Труды Международной Конференции по конструктивной теории функций Варна, 19—25 мая, 1970

Proceedings of the International Conference on Constructive Function Theory, Varna, May 19—25, 1970

О РАЦИОНАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИИ x^{α}

А. А. Гончар

Резюме. Доказывается при любом рациональном (нецелом) $\alpha>0$ неравенство $R_{n,\alpha}>\exp(-A_{\alpha}\sqrt{n})$, $n>1$, где $A_{\alpha}>0$ зависит только от α и где $R_{n,\alpha}$ наилучшее приближение функции x^{α}, $\alpha>0$, на отрезке $[0, 1]$ посредством рациональных функций порядка не выше n.

1. Пусть $R_n(x^{\alpha})=R_{n,\alpha}$ — наилучшее приближение функции x^{α}, $\alpha>0$, на отрезке $[0, 1]$ посредством рациональных функций порядка не выше n. Ниже будет доказано следующее утверждение:

При любом рациональном (нецелом) $\alpha>0$

(1) $$R_{n,\alpha}>e^{-A_{\alpha}\sqrt{n}},\quad n>1,$$

где $A_{\alpha}>0$ зависит только от α.

Аналогичная оценка сверху (для любого действительного α) содержится в статье [1] (п. 4, следствие 1). Тем самым, для рациональных (нецелых) $\alpha>0$ имеем

(2) $$e^{-A_{\alpha}\sqrt{n}}<R_{n,\alpha}<e^{-B_{\alpha}\sqrt{n}},\quad n>1.$$

При $\alpha=1/2$ соответствующие неравенства (они эквивалентны аналогичным оценкам $R_n(|x|)$ на отрезке $[-1, 1]$) были получены Н ь ю м е н о м [2] (см. также [3], [4]).

Применяемый ниже прием не дает сколько-нибудь естественной зависимости постоянной A_{α} от параметра α; поэтому мы не фиксируем внимание на этой зависимости при выводе оценки (1). Соответствующая задача формулируется в п. 3.

2. Доказательство оценки (1). Пусть $\alpha>0$ — рациональное (нецелое) число; положим $\alpha=p/q$, где p, q — натуральные числа, не имеющие общих множителей. Через $r_n(x)$ обозначим рациональную функцию наилучшего приближения x^{α} на $[0, 1]$ (порядок $r_n(x)\leq n$). Имеем

$$\max_{x\in[0,1]}|x^{p/q}-r_n(x)|=R_{n,\alpha}.$$

Это равенство можно переписать так:

(3) $$\max_{x\in[0,1]}|x^{p}-r_n(x^{q})|=R_{n,\alpha}.$$

Обозначим через E_q множество (в комплексной плоскости), являющееся объединением отрезков $\Delta_k=\{z=te^{2\pi ki/q};\ 0\le t\le 1\}$, $k=0, 1, \ldots, q-1$. Из соотношения (3) вытекает

$$\max_{z\in E_q} \left| |z|^p - r_n(z^q)\right| = R_{n,\alpha}. \tag{4}$$

Положим $\lambda(z)=|z|^p-z^p$, $S_N(z)=r_n(z^q)-z^p$; заметим, что $S_N(z)$ — рациональная функция от z, порядок которой не превосходит $N=nq+p$.

Из (4) следует

$$\max_{z\in E_q} |\lambda(z)-S_N(z)| = R_{n,\alpha}. \tag{5}$$

Пусть ε, $0<\varepsilon<1$, любое (оно будет фиксировано ниже). Через $\Delta_k(\varepsilon)$ $k=0, 1, \ldots, q-1$, обозначим часть отрезка Δ_k, лежащую вне ε-окрестности начала координат. Имеем

$$\lambda(z)=0,\quad z\in\Delta_0(\varepsilon)=\Delta'(\varepsilon). \tag{6}$$

Из (5) и (6) вытекает неравенство

$$\max_{z\in\Delta'(\varepsilon)} |S_N(z)| \le R_{n,\alpha}. \tag{7}$$

Нетрудно видеть, что при некотором k, $1\le k\le q-1$, справедливо неравенство $|1-e^{2\pi kpi/q}|>1$. Фиксируем какой-либо индекс k, для которого выполнено это неравенство; соответствующий отрезок $\Delta_k(\varepsilon)$ обозначим через $\Delta''(\varepsilon)$. Имеем

$$|\lambda(z)|=|z|^p\,|1-e^{2\pi kpi/q}|>|z|^p\ge\varepsilon^p,\quad z\in\Delta''(\varepsilon). \tag{8}$$

