Труды Международной Конференции по конструктивной теории функций Варна, 19—25 мая, 1970 • Proceedings of the International Conference on Constructive Function Theory, Varna, May 19—25, 1970

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ И МЕТОД МЕХАНИЧЕСКИХ КВАДРАТУР ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Б. Г. Габдулхаев

Резюме. В работе рассматриваются приложения ряда результатов конструктивной теории функции к некоторым задачам, связанным с прямыми методами решения сингулярных интегральных уравнений. Среди таких методов одним из наиболее эффективных является, на наш взгляд, метод механических квадратур. Этот метод естественным образом приводит нас к рассмотрению квадратурных формул для сингулярных интегралов, понимаемых в смысле главного значения.

Ниже в § 1 приводится ряд результатов по квадратурным формулам для сингулярных интегралов с ядром типа Гильберта. Эти результаты существенным образом используются при исследовании метода механических квадратур для сингулярных интегральных уравнений. Этому вопросу посвящен § 2, в котором устанавливается сходимость в среднем метода механических квадратур и предлагаются эффективные среднеквадратические и равномерные оценки погрешности.

§. 1. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов с ядром типа Гильберта. В этом параграфе дается обобщение и в определенном смысле уточнение некоторых результатов автора по квадратурным формулам для сингулярных интегралов с ядром типа Гильберта (см. [1]—[3] или же гл. II из [4]).

1.1. О способах получения квадратурных формул. Рассмотрим сингулярный интеграл (с. и.)

$$Ix = I(x\,;\,s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2}\, x(\sigma)\,d\sigma, \tag{1.1}$$

где $x = x(s)$ — данная 2π-периодическая функция, а интеграл понимается в смысле главного значения по Коши—Лебегу.

Один из способов получения квадратурных формул для с. и. (1.1) состоит в аппроксимации его плотности различными аналитическими аппаратами и в последующем точном вычислении интеграла.

Второй способ* получения квадратурных формул для с. и. (1.1) состоит, как и в случае обыкновенного определенного интеграла, в аппроксимации всего подинтегрального выражения исходного интеграла или же соответ-

* Заметим, что второй способ, несмотря на бо́льшую общность, в ряде случаев эквивалентен первому способу (см., напр. § 2 работы [3]).

ствующего ему преобразованного интеграла и в последующем точном вычислении интеграла.

Ниже мы будем пользоваться только первым из указанных способов. Итак, пусть $P_n x = P_n(x; s)$ — некоторое аналитическое выражение, аппроксимирующее $x(s)$ в определенном смысле. Тогда за квадратурную формулу для с. и. (1.1) берется выражение

$$I_n x = I_n(x; s) = I(P_n x; s). \tag{1.2}$$

В частности, принимая в качестве $P_n x$ различные полиномы (например, интерполяционные полиномы*, приближенные полиномы наилучшего приближения, отрезки ряда Фурье, суммы Фейера, Валле—Пуссена и Бернштейна—Рогозинского, различные процессы, связанные с интерполированием и др.), для с. и. (1.1) получаем различные квадратурные формулы.

1.2. О способах оценки погрешности квадратурных формул. В приложениях важной является задача обоснования формулы (1.2) и, в частности, получение практически эффективных оценок для остаточного члена $R_n x = R_n(x; s)$ в различных метриках. Эта задача частично решается в двух следующих теоремах.

Теорема 1. Пусть $\varphi \equiv x - P_n x \in H_\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, и произвольные действительные числа β и δ таковы, что

$$0 < \beta \leq \alpha \leq 1,\ 1 < \delta < \infty.$$

Тогда равномерно относительно s справедливы оценки

$$|R_n(x; s)| \leq \frac{2 \ln \delta}{\pi} M(x - P_n x) + \frac{2^\beta \delta^{-\beta}}{\beta \pi^{1-\beta}} H(x - P_n x; \beta), \tag{1.3}$$

$$|R_n(x; s)| \leq \frac{2}{\pi\beta} M(x - P_n x) . \ln [\pi e H(x - P_n x; \beta)/M(x - P_n x)], \tag{1.4}$$

где $M(f)$ — чебышевская норма функции $f(s) \in C$, а $H(f; \beta)$ — постоянная условия Гельдера функции $f(s) \in H_\beta$ при данном β.

Следствие. Если при некотором β, $0 < \beta \leq 1$,

$$M(x - P_n x) . \ln n \to 0,\ H(x - P_n x; \beta) . n^{-\beta} \to 0,\ n \to \infty, \tag{1.5}$$

то квадратурная формула (1.2) равномерно сходится к интегралу (1.1) причем погрешность может быть оценена неравенством

$$|R_n(x; s)| \leq \frac{2 \ln n}{\pi} M(x - P_n x) + \frac{2}{\beta n^\beta} H(x - P_n x; \beta),\ n = 2, 3, \ldots \tag{1.6}$$

Доказательство. В силу формул (1.1)—(1.2), остаточный член $R_n(x; s)$ можно представить в виде

$$R_n(x; s) = I\varphi = \frac{1}{\pi}(I_1 + I_2), \tag{1.7}$$

где

$$I_1 = \int_0^{\pi/2\delta} [\varphi(s + 2\sigma) - \varphi(s - 2\sigma)] \operatorname{ctg} \sigma d\sigma, \quad I_2 = \int_{\pi/2\delta}^{\pi/2} [\varphi(s + 2\sigma) - \varphi(s - 2\sigma)] \operatorname{ctg} \sigma d\sigma.$$

* Случай интерполяционных квадратурных формул см. ниже в п. 3.

Оценим каждый из интегралов $I_1=I_1(s)$ и $I_2=I_2(s)$. Используя неравенство $\sigma \operatorname{ctg} \sigma \leq 1$; $0 \leq \sigma \leq \pi/2$, для I_1 находим

$$(1.8) \qquad |I_1| \leqq H(\varphi;\beta) \int\limits_0^{\pi/2\delta} (4\sigma)^\beta \operatorname{ctg} \sigma d\sigma \leqq \frac{(2\pi)^\beta}{\beta} H(\varphi;\beta)\delta^{-\beta}.$$

Для I_2 имеем

$$(1.9) \qquad |I_2| \leqq 2 \max_s |\varphi(s)| \int\limits_{\pi/2\delta}^{\pi/2} \operatorname{ctg} \sigma d\sigma \leqq 2M(\varphi) \ln \delta.$$

Из соотношений (1.7) — (1.9) следует оценка (1.3).

