theta_f(\delta)$ функции $f(x)$ на отрезке $\Delta = [a, b]$ определим следующим образом [8]:

$$\theta_f(\delta) = r_\Delta(f, f_\delta),$$

где $f_\delta(x) = \sup\limits_{\substack{|t-x|\leq\delta \\ t,\, x \in \Delta}} f(t)$

Теорема 3 [8]. Для того, чтобы $f(x) \in \Omega_{[a,\,b]}^M$, необходимо и достаточно чтобы имело место

$$\lim_{\delta\to 0} \theta_f(\delta) = 0.$$

Рассмотрим многочлен Бернштейна—Канторовича [2]

$$K_n^s(f; x) = \sum_{\nu=0}^{n} \varphi_{\nu,n}^s(f) \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu},$$

где

---

* Предполагается, что k-ая производная $L_n^{(k)}[f(t); x]$ существует.

$$\varphi^s_{\nu,n}(f)=\sup_{\left|t-\frac{\nu}{n}\right|\le n^{-s}} f(t), \quad 0<s<\frac{1}{2}.$$

Теорема 4 [8]. Если $f(x)\in\Omega^M_{[0,1]}$ и $\theta_f(\delta)$ — ее модуль полунепрерывности, то для любого натурального k выполнено

$$r_\Delta(f, K^s_n(f))\le\theta_f(2n^{-s})+5Me^{1/4}(2k)!\; n^{-(1-2s)k}, \quad \Delta=[0,1]. \tag{2}$$

Порядок оценки (2) улучшить нельзя [8].

Следствие 3 [8]. Если $f(x)\in\Omega^M_{[0,1]}$, то

$$\lim_{n\to\infty} r_\Delta(f, K^s_n(f))=0; \quad \Delta=[0,1].$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бл. Сендов. Некоторые вопросы теории приближений функций и множеств в хаусдорфовой метрике. *Успехи матем. наук*, 24 (1969), 5, 141—178.
2. Л. В. Канторович. О некоторых разложениях по полиномам в форме С. Н. Бернштейна, II. *Доклады АН СССР* (1930), № 21, 595—600.
3. Л. С. Сюй и Ж. Х. Ван. Общие методы „возрастающих множителей" и аппроксимация неограниченных непрерывных функций некоторыми конкретными полиномиальными операторами. *Доклады АН СССР*, **156** (1964), 264—267.
4. П. В. Ермаков. Об условиях сходимости линейных положительных операторов на неограниченных множеств. В сб. Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций. Баку, 1965, 146—151.
5. И. П. Натансон. Теория функций вещественной переменной. Москва, 1950.
6. В. М. Веселинов. Аппроксимирование неограниченных функций при помощи линейных положительных операторов относительно хаусдорфова расстояния. *Доклады БАН*, **22** (1969), 499—502.
7. В. М. Веселинов. Апроксимиране на неограничени функции с линейни положителни оператори относно хаусдорфово разстояние. *Годишник на ВТУЗ, Математика* (в печати).
8. В. М. Веселинов. Об аппроксимации полунепрерывных функций относительно хаусдорфова расстояния (в печати).
9. В. А. Попов и В. М. Веселинов. Несколько замечаний о производных линейных положительных операторах. *Годишник Соф. унив., Мат. фак.* **64** (1971).
10. T. Popoviciu. Les fonctions convexes. Paris, 1945.
11. L. S. Hsu. Approximation of non-bounded continuous functions by certain sequences of linear positive operators or polynomials. *Studia math.*, **21** (1961), No. 1, 37—43.

Математический факультет
Софийского университета
София 26 Болгария

Поступило 1 июля 1970