Используя (5) и (8), получаем

$$\min_{z\in\Delta''(\varepsilon)} |S_N(z)| \ge \varepsilon^p - R_{n,\alpha}. \tag{9}$$

Применим теперь к рациональной функции $S_N(z)$ и отрезкам $\Delta'(\varepsilon)$, $\Delta''(\varepsilon)$ лемму об оценке минимума модуля рациональной функции, содержащуюся в [5]. В рассматриваемом случае соответствующая оценка может быть записана так:

$$\min_{z\in\Delta''(\varepsilon)} |S_N(z)| \le \varrho^N \max_{z\in\Delta'(\varepsilon)} |S_N(z)|, \tag{10}$$

где ϱ — (риманов) модуль двухсвязной области, дополнительной к объединению отрезков $\Delta'(\varepsilon)$ и $\Delta''(\varepsilon)$ (в расширенной комплексной плоскости).

Объединяя (7), (9) и (10), получаем

$$\varepsilon^p - R_{n,\alpha} \le \varrho^N R_{n,\alpha},$$

откуда

$$R_{n,\alpha} \ge \frac{\varepsilon^p}{\varrho^N+1},\quad N=nq+p. \tag{11}$$

Хорошо известно, что при круговой симметризации области ее модуль может только возрасти (см., например, [6]). Следовательно, $\varrho\le\varrho_\varepsilon$, где ϱ_ε —

модуль области, дополнительной к объединению отрезков $[-1, -\varepsilon]$ и $[\varepsilon, 1]$. Для ϱ_ε справедлива оценка (см., например, [3], п. 3)

$$\varrho_\varepsilon \leq \exp\left(\frac{c}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}\right),$$

где c — абсолютная постоянная ($c = \pi^2$).

Учитывая неравенства $\varrho \leq \varrho_\varepsilon$ и (12), из (11) получаем

$$R_{n,\alpha} \geq \varepsilon^p \left(\exp \frac{c(nq+p)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} + 1\right)^{-1}.$$

Полагая здесь, например, $\varepsilon = e^{-\sqrt{n}}$, приходим к оценке (1).

3. Отметим две нерешенные задачи, связанные с оценкой $R_{n,\alpha}$.

а) Доказать справедливость оценки (1) для любого действительного (нецелого) $\alpha > 0$.

б) Найти правильную зависимость постоянных A_α, B_α в (2) от параметра α; точнее, получить неравенства типа (2) с $A_\alpha = A \cdot \varphi(\alpha)$, $B_\alpha = B \cdot \varphi(\alpha)$, где A, B — абсолютные постоянные.

Еще более интересная задача — доказать, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} (R_{n,\alpha})^{1/\sqrt{n}}$ и найти его. При $\alpha = 1/2$ А. П. Буланов [4] показал, что этот предел существует и равен $e^{-\pi\sqrt{2}}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Гончар. О скорости рациональной аппроксимации непрерывных функций с характерными особенностями. *Матем. сборник*, **73** (1967), 630—638.
2. D. J. Newman. Rational approximation to $|x|$. *Michigan Math. J.*, **2** (1964), 11—14.
3. А. А. Гончар. Оценки роста рациональных функций и некоторые их приложения. *Матем, сборник*, **72** (1967), 489—503.
4. А. П. Буланов. Асимптотика для наименьших уклонений $|x|$ от рациональных функций. *Матем. сборник*, **76** (1968), 288—303.
5. А. А. Гончар. Об обобщенном аналитическом продолжении. *Матем. сборник*, **76** (1968), 135—146.
6. Дж. Дженкинс. Однолистные функции и конформные отображения. Москва, 1962.

Математический институт АН СССР
ул. Вавилова 42 Москва В-333
СССР

Поступило 7 июля 1970