Теперь постоянную δ, $1<\delta<\infty$, определим, исходя из требования минимальности правой части неравенства (1.3). Рассмотрим функцию $f(\delta)=a \ln \delta + b\delta^{-\beta}$, где a и b — положительные постоянные. Легко видеть, что $f(\delta) \geqq f(\delta_0)$, где $\delta_0 = \left(\beta \frac{b}{a}\right)^{1/\beta}$. Тогда обычным способом из неравенства (1.3) приходим к неравенству (1.4).

Далее, неравенство (1.6) следует из (1.3) при $\delta=n \geqq 2$; а из него и из (1.5) следует равномерная сходимость квадратурной формулы (1.2).

Таким образом, оценка погрешности квадратурной формулы (1.2) в равномерной метрике приводится, благодаря теореме 1, к оценке величин $M(x-P_n x)=\| x-P_n x \|_C$ и $H(x-P_n x;\beta)$.

Для многих известных способов аппроксимации полиномами оценка для $M(x-P_n x)$ известна. В этом случае оценку для $H(x-P_n x;\beta)$ можно установить с помощью следующего утверждения.

Лемма 1. Пусть $P_n x$ — тригонометрический полином порядка не выше n и существует число $r>0$ такое, что

$$(1.10) \qquad \| x-P_n x \|_C \leqq A n^{-r},$$

где A — некоторая положительная постоянная. Тогда справедлива оценка

$$(1.11) \qquad H(x-P_n x;\beta) \leqq AB n^{-r+\beta}, \quad 0<\beta \leqq 1,$$

где

$$(1.12) \qquad B=B(r)=\begin{cases} 2(1+2^{-r})/(1-2^{1-r}), & r>1; \\ B_0(r,\beta)<\infty, & 0<\beta \leqq r \leqq 1. \end{cases}$$

Следствие. В условиях леммы погрешность квадратурной формулы (1.2) в равномерной метрике можно оценить неравенством

$$(1.13) \qquad |R_n(x;s)| \leqq \frac{2A}{\pi\beta n^r}(1+\ln \pi B + \beta \ln n),$$

где A и B определены соответственно в (1.10) и (1.12).

Доказательство почти ничем не отличается от доказательства аналогичного предложения нашей работы [2].

Теорема 2. Пусть $x-P_n x \in L_2 = L_2(0, 2\pi)$. Тогда среднеквадратическая оценка погрешности квадратурной формулы (1.2) определяется неравенством

$$(1.14)\qquad \|R_nx\|_{L_2}\leqq\|x-P_nx\|_{L_2},\quad n=1,2,\ldots$$

Если, кроме того, P_nx — такой тригонометрический полином порядка не выше n, что

$$(1.15)\qquad \|R_nx\|_{L_2}\leqq An^{-r},\quad A=\mathrm{const},\quad r=\mathrm{const}>0,$$

то при $r>1/2$ квадратурная формула (1.2) сходится равномерно со скоростью

$$(1.16)\qquad |R_n(x;s)|\leq ADn^{-r+1/2},\quad n=1,2,\ldots,$$

где

$$(1.17)\qquad D=D(r)=\sqrt{2}(1+2^{-r})/(1-2^{-r+1/2}),\quad r>1/2,$$

а норма в $L_2=L_2(0,2\pi)$ определена обычным способом, причем $\|1\|=1$.

Доказательство приводится так же, как и в нашей работе [2].

1.3. Интерполяционные квадратурные формулы. 1°. Для с. и. (1.1) наиболее простые и практически удобные квадратурные формулы получаются при использовании тригонометрической интерполяции.

Пусть $x(s)$ — интегрируемая в смысле Римана 2π-периодическая функция ($\in R$). Через $P_nx=P_n(x;s)$ ниже всюду будем обозначать тригонометрический полином порядка $n=[N/2]$, интерполирующий функцию $x(s)$ в N узлах:

$$(1.18)\qquad s_k=s_k^{(N)}=\frac{2k\pi}{N}+\frac{\omega}{N},\, k=\overline{1,N};\quad \Lambda=1,2,\ldots,$$

где ω — произвольная постоянная, а $[q]$ обозначает целую часть числа $q\geqq0$.

Хорошо известно, что в случае $N=2n+1$ интерполяционный полином P_nx существует и единствен. Однако, в случае $N=2n$ существует целое семейство тригонометрических полиномов порядка n, интерполирующих плотность $x(s)$ в узлах (1.18); из этого семейства выделим тот полином, который обладает минимальной нормой в $L_2=L_2(0,2\pi)$ и обозначим его через P_nx. Тогда имеем (см., например, [5])

$$(1.19)\qquad P_n(x;s)=\frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N}x(s_k)\Delta_n(s-s_k),\quad n=\left[\frac{N}{2}\right],$$

где $\Delta_n(\varphi)$ — обыкновенное ядро Дирихле порядка n при $N=2n+1$, а при $N=2n$ — так наз. видоизмененное ядро Дирихле.

Тогда, в съответствии с (1.2) и (1.19), для с. и. (1.1) получаем следующие формулы:

$$(1.20)\qquad I_n(x;s)=\frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N}\widetilde{\Delta}_n(s-s_k)x(s_k),$$

$$(1.21)\qquad I_n(x;s_j)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}a_{j-k}x_k\quad (j=\overline{1,N}),$$

где (см., например, [2], [3]) $x_k=x(s_k)$, $-\widetilde{\Delta}_n(\varphi)$ — соответствующее сопряженное ядро Дирихле, $a_{k-j}=a_{j-k}^{(N)}$;

$$(1.22)\qquad N=2n+1,\quad \alpha_j^{(N)}=\begin{cases}\ \ \operatorname{tg} j\pi/2N, & j \text{ — четно},\\ -\operatorname{ctg} j\pi/2N, & j \text{ — нечетно};\end{cases}$$

$$(1.23)\qquad N=2n,\quad \alpha_j^{(N)}=\begin{cases}\ \ 0, & j \text{ — четно},\\ 2\operatorname{ctg} j\pi/N, & j \text{ — нечетно}.\end{cases}$$

Отметим, что тригонометрическая степень точности квадратурного процесса (1.20) — (1.23) равна $m=[(N-1)/2]$.

