Труды Международной Конференции по конструктивной теории функций Варна, 19—25 мая, 1970

Proceedings of the International Conference on Constructive Function Theory, Varna, May 19—25, 1970

ОПЫТ АКСИОМАТИЧЕСКОГО ПОСТРОЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ВОПРОСОВ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЯ

П. П. Коровкин

Резюме. Пусть F—метрический компакт и пусть через $r(x, t)$ обозначено расстояние между двумя элементами x, t. Метрическое пространство над множеством всех функций $f, g, \ldots$, заданных на компакте F с расстоянием $\varrho_A(f, g)$, называем A-пространством, если: 1) $\varrho_A(f, g)=\varrho_A(g, f)\geqq 0$; 2) $\varrho_A(f, \varphi)\leqq\varrho_A(f, g)+\varrho_A(g, \varphi)$; 3) Если для всех $x\in F$ имеем $f(x)\leqq g(x)\leqq\varphi(x)$, то $\varrho_A(f, \varphi)\geqq\max\{\varrho_A(f, g), \varrho_A(g, \varphi)\}$; 4) Существуют две ограниченные на F функции f и g, так что $\varrho_A(f, g)>0$; 5) $\varrho_A(f, g)\leqq\varrho_C(f, g)=\sup\limits_{x\in F}|f(x)-g(x)|$. Пусть $\psi(\delta)$ неубывающая функция ($\psi(0)=0$, $\psi(\delta)>0$; $\delta>0$) и $\{L_n\}$ последовательность монотонных операторов, удовлетворяющая

$$L_n[c+D\psi(r(t, x)), x] \xrightarrow{A} C, \tag{1}$$

где C и D любые постоянные. Функция $f(x)$ определенная на компакте F, называется A-непрерывной, если для любого $\varepsilon>0$ существуют две непрерывные в F функции $u(x)$ и $v(x)$, для которых $u(x)\leqq f(x)\leqq v(x)$ и $\varrho_A(u, v)<\varepsilon$. Для того, чтобы любая последовательность монотонных или линейных операторов, для которой выполнено соотношение (1), сходилась в A-метрике к f, необходимо и достаточно, чтобы f была A-непрерывной.

Пусть F—компакт, $x,\ t\in F$, $r(x, t)$—расстояние от точки x до точки t компакта, удовлетворяющее обычным условиям: 1) $r(x, t)>0,\ x\neq t$; 2) $r(x, t)=r(t, x)$; 3) $r(x, y)\leqq r(x, t)+r(t, y)$; 4) $r(x, x)=0$.

A-пространством мы называем метрическое пространство над множеством всех функций, заданных на компакте F, расстояние $\varrho_A(f, g)$ между которыми удовлетворяет условиям:

1) $\varrho_A(f, g)=\varrho_A(g, f)\geqq 0$;

2) $\varrho_A(f, \varphi)\leqq\varrho_A(f, g)+\varrho_A(g, \varphi)$;

3) если $f(x)\leqq g(x)\leqq\varphi(x)$ для всех $x\in F$, то

$$\varrho_A(f, \varphi)\geqq\max\{\varrho_A(f, g);\ \varrho_A(g, \varphi)\};$$

4) существуют две ограниченные на компакте функции $f(x)$ и $g(x)$, для которых $\varrho_A(f, g)>0$;

5) $\varrho_A(f, g)\leqq\varrho_C(f, g)=\sup\limits_{x\in F}|f(x)-g(x)|$.

Оператор

$$L(f, x)=L[f(t), x]$$

называется монотонным, если из $f(t)\leq g(t)\Longrightarrow L(f, x)\leq L(g, x)$.

Пусть $\psi(\delta)$ — неубывающая непрерывная функция, $\psi(0)=0$, $\psi(\delta)>0$, $\delta>0$. Мы будем рассматривать последовательности монотонных операторов, для которых

$$L_n\{C+D\psi[r(t, x)];\ x\}\xrightarrow{A} C \tag{1}$$

при любых постоянных C и D.

