Труды Международной Конференции
по конструктивной теории функц ий
Варна, 19—25 мая, 1970

Proceedings of the International
Conference on Constructive Function
Theory, Varna, May 19—25, 1970

ВЕКТОРНЫЕ ГОЛОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ И ОБЛАСТИ РУНГЕ

Р. Лазов

Резюме. Обобщаются некоторые теоремы векторных голоморфных функций типа $f:\mathbb{C}\to E$, где E — векторное локально выпуклое топологическое пространство. Некоторые из резултатов справедливы также в случае, когда E является произвольным векторным локально выпуклым пространством. Для голоморфных векторных функций можно доказать теоремы, аналогичные классическим теоремам комплексного анализа. С помощью развитого аппарата получаются интегральные представления и доказывается существование областей Рунге в комплексной плоскости и в $\mathbb{C}^n$.

Голоморфные векторные функции. Будем рассматривать функции типа $x:\mathbb{C}\to E$ или $x:\mathbb{C}^n\to E$, где $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^n$ соответственно комплексная плоскость или комплексное евклидовое пространство комплексной размерности n. Большая часть результатов этого пункта известна для случая, когда E — пространство Банаха. Оказалось, что эти результаты можно перенести и на случай, когда E — локально выпуклое, линейное топологическое пространство, которое секвенциально полно.

Определение 1. Пусть $D\subset\mathbb{C}$ область комплексной плоскости. Функция $x:D\to E$ называется слабо голоморфной в D, если для каждого линейного функционала $y^*\in E^*$ числовая функция $y^*(x(z))$ голоморфна в D.

Определение 2. Функция $x(z)$, определенная в области $D\subset\mathbb{C}$ называется сильно голоморфной в D, если существует отображение $x':D\to E$ такое, что для всякой точки $z_0\in D$ выполняется

$$\lim_{h\to0}\frac{x(z_0+h)-x(z_0)}{h}=x'(z_0).$$

Здесь предел понимается в смысле топологии пространства E, определенной совокупностью полунорм $\{p_\alpha\}$.

Теорема 1. [1], [3]. Функция $x(z)$ сильно голоморфна тогда и только тогда, когда она слабо голоморфна.

Для векторных голоморфных функций строится интеграл Коши и, таким образом, оказывается возможным доказать ряд следствий, аналогичных известным теоремам теории функций комплексного переменного.

1) Интегральная теорема Коши: $\int\limits_{\gamma} x(\zeta)=0$ для замкнутой кривой γ.

2) Интегральная формула Коши: Для всякой внутренней точки z_0 области D

$$x(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{x(\zeta)}{\zeta-z_0}\,d\zeta.$$

3) Разложение Тейлора: Для всякой внутренней точки замкнутой области $\bar{D}$ ряд Тейлора функции $x(z)$ в окрестности точки сильно сходится внутри круга с центром в точке z_0, лежащего в области $\bar{D}$.

4) Принцип максимума: Если a — такое число, что в области D выполняется $p(x)\leq a$, где p — непрерывная полунорма, то либо $p(x)=a$ на D, либо $p(x)<a$ на D.

5) Принцип симметрии Римана — Шварца: Пусть D — область в полуплоскости $\{\operatorname{Im} z>0\}$ и K — регулярное подмножество границы D. Пусть функция x аналитическая в области D и непрерывная в $\bar{D}$. Если $x(K)\subset E$ — аналитическая дуга в E, то функцию x можно продолжить аналитически через K в область, содержащую $D\bigcup K$.

6) Теорема Витали — она формулируется аналогично классической теореме.

Как и в случае обычных голоморфных функций, вводятся функции многих комплексных переменных. Для голоморфных функций многих переменных доказываются теоремы, аналогичные известным теоремам для обычных голоморфных функций многих переменных. Из них отметим подготвительную теорему Вейерштрасса и теорему Гартогса.

2. Интегральные представления голоморфных функций многих переменных. Интегральная формула Бохнера — Мартинелли. Если $D\subset\mathbb{C}^n$ — область с гладкой границей,

$$x(z)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\partial D} x(\zeta)\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{|\zeta-z|^{2n}}(\bar{\zeta}_k-\bar{z}_k)d\bar{\zeta}_1\wedge\ldots\wedge\widehat{d\bar{\zeta}_k}\ldots\wedge d\bar{\zeta}_n\wedge d\zeta.$$

Интегральная формула Вейля: Пусть P — полиедр Вейля, определяемый областями D_k с гладкими границами. Любую функцию $x(z)$, голоморфную в P и непрерывную в $\bar{P}$, можно представить в произвольной точке $z\in P$ формулой

$$x(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\sum_{i_1\ldots i_n}\int\limits_{\sigma_{i_1\ldots i_n}}\frac{x(\zeta)}{\Pi(\psi_{i_k}(\zeta)-\psi_{i_k}(z))}\begin{vmatrix}\varphi_1^{i_1} & \ldots & \varphi_n^{i_n}\\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\\ \varphi_1^{i_n} & \ldots & \varphi_n^{i_n}\end{vmatrix}d\zeta,$$

где суммирование производится по всем упорядоченным наборам $1\leq i_1<\cdots<i_n$, $\{\varphi_r^i\}$ — коэффициенты Хефера функций $\{\psi_{i_k}\}$.

3. Области Рунге [5]. Области, на компактных подмножествах которых каждая голоморфная функция аппроксимируется полиномами, будем называть областями Рунге первого рода.

Теорема 1. В комплексной плоскости каждая область со связным дополнением является областью Рунге первого рода.

Теорема 2. Полиномиальный полиедр P является областью Рунге первого рода.

Теорема 3. Семейство функций $H(D)$ плотно в семействе $H(P)$, где $H(D)$ и $H(P)$ семейства функций голоморфных в области D (соотв. P).

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Иосида. Функциональный анализ, Москва, 1967.
2. Дж. Шварц, Н. Данфорд., Линейные операторы. Общая теория. Москва, 1962.
3. Э. Хилде, Р. Филлипс. Функциональный анализ и полугруппы. Москва, 1962.
4. M. Finkelstein, The reflection principle for Banach-space valued analytic functions. *Canad. J. Math.*, **21** (1969), No. 5, 1189–1191.
5. A. Grothendieck, Sur certains espaces de fonctions holomorphes. *J. reine angew. Math.*, **192** (1953), I (35–64), II (77–95).

Математический институт с Вычислительным центром БАН
София Болгария

Поступило 20 июня 1970