2°. Для оценки погрешностей формул (1.20)—(1.23), а также в § 2, нам потребуются некоторые результаты из теории тригонометрической интерполяции.

Лемма 2. Равномерно относительно $n=[N/2]$, $N=1, 2, \ldots$, справедливы соотношения

$$(1.24)\qquad \| P_n \|_{C\to C} \leq \frac{4}{\pi}+\frac{2}{\pi}\ln\frac{2}{\pi}N,$$

$$(1.25)\qquad \| P_n \|_{C\to L_2}=1,$$

$$(1.26)\qquad \| P_n \|_{L_2\to L_2}=\infty.$$

Следствие. Для любого $x\in C=C[0,2\pi]$ и $n=[N/2]$, $N=1, 2,\ldots$ справедливы оценки

$$(1.27)\qquad \| x-P_n x \|_C \leq \left(1+\frac{4}{\pi}+\frac{2}{\pi}\ln\frac{2}{\pi}N\right)E_m(x),$$

$$(1.28)\qquad \| x-P_n x \|_{L_2} \leq 2E_m(x),$$

где $E_m(\varphi)$ — наилучшее равномерное приближение непрерывной функции $\varphi(s)$ тригонометрическими полиномами порядка не выше $m=[(N-1)/2]$, $N=1, 2, \ldots$

Доказательство. Оценка (1.24) вытекает из неравенства

$$(1.29)\qquad |P_n(x;s)| \leq \left(\frac{4}{\pi}+\frac{2}{\pi}\ln\frac{2}{\pi}N\right)\max_{1\leq k\leq N}|x(s_k)|.$$

При $N=2n+1$ неравенство (1.29) следует из результата В. В. Иванова [6].

Пусть теперь $N=2n$ и λ_n — константа Лебега интерполяционного процесса (1.19). Известно [7], что

$$(1.30)\qquad \lambda_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\operatorname{ctg}\frac{2k+1}{4n}\pi,\ N=2n,\ n=1, 2, \ldots$$

Используя неравенства

$$\frac{\pi}{2n}\operatorname{ctg}\frac{2k+1}{4n}\pi \leq \int\limits_{\frac{2k+1}{4n}\pi}^{\frac{2k+1}{4n}\pi}\operatorname{ctg} s\,ds,\ k=\overline{1, n-1},$$

из (1.30) находим

$$(1.31)\qquad \lambda_n = \frac{1}{n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n} + \frac{2}{\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{4n}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4n}} \operatorname{ctg} s\,ds = \frac{1}{n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n} + \frac{2}{\pi}\ln\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n}.$$

Легко видеть, что

$$\frac{1}{n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n} \leq \frac{4}{\pi},\quad \ln\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n} \leq \ln\frac{4n}{\pi},\quad n=1, 2, \ldots$$

Отсюда и из (1.31) следует

$$(1.32)\qquad \lambda_n \leq \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi}\ln\frac{2}{\pi}N,\ N=2n.$$

Тогда, учитывая роль постоянной Лебега λ_n, при $N=2n$ убеждаемся в справедливости соотношений (1.29) и (1.24).

Далее, формула (1.25) следует* из соотношения (см., например, [2] и [3])

$$(1.33)\qquad \| P_n x \|^2_{L_2} = \frac{N-2n-1}{8n^2}\left|\sum_{k=1}^{N}(-1)^k x(s_k)\right|^2 + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}|x(s_k)|^2,\quad x \in C.$$

Теперь докажем справедливость формулы (1.26). Предположим противное. Тогда существует положительная постоянная Q такая, что на множестве непрерывных 2π-периодических функций C, всюду плотном в L_2, при $N=2n+1$ справедливо неравенство

$$(1.34)\qquad \| P_n x \|_{L_2} = \left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}|x(s_k)|^2\right]^{\frac{1}{2}} \leq Q\| x \|_{L_2},\quad x \in C.$$

Однако нетрудно построить такую непрерывную 2π-периодическую функцию $x_0=x_0(s)$, для которой

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}|x_0(s_k)|^2 > (Q+\varepsilon)^2\| x_0 \|^2_{L_2},\quad \varepsilon=\text{const}>0,$$

что противоречит (1.34). Аналогично рассматривается случай $N=2n$.

Далее, очевидно, что формулы (1.27) и (1.28) следуют из формул соответственно (1.24) и (1.25).

3°. Теперь оценим погрешность квадратурного процесса (1.20)—(1.23). Обозначим через $H^{(r)}_\alpha$, $r \geq 0$, $0<\alpha\leq 1$, множество r раз непрерывно дифференцируемых 2π-периодических функций, r-ие производные которых удовлетворяют условию Гельдера с показателем α, $0<\alpha\leq 1$. Тогда [8] для $x \in H^{(r)}_\alpha$

$$(1.35)\qquad E_n(x) \leq \frac{3\pi}{4(n+1)^{r+\alpha}} H(x^{(r)};\ \alpha),\ n=0, 1, \ldots$$

* Заметим, что в случае $N=2n$ при доказательстве (1.33) в [3] допущена некоторая неточность.

С помощью теоремы 1, лемм 1 и 2 и неравенства (1.35) легко доказывается следующая

Теорема 3. Если плотность $x(s)\in H_\alpha^{(r)}$, $r\geqq 0$, $0<\alpha\leqq 1$, то квадратурный процесс (1.20)—(1.23) сходится равномерно при неограниченном возрастании числа N узлов интерполяции. При этом для остаточного члена справедлива оценка

$$(1.36)\qquad |R_n(x;s)|\leqq\frac{3}{2\alpha}\left(1+\frac{4}{\pi}+\frac{2}{\pi}\ln\frac{2}{\pi}N\right)\frac{\ln(B\pi en^\alpha)}{(m+1)^{r+\alpha}}H(x^{(r)};\alpha),$$

где $n=\left[\frac{N}{2}\right]$, $m=\left[\frac{N-1}{2}\right]$, $N=1,2,\ldots;$

$$B=B(r+\alpha)=\begin{cases}4, & r=0,\quad 0<\alpha\leqq 1;\\ \dfrac{2(1+2^{-r-\alpha})}{1-2^{1-r-\alpha}}, & r\geqq 1,\ 0<\alpha\leqq 1.\end{cases}$$