Теорема 1. Если $f(t)\in F_C$ и выполнено (1), то

$$L_n(f, x)\xrightarrow{A} f(x).$$

Доказательство. Так как функция $f(t)$ непрерывна на компакте F, то для $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что $-\varepsilon<f(t)-f(x)<\varepsilon$, $r(t, x)<\delta$. Пусть $|f(t)|\leq M$. Тогда при $r(t, x)\geq\delta$

$$-2M\frac{\psi[r(t, x)]}{\psi(\delta)}\leq f(t)-f(x)\leq 2M\frac{\psi[r(t, x)]}{\psi(\delta)}.$$

Тем самым, для любых двух точек компакта F,

$$\alpha=-\varepsilon-2M\frac{\psi[r(t, x)]}{\psi(\delta)}<f(t)-f(x)<\alpha,$$

$$f(x)-\alpha<f(t)<f(x)+\alpha. \tag{2}$$

Опираясь на это и монотонность операторов, получим

$$L_n^-=L_n[f(x)-\alpha, x]\leq L_n(f, x)\leq L_n[f(x)+\alpha, x]=L_n^+. \tag{3}$$

Крайние члены неравенств (3) в силу (1) стремятся в A-метрике соответственно к $f(x)-\varepsilon$ и $f(x)+\varepsilon$,

$$\varrho_A(L_n^-, f(x)-\varepsilon)\to 0;\ \varrho_A(L_n^+, f(x)+\varepsilon)\to 0. \tag{4}$$

Отсюда

$$\varrho_A(L_n^-, L_n^+)\leq\varrho_A(L_n^-, f-\varepsilon)+\varrho_A(f-\varepsilon, f+\varepsilon)$$
$$+\varrho_A(f+\varepsilon, L_n^+)\xrightarrow{A}\varrho_A(f-\varepsilon, f+\varepsilon)\leq\varrho_C(f-\varepsilon, f+\varepsilon)=2\varepsilon.$$

Следовательно, для больших значений n,

$$\varrho_A(L_n^-, L_n^+)<3\varepsilon. \tag{5}$$

Далее имеем

$$\varrho_A(L_n, f)\leq\varrho_A(f, f+\varepsilon)+\varrho_A(f+\varepsilon, L_n^+)+\varrho_A(L_n^+, L_n). \tag{6}$$

До сих пор мы не опирались на свойство 3) A-метрики. В силу этого свойства последнее слагаемое неравенства (6)

$$\varrho_A(L_n^+, L_n)\leq\varrho_A(L_n^+, L_n^-)<3\varepsilon,\quad n>N,$$

Так как $\varrho_A(f, f+\varepsilon) \leqq \varrho_C(f, f+\varepsilon) = \varepsilon$ и справедливо (4), то

$$\varrho_A(L_n, f) < 5\varepsilon,$$

т. е. $L_n(f, x) \xrightarrow{A} f(x)$ и теорема доказана.

Определение. Функция $f(x)$ называется A-непрерывной, $f(x) \in F_A$, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют две непрерывные на компакте F функции $u(x)$ и $v(x)$, $u(x)$, $v(x) \in F_C$, такие, что $u(x) \leqq f(x) \leqq v(x)$ и $\varrho_A(u, v) < \varepsilon$.

Теорема 2. Если $f(t) \in F_A$ и выполнено (1), то

$$L_n(f, x) \xrightarrow{A} f(x).$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, $u(x), v(x) \in F_C$, $u(x) \leqq f(x) \leqq v(x)$, $\varrho_A(u, v) < \varepsilon$. Тогда $L_n(u, x) \leqq L_n(f, x) \leqq L_n(v, x)$. Пользуясь всеми неравенствами и свойствами A-метрики, как и в случае теоремы 1, получим

$$\varrho_A[L_n(f, x), f] \leqq 2\varrho_A[L_n(u, x), u] + \varrho_A[L_n(v, x), v] + 2\varrho_A(u, v).$$

Первое и второе слагаемые правой части последнего неравенства стремятся к нулю, так как $u(x)$, $v(x) \in F_C$. Последнее слагаемое меньше 2ε. Тем самым

$$\varrho_A[L_n(f, x), f] \to 0, \ L_n(f, x) \xrightarrow{A} f(x)$$

и теорема доказана.