Из теоремы 2 и леммы 2 следует

Теорема 4. Для любой R-интегрируемой плотности $x(s)$ квадратурный процесс (1.20)—(1.23) сходится в среднем с показателем $p, 1<p<\infty$. Если же $x(s)\in C$, то среднеквадратическая погрешность может быть оценена неравенством

$$(1.37)\qquad \|R_n(x;s)\|_{L_2}\leqq 2E_m(x),\quad x\in C;\ n=\left[\frac{N}{2}\right],\ m=\left[\frac{N-1}{2}\right],\ N=1,2,\ldots$$

Если, кроме того, $x(s)\in H_\alpha^{(r)}$, $(r\geqq 0, 0<\alpha\leqq 1$, то при $r+\alpha>1/2$ квадратурный процесс (1.20)—(1.23) сходится равномерно, причем равномерно относительно s и $N=1,2,\ldots$ справедлива оценка

$$(1.38)\quad |R_n(x;s)|\leqq\frac{3\pi\sqrt{2}}{2}\,\frac{1+2^{-r-\alpha}}{1-2^{-r-\alpha+\frac{1}{2}}}\,\frac{H(x^{(r)};\alpha)}{(m+1)^{r+\alpha-\frac{1}{2}}},\ r+\alpha>\frac{1}{2};\ n=\left[\frac{N}{2}\right],\ m=\left[\frac{N-1}{2}\right]$$

Заметим, что соотношение

$$\|R_n(x;s)\|_{L_p}\to 0,\ N\to\infty,\ x\in R,\ 1<p<\infty,$$

следует из результатов [5]. Оценки (1.37) и (1.38) известны (см. гл. II из [4] или же [2], [3]).

§ 2. Сходимость в среднем метода механических квадратур для сингулярных интегральных уравнений и ее следствия.

2.1. Постановка задачи и вспомогательная лемма. Рассмотрим полное сингулярное интегральное уравнение (с. и. у.) с ядром типа Гильберта

$$(2.1)\qquad Ax\equiv a(s)x(s)+\frac{b(s)}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}x(\sigma)d\sigma+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h(s,\sigma)x(\sigma)d\sigma=f(s),$$

где a, b, h (по обоим аргументам) и f — данные 2π-периодические R-интегрируемые функции.

Согласно методу механических квадратур (м. м. к.), приближенное решение с. и. у. (2.1) будем искать в виде (см. [9]—[10]) интерполяционного полинома

(2.2) $$x_n(s)=\frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N} c_k \Delta_n(s-s_k),\quad n=\left[\frac{N}{2}\right],\quad s_k=\frac{2k\pi}{N}+\frac{\omega}{N}.$$

Неизвестные коэффициенты будем определять из системы линейных алгебраических уравнений

(2.3) $$a_j c_j+\frac{b_j}{N}\sum_{k=1}^{N}\alpha_{j-k}c_k+\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}h_{jk}c_k=f_j,\ j=\overline{1,N},$$

где $a_j=a(s_j)$, $b_j=b(s_j)$, $h_{jk}=h(s_j, s_k)$, $f_j=f(s_j)$, коэффициенты α_{j-k} определены соотношениями (1.22)—(1.23).

Дальше нас будут интересовать вопросы разрешимости системы (2.3) и сходимости приближенных решений (2.2) к точному решению с. и. у. (2.1).

Исследование этих вопросов существенным образом будет опираться на результаты § 1 и на следующее утверждение из общей теории приближенных методов (см. [11]).

Лемма 3. Пусть X и Y — произвольные линейные нормированные пространства, а $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$ — соответственно их произвольные подпространства одинаковой размерности. Рассмотрим операторные уравнения

(A) $$Kx=y,\ x\in X,\ y\in Y,$$

(B) $$\widetilde{K}\widetilde{x}=\widetilde{y},\ \widetilde{x}\in\widetilde{X},\ \widetilde{y}\in\widetilde{Y},$$

где K и $\widetilde{K}$ — линейные операторы, действующие соответственно из X в Y и из $\widetilde{X}$ в $\widetilde{Y}$.

Если оператор K имеет непрерывный обратный и

(C) $$p=\|\Delta K\|\cdot\|K^{-1}\|<1,\ \Delta K=\widetilde{K}-K:\ \widetilde{X}\to Y,$$

то приближенный оператор $\widetilde{K}$ имеет также непрерывный обратный, причем

(D) $$\|\widetilde{K}^{-1}\|\leqq\|K^{-1}\|(1-p)^{-1}$$

и для решений уравнений (A) и (B) справедлива оценка:

(E) $$\|x-\widetilde{x}\|=\|K^{-1}y-\widetilde{K}^{-1}\widetilde{y}\|\leqq\{\|y-\widetilde{y}\|+p\|y\|\}\|K^{-1}\|(1-p)^{-1}.$$

2.2. Сходимость в среднем м. м. к. и оценка среднеквадратической погрешности. Равномерная сходимость м. м. к. как следствие сходимости в среднем. Переходя к обоснованию м. м. к., будем предполагать, что функции $a(s)$ и $b(s)$ удовлетворяют условию Гельдера с некоторым положительным показателем, причем $a^2+b^2\neq 0$ и $\operatorname{ind}(a+ib)=0$, а h (по обоим аргументам) и f — непрерывные 2π-периодические функции.

При этих условиях с. и. у. (2.1) можно рассматривать как нормально разрешимое [12], [13] линейное операторное уравнение вида $Ax=f$ в пространстве $X=L_2=L_2(0, 2\pi)$.