Если компакт F содержит изолированную точку x_0, то все функции A-пространства могут быть A-непрерывными. В самом деле, при $\varrho_A(f, g) = |f(x_0) - g(x_0)|$ выполнены все аксиомы и все функции A-непрерывны.

Если же компакт F не содержит изолированных точек, то $\exists \varphi(x) \overline{\in} F_A$. Действительно, пусть $F = H \bigcup R$, множества H и R всюду плотны на F, $H \bigcap R = \Theta$. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — ограниченные на компакте функции, $-M \leqq f(x)$, $g(x) \leqq M$; $\varrho_A(f, g) > 0$. Положим

$$\varphi(x) = \begin{cases} +M, & x \in H, \\ -M, & x \in R. \end{cases}$$

Если $u(x)$, $v(x) \in F_C$, $u(x) \leqq \varphi(x) \leqq v(x)$, то $u(x) \leqq f(x)$, $g(x) \leqq v(x)$ и $\varrho_A(u, v) \geqq \varrho(f, g) > 0$, т. е. функция $\varphi(x) \overline{\in} F_A$ и наше утверждение доказано.

Пусть теперь $F = \bigcap_{i=1}^{n} H_i$, $H_i \bigcap H_k = \Theta$; $i \neq k$. Обозначим через d_i диаметр множества H_i и $\delta = \max d_i$.

Определение. Будем говорить, что функция $f(t) \in F_B$, если $\lim_{\delta \to 0} \varrho_A(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}) = 0$, где $\widetilde{\varphi} = \sum m_i f_{H_i}(x)$, $\widetilde{\psi} = \sum M_i f_{H_i}(x)$, $m_i = \inf_{H_i} f(x)$, $M_i = \sup_{H_i} f(x)$,

$$f_{H_i}(x) = \begin{cases} 1, & x \in H_i, \\ 0, & x \overline{\in} H_i. \end{cases}$$

Теорема 3. Если $f_i(t) \overline{\in} F_B$, то существует последовательность монотонных операторов, для которой справедливо (1) и такая, что последовательность $L_n(f_i, x)$ расходится в A-метрике.

Доказательство. Поскольку $f_1(t) \overline{\in} F_B$, то существует $q>0$ такое, что для всякого $\delta>0$ найдется разбиение компакта $F, F=\bigcup_{i=1}^{m} H_i$, $d^i=d(H_i)<\delta$, для которого $\varrho_A(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi})>q>0$, где

$$\widetilde{\varphi}=\sum_{i=1}^{m}(m_i f_{H_i}(x), \ \widetilde{\psi}=\sum_{i=1}^{m} M_i f_{H_i}(x), m_i=\inf_{H_i} f_1(x), \ M_i=\sup_{H_i} f_1(x).$$

На множестве H_i найдем точку x_i, в которой

$$f_1(x_i)>M_i-\delta. \tag{7}$$

Положим $L_\delta(f, x)=\sum f(x_i) f_{H_i}(x)$. Оператор $L_\delta(f, x)$ монотонный. Более того, он линейный и положительный. Положив $\delta=1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots$, получим последовательность линейных и положительных операторов $L_n(f, x)$. Покажем, что для нее справедливо соотношение (1). Действительно, если $x \in H_i$, то

$$L_n\{C+D\psi[r(t, x)], x\}=C+D\psi[r(x_i, x)] \leq C+D\psi\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{C} C$$

и тем более справедливо (1). Далее, в силу неравенства (7) при $\delta=1/n$

$$L_n(f, x)=\sum f_1(x_i) f_{H_i}(x)>\sum\left(M_i-\frac{1}{n}\right) f_{H_i}(x)=\widetilde{\psi}(x)-\frac{1}{n}; \tag{8}$$

$$L_n(f_1, x) \leq \widetilde{\psi}(x).$$

Аналогично строится последовательность операторов $L_n'(f, x)$, для которой справедливо (1) и

$$L_n'(f_1, x) \leq \widetilde{\varphi}(x)+\frac{1}{n}, \quad L_n'(f, x) \geq \widetilde{\varphi}(x). \tag{9}$$

Остается заметить, что соотношение (1) выполнено и для последователь ности

$$L_1(f, x), \ L_1'(f, x), \ L_2(f, x), \ L_2'(f, x), \ldots \tag{9a}$$

Однако, в силу неравенств (8) и (9), а также свойства 3) метрики

$$\varrho_A[L_n(f_1 x), \ L_n'(f, x)] \geq \varrho_A\left(\widetilde{\varphi}+\frac{1}{n}, \widetilde{\psi}-\frac{1}{n}\right)$$

$$\geq \varrho_A(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi})-\varrho_A\left(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\varphi}+\frac{1}{n}\right)-\varrho_A\left(\widetilde{\psi}-\frac{1}{n}, \widetilde{\psi}\right)>q-\frac{2}{n} \rightarrow q>0.$$

Отсюда следует расходимость последовательности (9а) на функции $f_1(t)$ и теорема доказана.

Из теорем 2 и 3 следует, что $F_A \subset F_B$. Впрочем, это же соотношение легко проверяется и из опеределений классов F_A и F_B. В следующей теореме доказывается равенство этих классов.

Теорема 4. Справедливо равенство

$$F_A = F_B.$$

Доказательство. Если $f(t) \in F_B$, то для $\varepsilon > 0$ $\exists \delta_0 > 0$ такое, что $\varrho_A(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}) < \varepsilon$, $d(H_i) < \delta_0$.

Проведем теперь специальное разбиение компакта F на множества H_i. Пусть

$$M_i > \sup_F f(t)$$

и x_1 — точка, в любой окрестности $(\delta)x_1 = \{t \in F, r(t, x_1) \leqq \delta\}$ которой

$$M_1 = \sup_{\substack{(\delta)x_1 \\ \forall \delta > 0}} f(t) = \sup_F f(t).$$

Положим $H_1 = (\delta)x_1$, $0 < \delta \leqq \frac{\delta_0}{3}$, $d(H_1) \leqq \frac{2}{3}\delta_0 < \delta_0$. Пусть $E_2 = F \setminus H, M_2 = \sup_{E_2} f(t)$ и точка $x_2 \in \overline{E}_2$,

$$M_2 = \sup_{\substack{(r)x_2 \cap E_2 \\ \forall r > 0}} f(t).$$

Положим $H_2 = (\delta)x_2 \setminus (\delta)x_1 = (\delta)x_2 \cap E_2$, $E_3 = E_2 \setminus H_2$. Как и прежде, найдем точку $x_3 \in \overline{E}_3$,

$$M_3 = \sup_{E_3} f(t) = \sup_{\substack{(r)x_3 \cap E_3 \\ \forall r > 0}} f(t).$$

Полагаем $H_3 = (\delta)x_3 \cap E_3$.

Продолжая этот процесс, мы разобьем компакт F на конечное число множеств H_k, границы которых состоят из конечного числа сфер, пересеченных с компактом. Заметим, что центры некоторых сфер могут лежать на границе предшествующих. Если, например, центр x_2 лежит на границе окрестности $(\delta)x_1$, $r(x_1, x_2) = \delta$, то точка x_2 предельная для последовательности точек $y_n, y_n \in E_3$, $f(y_n) > M_3 - 1/n$. В силу этого, при достаточно малом $\lambda > 0$

$$M_2 \geqq \sup_{H_2 \setminus (\lambda + \delta)x_1} f(t) > \sup_{H_2} f(t) - \varepsilon = M_2 - \varepsilon.$$

Положим $H_{1,\lambda} = (\delta + \lambda)x_1, H_{2,\lambda} = (\delta + \lambda)x_2 \setminus H_{1,\lambda}, H_{3,\lambda} = (\delta + \lambda)x_3 \setminus \bigcup_{k=1}^{2} H_{k,\lambda} \ldots$ Выберем λ, $0 < \lambda \leqq \lambda_0/6$, так, чтобы

$$M_k = \sup_{H_{k,\lambda}} f(t) > M_k - \varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{10}$$