Каждой функции $x(s)\in L_2$ поставим в соответствие интеграл типа Коши

(2.4) $$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{x(\sigma)d\tau}{\tau-z},\quad \tau=e^{i\sigma},$$

где γ — единичная окружность с центром в начале координат. Полагая

$$x^{\pm}=x^{\pm}(s)=\Phi^{\pm}(t),\ t=e^{is},\ I_0x=I_0(x;s)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}x(\sigma)d\sigma,$$

с помощью формул Сохоцкого—Племеля [12], [13] находим

(2.5) $$x^+(s)-x^-(s)=x(s),\ I(x;s)=+i[x^+(s)+x^-(s)]-iI_0(x;s).$$

Тогда с.и.у. (2.1) можно свести к следующей обобщенной краевой задаче Римана:

(2.6) $$(a+ib)x^+-(a-ib)x^-+I_0h_1x=f,$$

где

$$t=e^{is},\ \tau=e^{i\sigma},\ h_1=h_1(s,\sigma)=h(s,\sigma)-ib(s).$$

Краевую задачу (2.6) можно рассматривать как линейное операторное уравнение (см. [6], [9], [11]) вида

(2.7) $$Kx\equiv Ux+Vx=y,$$

где U и V — соответственно непрерывный и вполне непрерывный операторы в $X=L_2$, причем

$$Ux=\psi^-x^+-\psi^+x^-,\ Vx=dI_0h_1x,\ y=d\,.f,$$

(2.8) $$\psi(s)=\psi^+(s)-\psi^-(s),\ \psi^{\pm}=\exp\theta^{\pm},\ 2\theta^{\pm}=\pm g-iIg+I_0g,$$

$$\theta(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{g(\sigma)d\tau}{\tau-z},\quad g(s)=\ln\frac{a(s)-ib(s)}{a(s)+ib(s)},\quad d(s)=\frac{\psi^-(s)}{a(s)+ib(s)}.$$

Обозначим через $\widetilde{X}$ множество всех тригонометрических полиномов порядка не выше n вида

(2.9) $$\widetilde{x}(s)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\cos ks+\beta_k\sin ks,\quad n=\left[\frac{N}{2}\right].$$

Тогда нетрудно видеть, что система (2.3) эквивалентна (во вполне определенном смысле) заданному в $\widetilde{X}$ следующему линейному операторному уравнению:

(2.10) $$\widetilde{K}\widetilde{x}\equiv\widetilde{U}\widetilde{x}+\widetilde{V}\widetilde{x}=\widetilde{y},$$

где

(2.11) $$\widetilde{U}\widetilde{x}=PU\widetilde{x},\quad \widetilde{V}\widetilde{x}=P_sdI_0P_\sigma(h_1\widetilde{x}),\ \widetilde{y}=Py,$$

причем операторы $P_s=P_n$ и $P_\sigma=P_n$, определенные в 1.3, применены по соответствующим переменным.

Теперь для операторов K и $\widetilde{K}$, определяемых уравнениями (2.7) и (2.10), проверим выполнение условий леммы 3.

С помощью леммы 2 и соотношений (2.7)—(2.11)* для любого $\widetilde{x}\in\widetilde{X}$

* При $N=2n$ дополнительно предполагается, что

$$\sum_{k=1}^{2n}h(s,s_k)\cos ns_k=\sum_{k=1}^{2n}h(s,s_k)\sin ns_k=0.$$

находим

$$\|\widetilde{K}\widetilde{x}-P\widetilde{K}\widetilde{x}\|_{L_2}=\|P_s dI_0(h_1\widetilde{x}\,;\,s)-P_s dI_0[P_\sigma(h_1\widetilde{x});\,s]\|_{L_2}$$

$$\leq\|dI_0[h_1\widetilde{x}-P_\sigma(h_1\widetilde{x});\,s]\|_C\leq\|d\|_C\,.\,\|I_0[(h_1-P_\sigma h_1)\widetilde{x};\,s]\|_C;$$

$$|I_0[(h_1-P_\sigma h_1)\widetilde{x};\,s]|\leq\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|h_1(s,\sigma)-P_\sigma h_1(s,\sigma)|\,.\,|\widetilde{x}(\sigma)|\,d\sigma$$

$$\leq\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|h_1-P_\sigma h_1|^2 d\sigma\right]^{\frac{1}{2}}.\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\widetilde{x}(\sigma)|^2 d\sigma\right]^{\frac{1}{2}}\leq 2E_m^\sigma(h_1)\|\widetilde{x}\|_{L_2},$$

где $E_m^\sigma(f)$ — наилучшее равномерное приближение функции $f(s,\sigma)$ по σ (равномерно относительно s) тригонометрическими полиномами порядка не выше $m=[(N-1)/2]$.

Таким образом, для любого $\widetilde{x}\in\widetilde{X}$ имеем

$$\|\widetilde{K}\widetilde{x}-P\widetilde{K}\widetilde{x}\|_{L_2}\leq 2M(d)E_m^\sigma(h_1)\|\widetilde{x}\|_{L_2},\quad \widetilde{x}\in\widetilde{X}. \tag{2.12}$$

Далее, так как для любого $\widetilde{x}\in\widetilde{X}$

$$|V\widetilde{x}-PV\widetilde{x}|=|I_0[dh_1-P_s(dh_1)]\widetilde{x}|\leq\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|dh_1-P_s(dh_1)|^2 d\sigma\,.\,\|\widetilde{x}\|^2_{L_2},$$

то снова с помощью леммы 2 находим

$$\|V\widetilde{x}-PV\widetilde{x}\|_{L_2}\leq\|\widetilde{x}\|_{L_2}\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}ds\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|dh_1-P_s(dh_1)|^2 d\sigma\right]\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{2.13}$$

$$\leq\|\widetilde{x}\|_{L_2}\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}d\sigma\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|dh_1-P_s(dh_1)|^2 ds\right]\right\}^{\frac{1}{2}}\leq 2E_m^s(dh_1)\|\widetilde{x}\|_{L_2},$$

где $E_m^s(f)$ имеет такой же смысл, что и $E_m^\sigma(f)$.

Пусть полином $\psi_n(s)\in\widetilde{X}$ аппроксимирует функцию $\psi(s)$ в некотором смысле (см. ниже теоремы 5 и 6). В силу формул (2.5) и (2.8) нетрудно видеть, что

$$\psi_n=\psi_n^+-\psi_n^-,\quad \psi_n^+(s)=\sum_{k=0}^{n}\beta_k t^k,\quad \psi_n^-(s)=\sum_{k=-n}^{-1}\beta_k t^k,\quad t=e^{is},$$

и, следовательно, $U_n:\widetilde{X}\to\widetilde{X}$, где $U_n x=\psi_n^- x^+-\psi_n^+ x^-$. Поэтому

$$\|U\widetilde{x}-PU\widetilde{x}\|\leq\|U\widetilde{x}-U_n\widetilde{x}\|+\|P(U\widetilde{x}-U_n\widetilde{x})\|\quad(\widetilde{x}\in\widetilde{X}). \tag{2.14}$$

Положим $\alpha_n=\alpha_n^++\alpha_n^-$, где $\alpha_n^\pm=\|\psi^\pm(s)-\psi_n^\pm(s)\|_C$. Тогда для первого слагаемого из (2.14) легко находим

(2.15) $$\| U\tilde{x}-U_n\tilde{x}\|_{L_2}\leq\|(\psi^- -\psi_n^-)\tilde{x}^+\|_{L_2}+\|(\psi^+ -\psi_n^+)\tilde{x}^-\|_{L_2}$$
$$\leq a_n^-\|\tilde{x}^+\|_{L_2}+a_n^+\|\tilde{x}^-\|_{L_2}.$$

Для второго слагаемого из (2.14) с помощью формулы (1.33) находим

(2.16) $$\| P(U\tilde{x}-U_n\tilde{x})\|_{L_2}\leq\| P_s[(\psi^- -\psi_n^-)\tilde{x}^+]\|_{L_2}+\| P_s[(\psi^+ -\psi_n^+)\tilde{x}^-]\|_{L_2}$$

$$\leq\left[\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}|\psi^-(s_j)-\psi_n^-(s_j)|^2|\tilde{x}^+(s_j)|^2\right]+\left[\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\psi^+(s_j)-\psi_n^+(s_j)|^2|\tilde{x}^-(s_j)|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq a_n^-\left[\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}|\tilde{x}^+(s_j)|^2\right]^{\frac{1}{2}}+a_n^+\left[\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}|\tilde{x}^-(s_j)|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq a_n^-\|\tilde{x}^+\|_{L_2}+a_n^+\|\tilde{x}^-\|_{L_2},\quad \tilde{x}=\tilde{x}^+-\tilde{x}^-\in\tilde{X}.$$

Известно [13], что $\| Ix\|_{L_2}\leq\| x\|_{L_2}$, $x\in L_2$, где знак равенства достигается лишь для функций, у которых свободный член ряда Фурье отсутствует. Отсюда и из формулы

$$2\tilde{x}^{\pm}(s)=\pm\tilde{x}(s)+iI(\tilde{x};s)+I_0(\tilde{x};s),\quad \tilde{x}\in\tilde{X},$$

которая следует из формул (2.5), нетрудно видеть, что

(2.17) $$\|\tilde{x}^{\pm}\|_{L_2}\leq\|\tilde{x}\|_{L_2},\quad \tilde{x}=\tilde{x}^+-\tilde{x}^-\in\tilde{X}.$$

Тогда из соотношений (2.14)—(2.17) получаем неравенство

(2.18) $$\| U\tilde{x}-PU\tilde{x}\|_{L_2}\leq 2a_n\|\tilde{x}\|_{L_2},\quad \tilde{x}\in\tilde{X},$$

а из (2.13) и (2.18) — неравенство

(2.19) $$\| K\tilde{x}-PK\tilde{x}\|_{L_2}\leq 2[a_n+E_m^s(dh_1)]\|\tilde{x}\|_{L_2},\quad \tilde{x}\in\tilde{X}.$$

Очевидно, что из (2.12) и (2.19) следует оценка

(2.20) $$\| K\tilde{x}-\tilde{K}\tilde{x}\|_{L_2}\leq 2\{a_n+E_m^s(d\,.\,h_1)+M(d)E_m^{\sigma}(h_1)\}\|\tilde{x}\|_{L_2},\quad \tilde{x}\in\tilde{X}.$$

Теперь с помощью (2.20) и леммы 3 легко доказывается следующая

Теорема 5. Пусть a и $b\in H_{\alpha}$, $0<\alpha\leq 1$, h и $f\in C$, причем $a^2+b^2\neq 0$ и $\operatorname{ind}(a+ib)=0$. Если с. и. у. (2.1) имеет единственное решение $x\in L_2$ при любом $f\in L_2$, то для достаточно больших N, точнее, при

(2.21) $$q=q(N)=2M(d^{-1})\| A^{-1}\|\{a_n+E_m^s(d\,.\,h_1)+M(d)E_m^{\sigma}(h_1)\}<1,$$

система (2.3) имеет единственное решение $(c_1,\ldots,c_N)$. Приближенные решения (2.2) сходятся в среднем к точному решению уравнения (2.1) со скоростью

(2.22) $$\| x-x_n\|_{L_2}\leq\{q\| d\,.\,f\|_{L_2}+E_m(d\,.\,f)\}(1-q)^{-1}M(d^{-1})\| A^{-1}\|,$$

где $n=[N/2]$, $m=[(N-1)/2]$, $\| A^{-1}\|=\| A^{-1}\|_{L_2\to L_2}$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что в силу предположений теоремы существуют непрерывные операторы $A^{-1}: L_2\to L_2$, $K^{-1}: L_2\to L_2$, причем $\| K^{-1}\|\leq M(d^{-1})\| A^{-1}\|$.

Так как a и $b \in H_\alpha$, то [12] $\psi, \psi^{\pm}, d \in H_\alpha$, $0<\alpha<1$, и, следовательно, $d.h_1$ и $d.f \in C$. Пусть $\psi_n(s)$ — тригонометрический полином наилучшего равномерного приближения функции $\psi(s)$. Тогда в силу формул (2.5) нетрудно видеть, что

$$\alpha_n \leq \| \psi-\psi_n \|_C + \| I_0(\psi-\psi_n) \|_C + \| I(\psi-\psi_n) \|_C \leq 2E_n(\psi) + \| I(\psi-\psi_n) \|_C.$$

Поскольку здесь $\| \psi-\psi_n \|_C \leq 3\pi H(\psi; \alpha)/4n^\alpha$, то с помощью следствия из леммы 1 находим*

$$\alpha_n \leq \frac{3\pi}{2n^\alpha} H(\psi; \alpha)\left[1+\frac{1}{\pi\alpha}(1+\ln 4\pi+\alpha \ln n)\right], \ 0<\alpha<1. \tag{2.23}$$

Из (2.21) и (2.23) с учетом свойств наилучших равномерных приближений (см., например, [8]) получаем, что $q=q(N)\to 0$ при $N\to\infty$. Отсюда и из леммы 3 следует справедливость всех утверждений теоремы.