$$F = \bigcup_{k=1}^{n} H_{k,\lambda} = \bigcup_{k=1}^{n} H_k.$$

Приступаем теперь к конструкции непрерывной функции $v(x)$,

$$f(x) \leq v(x) \leq \sum_{k=1}^{n} M_k f_{H_{k,\lambda}}(x). \tag{11}$$

На множестве $\overline{H}_{n,\lambda}$ положим $v(x) = M_n$. На этом множестве функция непрерывна и выполнены неравенства (11). Далее, если множество $\overline{H}_{n-1,\lambda}$ не имеет общих точек с множеством $\overline{H}_{n,\lambda}$, или $M_n=M_{n-1}$, то полагаем на этом множестве $v(x)=M_{n-1}$. Теперь функция $v(x)$ непрерывна на множестве $\bigcup\limits_{k=n-1}^{n}\overline{H}_{k,\lambda}$ и выполнены неравенства (11). Если же множества $\overline{H}_{n,\lambda}$ и $\overline{H}_{n-1,\lambda}$ имеют общие точки и $M_n<M_{n-1}$, то полагаем $v(x)=M_{n-1}$ на

$$\overline{H_{n-1,\lambda}\setminus(H_{n-1,\lambda}\cap H_n)}.$$

Построенная функция $v(x)$ непрерывна на множестве

$$\overline{H}_{n,\lambda}\cup\overline{(H_{n-1,\lambda}\setminus(H_{n-1,\lambda}\cap H_n)}.$$

Продолжаем ее непрерывно на множество $\overline{H}_{n,\lambda}\cup\overline{H}_{n-1,\lambda}$ так, чтобы в точках $H_{n-1,\lambda}\cap H_n$ ее значения были промежуточными между M_n и M_{n-1}. Неравенства (11) будут справедливы.

Если множество $\overline{H}_{n-2,\lambda}$ не имеет общих точек с $\overline{H}_{n,\lambda}\cup\overline{H}_{n-1,\lambda}$, то полагаем на нем $v(x)=M_{n-2}$. Теперь уже на множестве $\bigcup\limits_{k=n-2}^{n}H_{k,\lambda}$ функция $v(x)$ непрерывна и выполнено (11). Если же множество $\overline{H}_{n-2,\lambda}$ имеет общие точки, например, с каждым из множеств $\overline{H}_{n-1,\lambda}$ и $\overline{H}_{n,\lambda}$, то полагаем $v(x)=M_{n-2}$ на

$$\overline{H}_{n-2,\lambda}\setminus\left\{H_{n-2,\lambda}\cap\left(\bigcup_{k=n-1}^{n}H_k\right)\right\}.$$

Построенная функция $v(x)$ непрерывна на множестве

$$\overline{H}_{n,\lambda}\cup\overline{H}_{n-1,\lambda}\cup\left[H_{n-2,\lambda}\setminus\left\{H_{n-2,\lambda}\cup\left(\bigcup_{k=n-1}^{n}H_k\right)\right\}\right].$$

Продолжаем ее непрерывно на множество $\bigcup\limits_{k=n-2}^{n}\overline{H}_{k,\lambda}$ так, чтобы значения ее удовлетворяли на этом множестве неравенствам (11). Продолжив этот процесс, мы построим функцию $v(x)\in F_C$ и удовлетворяющую неравенствам (11).

В силу (10)

$$\sum M_k f_{H_{k,\lambda}}(x)<\sum(M_{k,\lambda}+\varepsilon)f_{H_{k,\lambda}}(x)=\widetilde{\psi}(x)+\varepsilon,$$

так что $f(x)\leqq v(x)<\widetilde{\psi}(x)+\varepsilon$. Заметим, что $d(H_{k,\lambda})\leqq 2(\delta+\lambda)<\delta_0$. Следовательно, $\varrho_A(f,\widetilde{\psi})<\varepsilon$. Из последнего неравенства и свойств A-метрики следует

$$\varrho_A(f,v)\leqq\varrho_A(f,\widetilde{\psi}+\varepsilon)\leqq\varrho_A(f,\widetilde{\psi})+\varrho_A(\widetilde{\psi},\widetilde{\psi}+\varepsilon)<2\varepsilon.$$

Аналогично строится функция $u(x)\in F_C$, $u(x)\leqq f(x)$, $\varrho(u,f)<2\varepsilon$. Тем самым, $\varrho_A(u,v)<4\varepsilon$ и в силу произвольности $\varepsilon>0$, $f(t)\in F_A$ и теорема доказана. Следующая теорема вытекает из теорем 2, 3 и 4.