Скорость сходимости приближенных решений (2.2) устанавливается в следующей теореме.

Теорема 6. Пусть в условиях теоремы 5 коэффициенты уравнения (2.1) удовлетворяют (h — по обоим аргументам) дополнительному условию

$$a, b, h, f \in H_\alpha^{(r)}, \ r \geq 0, \ 0<\alpha<1. \tag{2.24}$$

Тогда при

$$q_1 = q_1(N) = M_1 n^{-r-\alpha} < 1, \ r \geq 0, \ 0<\alpha<1, \tag{2.25}$$

система (2.3) однозначно разрешима и среднеквадратическая погрешность приближенного решения (2.2) может быть оценена неравенством

$$\| x-x_n \|_{L_2} \leq M_2(1-q_1)^{-1} n^{-r-\alpha}, \ r \geq 0, \ 0<\alpha<1, \tag{2.26}$$

где

$$M_1 = \frac{3}{2}\pi M(d^{-1}) \| A^{-1} \| \{M_0 H(\psi^{(r)}; \alpha) + H[(d.h_1)_s^{(r)}; \alpha] + M(d) H[(h_1)_\sigma^{(r)}; \alpha]\}; \tag{2.26'}$$

$$M_0 = \begin{cases} 2\left[1+\frac{1}{\pi\alpha}(1+\ln 4\pi+\alpha \ln n)\right], & r=0; \\ 6e\left[1+\frac{4}{\pi}+\frac{2}{\pi}\ln(2r+1),\right. & r \geq 1; \end{cases} \tag{2.26''}$$

$$M_2 = \left\{M_1 M(d.f) + \frac{3}{4}\pi H[(d.f)^{(r)}; \alpha]\right\} M(d^{-1}) \| A^{-1} \|. \tag{2.26'''}$$

Следствие. Если $r+\alpha>1/2$, то в условиях теоремы 6 приближенные решения (2.2) равномерно сходятся к точному решению $x(s)$ с. и. у. (2.1), причем

$$|x(s)-x_n(s)| \leq \frac{M_2\sqrt{10}}{n^{r+\alpha-\frac{1}{2}}} \frac{1+2^{-r-\alpha}}{1-2^{-r-\alpha+\frac{1}{3}}}, \quad r+\alpha>\frac{1}{2}. \tag{2.27}$$

---

* При $\alpha=1$ все нижеследующие оценки справедливы лишь в смысле порядка. Однако, для их более детальной характеристики необходимы дополнительные рассуждения.

Доказательство. В условиях (2.24) имеем [12]

$$\psi, \psi^{+}, d, h_1, d\,.\,h_1, d\,.\,f \in H_{\alpha}^{(r)}, (r \geq 0, 0<\alpha<1. \tag{2.28}$$

Поэтому при $r=0$ справедливость теоремы следует из соотношений (2.21)—(2.23), (2.28) и из свойств наилучших равномерных приближений. Пусть теперь $r \geq 1$. Тогда с помощью результатов В. В. Иванова [6], гл. II) можно показать, что существует такой тригонометрический полином $\psi_n(s) \in \widetilde{X}$, для которого

$$a_n = a_n(\psi_n) \leq 3\pi M_0 H(\psi^{(r)};\ \alpha)/4n^{r+\alpha},\ r \geq 1,\ 0<\alpha<1, \tag{2.29}$$

где M_0 определена вторым из соотношений (2.26″). Учитывая (2.21), (2.22), (2.28), (2.29) и оценки типа (1.35) для наилучших равномерных приближений $E_m^s(d\,.\,h_1)$, $E_m^{\sigma}(h_1)$, $E_m(d\,.\,f)$, убеждаемся в справедливости теоремы и при $r \geq 1$.

Докажем справедливость следствия. Очевидно, что при $N \geq N_0$ из (2.25)—(2.26) следует неравенство

$$\| x - x_n \|_{L_2} \leq 2M_2 n^{-r-\alpha},\ r \geq 0,\ 0<\alpha<1. \tag{2.30}$$

Следуя С. Б. Стечкину [14], $x(s)-x_n(s)$ представим в виде

$$x(s)-x_n(s)=\sum_{k=1}^{\infty} T_k(s),\ T_k(s)=x_{n_k}(s)-x_{n_{k-1}}(s),\ n_k=2^k n.$$

Тогда, поступая так же, как и при доказательстве леммы 8 нашей работы [2], из соотношений (2.30) и (2.31) легко получаем оценку (2.27)

Заметим, что в смысле порядка оценка типа (2.27) известна. Однако в следствии из теоремы 6 определяется не только порядок погрешности, но и оценка самой погрешности.

2.3. О методе механических квадратур для интегральных уравнений Фредгольма. При $a(s)\equiv 1$ и $b(s)\equiv 0$ с. и. у. (2.1) переходит в хорошо известное интегральное уравнение Фредгольма

$$A_0 x \equiv x(s)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(s, \sigma)x(\sigma)d\sigma = f(s). \tag{2.32}$$

Тогда система (2.3) тоже упрощается и принимает вид

$$c_j+\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} h_{lj} c_k = f_j,\ j=\overline{1,N}. \tag{2.33}$$

Из формул (2.8) нетрудно видеть, что в рассматриваемом случае

$$g(s)\equiv 0,\ \theta^{\pm}(s)\equiv 0,\ \psi^{\pm}(s)\equiv 1,\ h_1(s, \sigma)=h(s, \sigma),\ K=A_0. \tag{2.34}$$

Поэтому для уравнения (2.32) теорема 5 значительно упрощается и усиливается. Точнее, справедлива следующая

Теорема 7. Пусть $h(s, \sigma)$ и $f(s)$ — непрерывные 2π-периодические функции. Если уравнение (2.32) имеет единственное решение $x(s)=x^{(0)}(s) \in L_2$ при любом $f(s) \in L_2$, то при

$$q_0 = q_0(N) = 2\|A_0^{-1}\|\{E_m^s(h) + E_m^\sigma(h)\} < 1 \tag{2.35}$$

система (2.33) также имеет единственное решение $\{c_j\} = \{c_j^{(0)}\}$. Приближенные решения

$$x_n^{(0)}(s) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} c_k^{(0)} \Delta_n(s - s_k) \tag{2.36}$$

сходятся к точному решению уравнения (2.32) в среднем со скоростью

$$\|x_n^{(0)} - x^{(0)}\|_{L_2} \leq \{q_0\|f\|_{L_2} + E_m(f)\}(1 - q_0)^{-1}\|A_0^{-1}\|, \tag{2.37}$$

где $n = [N/2]$, $m = [(N-1)/2]$.