Основная теорема. Для того, чтобы любая последовательность монотонных или линейных положительных операторов, для которой выполнено соотношение (1), сходилась в A-метрике к функции $x(f)$, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ была A-непрерывной, $f(x)\in F_A$.

Сделаем некоторые выводы по отношению к конкретным метрикам. В случае C-метрики подобная теорема была впервые получена нами в работе [1] для дследовательностей линейных и положительных операторов. Множество последовательностей монотонных операторов шире множества последовательностей линейных и положительных операторов. Так что рассматриваемая теорема по отношению к C-метрике обобщает наши прежние результаты.

Обратимся теперь к L-метрике на компакте F пространства n измерений. Это пространство, в отличие от C-пространства, определено не на всех ограниченных функциях, а только на измеримых. Для устранения этого недостатка мы будем определять расстояние между двумя функциями с помощью верхнего интеграла,

$$\varrho_L(f,g)=\overline{\int_F}|f(x)-g(x)|\,dx,$$

определение которого дано в [2]. Класс E_L (L — непрерывные функции) совпадает с классом функции, интегрируемых по Риману.

Теорема 5. Для того, чтобы любая последовательность монотонных или линейных и положительных операторов $L_n(f, x)$, для которой

$$L_n[C+Dr^2(t, x)]\xrightarrow{L}C$$

сходилась бы на функции $f(t)$, $L_n(f, x)\xrightarrow{L}f(x)$, несбходимо и достаточно, чтибы функция $f(x)$ была интегрируема в смысле Римана.

Эта теорема не вытекает из работы Дзядыка [3], в которой исследуются условия на последовательность операторов, обеспечивающие сходимость последовательности операторов на всем классе суммируемых функций. К этому вопросу мы еще вернемся в этой статье.

Обратимся теперь к метрике Хаусдорфа, теория приближений функций полиномами в которой исследована в многочисленных работах Бл. Сендова. Мы остановимся только на тех из них, в которых рассматривается приближение функций в H-метрике (метрике Хаусдорфа) линейными и положительными операторами [4]. Подход к решению этой проблемы существенно связан у Бл. Сендова с одномерным компактом. Понятие модуля немонотонности не переносится уже на плоскость. Класс локально монотонных функций, по отношению к которым решается вопрос о сходимости последовательности операторов в H-метрике, составляет весьма малую часть класса F_H, на котором сходимость обеспечивается. Сформулируем точную теорему и по отношению к H-метрике.

Теорема 6. Для того, чтобы любая последовательность монотонных или линейных и положительных операторов $L_n(f, x)$, для которой

$$L_n[C+Dr^2(t, x);\, x]\xrightarrow{H}C$$

сходилась бы на функции $f(t)$, $L_n(f, x),\xrightarrow{H}f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ была H-непрерывной.

Отметим, что среди H-непрерывных функций есть неизмеримые в смысле Лебега [5].

Вернемся вновь к исследованию сходимости последовательности операторов в A-метрике.

Определение. Будем говорить, что функция $f(x)$ почти A-непрерывна, если для любого $\varepsilon>0$ существует непрерывная функция $\varphi(x)$ такая, что $\varrho_A(\varphi, f)<\varepsilon$.

Обозначим через F_A множество всех почти A-непрерывных функций. Ясно, что $F_A \subset F_{\overline{A}}$. Отметим, что в $\overline{L}$-метрике почти непрерывными будут все суммируемые функции, в H-метрике все ограниченные функции почти H-непрерывны.

Если последовательность операторов $L_n(f, x)$ такова, что значение оператора — непрерывная функция, то не может быть сходимости такой последовательности к A-разрывной функции $f(x)$, $f(x) \in F_{\overline{A}}$. В силу этого, мы будем изучать условия, при которых данная последовательность операторов сходится на той или иной функции $f(x) \in F_A$.

Определение. Нормой оператора $L_n(f, x)$ на функции $f(x) \in F_{\overline{A}} \setminus F_A$ называется число

$$\| L_n(f) \| = \sup_{\varphi(x) \in F_C} \frac{\varrho_A[L_n(f, x), L_n(\varphi, x)]}{\varrho_A(f, \varphi)}.$$

Нормой оператора на множестве $E \subset F_{\overline{A}} \setminus F_A$ называется число

$$\| L_{n,E} \| = \sup_{f(x) \in E} \| L_n(f) \|.$$

Теорема 7. Если для последовательности монотонных операторов $L_r(f, x)$ выполнено соотношение (1) и

$$\| L_{n,E} \| < M < \infty, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

то

$$L_n(f, x) \xrightarrow{A} f(x); \quad \forall f(x) \in E.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$ и $f(x) \in E$. Возьмем функцию $\varphi(x) \in F_C$, $\varrho_A(f, \varphi)<\varepsilon$. Тогда

$$\varrho_A[L_n(f, x), f] \leq \varrho_A[L_n(f, x), L_n(\varphi, x)]$$
$$+\varrho_A[L_n(\varphi, x), \varphi]+\varrho_A(\varphi, f)<M\varepsilon+\varepsilon+\varrho_A[L_n(\varphi, x), \varphi].$$

Последнее слагаемое стремится к нулю в силу теоремы 1. Следовательно,

$$\varrho_A[L_n(f, x), f]<(M+2)\,\varepsilon, \quad n>N.$$

Отсюда следует теорема.

Частный случай такой теоремы в случае L-метрики и линейных положительных операторов был получен в цитированной работе Дзядыка. Правда, в этой работе, в связи с тем, что автор не пользовался верхним интегралом, делалось еще предположение о суммируемости функции $L_n(f, x)$, если суммируема функция $f(x)$. Подобное ограничение становится излишним в метрике L.

В заключение отметим без доказательства две теоремы, относящиеся к метрике Хаусдорфа. Предварительно оговорим некоторые обстоятельства. Если $f(x)$ — ограниченная и измеримая периодическая функция, то $\tilde{f}(x)$ — функция, совпадающая с функцией $f(x)$ в точке Лебега последней

Если же $f(x)$ — ограниченная неизмеримая функция, то под точкой Лебега мы понимаем точку x, в которой

$$\left(\overline{\int_a^x f(t)\,dt}\right)'_x = -\left(\overline{\int_a^x [-f(t)]\,dt}\right)'_x = f(x).$$

Функция $\tilde{f}(x)$ имеет и в этом случае тот же смысл.

Теорема 8. Для того, чтобы последовательность линейных и положительных операторов

$$L_n(f, x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\,u_n(t)\,dt,$$

где $u_n(t)$ — положительные ядра, удовлетворяющие условиям теоремы Фаддеева о сингулярных интегралах, сходились в H-метрике к функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы совпадали дополненные графики функций $f(x)$ и $\tilde{f}(x)$.

Теорема 9. Для того, чтобы последовательность монотонных операторов

$$L_n(f, x) = \frac{1}{\pi}\overline{\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,u_n(t)\,dt}$$

сходилась в H-метрике к $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы совпадали дополненные графики функций $f(x)$ и $\tilde{f}(x)$.

Отметим, что класс функций, на котором верна теорема 9, существенно шире класса функций, на котором верна теорема 8.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. П. Коровкин. О сходимости линейных положительных операторов в пространстве непрерывных функций. *Доклады АН СССР*, **90** (1952).
2. П. П. Коровкин. К теории интеграла. *Ученые записки Казанского гос. пед. инст.*, **56**.
3. В. К. Дзядык. О приближении функций линейными положительными операторами и сингулярными интегралами. *Матем. сборник*, **70** (1966).
4. Бл. Сендов. Аппроксимация в метрике Хаусдорфа. Докторская диссертация, 1967.
5. П. П. Коровкин. Опыт аксиоматического построения некоторых вопросов теории приближений функций одного переменного. *Ученые записки Казанского гос. пед. инст.*, **69** (1969).

7-ая Песчанная 3, кв. 56
Москва А-252 СССР

Поступило 6 июля 1970