Следствие 1. В условиях теоремы 7 приближенные решения (2.36) сходятся к точному решению в том смысле, что

$$\|x^{(0)} - x_n^{(0)}\|_{\overline{C}_N} = \max_{1 \leq j \leq N} |x_n^{(0)}(s_j) - x^{(0)}(s_j)| \to 0, \ N \to \infty, \tag{2.38}$$

причем погрешность может быть оценена неравенствами

$$\|x^{(0)} - x_n^{(0)}\|_{\overline{C}_N} \leq 2E_m^\sigma(h)\|x^{(0)}\|_{L_2} + M(h)\|x^{(0)} - x_n^{(0)}\|_{L_2}, \tag{2.39}$$

$$\|x^{(0)} - x_n^{(0)}\|_{\overline{C}_N} \leq \frac{2Q_0 S^2}{1 - q_0}\{E_m^s(h) + 2E_m^\sigma(h) + E_m(f)\}, \tag{2.40}$$

где $Q_0 = \max\{M(f), M(h)\}$, $S = \max\{1, \|A_0^{-1}\|_{L_2}\}$.

Следствие 2. В условиях теоремы 7 равномерно относительно s справедливы оценки

$$|x^{(0)}(s) - x_n^{(0)}(s)| \leq \|P_n\|_{C \to C}\|x^{(0)} - x_n^{(0)}\|_{\overline{C}_N} + (1 + \|P_n\|_{C \to C})E_m(x^{(0)}), \tag{2.41}$$

$$|x^{(0)}(s) - x_n^{(0)}(s)| \leq \frac{4QS^2}{1 - q_0}\|P_n\|_{C \to C}\{E_m^s(h) + E_m^\sigma(h) + E_m(f)\}, \tag{2.42}$$

где $Q = \max\{1, Q_0\}$, а $\|P_n\|_{C \to C}$ оценена в лемме 2.

Доказательство. Очевидно, что в доказательстве нуждаются лишь оценки (2.39)—(2.42).

Система (2.33) эквивалентна операторному уравнению

$$A_0\widetilde{x} \equiv \widetilde{x} + P_s I_0 P_\sigma(h\widetilde{x}) = Pf, \ \widetilde{A}_0 : \widetilde{X} \to \widetilde{X}. \tag{2.43}$$

При $x = x^{(0)}$ и $\widetilde{x} = x_n^{(0)}$ уравнения (2.32) и (2.43) превращаются в тождества, из которых легко получается оценка (2.39). Тогда из (2.35), (2.37), (2.39) и лемм 2 и 3 находим оценку (2.40), из которой очевидно, следует соотношение (2.38).

Далее, в силу леммы 2 имеем

$$|x^{(0)}(s) - x_n^{(0)}(s)| \leq |x^{(0)}(s) - P_n x^{(0)}(s)| + |x_n^{(0)}(s) - P_n x^{(0)}(s)|$$
$$\leq (1 + \|P_n\|_{C \to C})E_m(x^{(0)}) + \|P_n\|_{C \to C} \max_{1 \leq j \leq N} |x^{(0)}(s_j) - x_n^{(0)}(s_j)|,$$

что равносильно (2.41). Нетрудно видеть, что

$$E_m(x^{(0)}) \leq E_m(f) + E_m^s(h)M(f)\|A_0^{-1}\|_{L_2}.$$

Отсюда и из (2.40), (2.41) следует оценка (2.42).

В заключение отметим, что теоремы 5—7 и их ее следствия позволяют получать различные эффективные среднеквадратические и равномерные оценки погрешности метода механических квадратур для уравнений типа (2.1) и (2.32).

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Г. Габдулхаев. О приближенном решении сингулярных интегральных уравнений методом механических квадратур. Доклады III Сибирской конференции по математике и механике. Томск, 1964, 92—94.
2. Б. Г. Габдулхаев. Об аппроксимации тригонометрическими полиномами и погрешности квадратурных формул для сингулярных интегралов. В сб.: Функциональный анализ и теория функций, № 4. Казань, 1967, 54—74.
3. Б. Г. Габдулхаев. Об одном общем квадратурном процессе для сингулярных интегралов. В сб. : Функциональный анализ и теория функций, № 4. Казань, 1967, 75—90.
4. Б. Г. Габдулхаев. Некоторые вопросы теории приближенных методов и их приложения к сингулярным интегральным уравнениям. Автореф. канд. диссертации. Казань, Казанский гос. унив., 1966.
5. А. Зигмунд. Тригонометрические ряды. Москва, 1965.
6. В. В. Иванов. Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. Киев, 1968.
7. H. Ehlich, K. Zeller. Auswertung der Normen von Interpolationsoperatoren. *Math. Annalen*, **164** (1966), 105—112.
8. Н. И. Ахиезер. Лекции по теории аппроксимации. Москва, 1965.
9. Б. Г. Габдулхаев. Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений методом механических квадратур. *Доклады АН СССР*, **179** (1968), 260—263.
10. Б. Г. Габдулхаев. Об одном общем квадратурном процессе и его применении к приближенному решению сингулярных интегральных уравнений. *Доклады АН СССР*, **179** (1968), 515—517.
11. Б. Г. Габдулхаев. Некоторые вопросы теории приближенных методов, III. *Годишник Соф. унив., Мат. фак.*, **63** (1970), 39—52.
12. Н. И. Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения. Москва, 1968.
13. С. Г. Михлин. Сингулярные интегральные уравнения. *Успехи мат. наук*, **3** (1948).
14. С. Б. Стечкин О порядке наилучших приближений непрерывных функций. *Известия АН СССР*, **15** (1951), 219—242.

Казанский государственный университет имени В. И. Ульянова — Ленина
Казань, СССР

Поступило 30 июня 1970