Труды Международной Конференции по конструктивной теории функций Варна, 19—25 мая, 1970

Proceedings of the International Conference on Constructive Function Theory, Varna, May 19—25, 1970

ОДНОСТОРОННЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ХАУСДОРФОВА РАССТОЯНИЯ

С. Марков

Резюме. Рассматривается наилучшее одностороннее приближение данной функции $f(x)$ функцией некоторого класса V:

$$E(f,\ V) = \inf\{r(P(x),\ Q(x)),\ P(x)\in V,\ Q(x)\in V,\ P(x)\leqq f(x)\leqq Q(x)\}.$$

r — хаусдорфовое расстояние) и вопросы существования и единственности наилучшего одностороннего приближения. В некоторых частных случаях (приближений алгебраическими многочленами, рациональными функциями и сплайн-функциями) приводятся некоторые оценки для $E(f,\ V.)$

Обозначим через H_n множество всех алгебраических многочленов n-ной степени, через R_n — множество рациональных функций n-ного порядка, через $S_{n,m}$ — множество всех сплайн-функций $(n,\ m)$-ного порядка. Напомним, что $f(x)$ называется сплайн-функцией (n, m)-ного порядка на отрезке $[a, b]$, если существуют $m+1$ точки $a=x_0\leqq x_1\leqq x_2\leqq\ldots\leqq x_m=b$ такие, что в каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1, 2, \ldots, n$, $f(x)$ является алгебраическим многочленом n-ной степени и, кроме того, $f(x)\in C^{n-1}$, т. е. f имеет непрерывные производные до $n-1$-ого порядка.

Пусть f ограниченная функция. Рассмотрим следующие характеристики:

а) наилучшее одностороннее приближение f алгебраическими многочленами n-ной степени относительно хаусдорфова расстояния

$$\overline{\underline{E}}_{n,r}(f) = \inf r(P,\ Q),$$

где inf берется по $P,\ Q\in H_n$ и $P(x)\leqq f(x)\leqq Q(x)$;

б) наилучшее одностороннее приближение f рациональными функциями n-ого порядка относительно хаусдорфова расстояния

$$\overline{\underline{R}}_{n,r}(f) = \inf r(P,\ Q),$$

где inf берется по $P,\ Q\in R_n$ и $P(x)\leqq f(x)\leqq Q(x)$;

в) наилучшее одностороннее приближение f сплайн-функциями (n, m)-ого порядка относительно хаусдорфова расстояния

$$\overline{\underline{E}}^{m}_{n,r}(f) = \inf r(P,\ Q),$$

где inf берется по $P,\ Q\in S_{n,m}$ и $P(x)\leqq f(x)\leqq Q(x)$.

Кроме этих трех характеристик мы будем рассматривать и так называемые верхние и нижние приближения:

а) наилучшее верхнее одностороннее приближение алгебраическими многочленами n-ной степени относительно хаусдорфова расстояния будем называть число

$$\overline{E}_{n,r}(f)=\inf r(f, P),$$

где нижняя грань берется по $P\in H_n$ и $f(x)\leqq P(x)$;

б) наилучшее нижнее одностороннее приближение алгебраическими многочленами n-ной степени относительно хаусдорфова расстояния будем называть число

$$\underline{E}_{n,r}(f)=\inf r(r, P),$$

где inf берется по $P\in H_n$ и $P(x)\leqq f(x)$.

Наилучшие верхние и нижние односторонние приближения рациональными и сплайн-функциями относительно хаусдорфова расстояния определяются аналогично.

Теперь сформулируем некоторые результаты, относящиеся к односторонним приближениям относительно хаусдорфова расстояния.

Прежде всего легко видеть, что для любой ограниченной на сегменте $[0, 1]$ функции $f(x)$ существуют алгебраические многочлены $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ и $T(x)\in H_n$ такие, что

$$r(P, Q)=\underline{\overline{E}}_{n,r}(f),$$

$$r(f, R)=\overline{E}_{n,r}(f),$$

$$r(f, T)=\underline{E}_{n,r}(f).$$

Иными словами, существуют алгебраические многочлены, для которых достигается нижняя грань.

Доказательство этого предложения следует немедленно из соображения компактности. Отметим, что для класса R_n и $S_{n,m}$ нет аналога этого предложения ввиду того, что компактность отсутствует.

Мы не будем рассматривать вопрос единственности наилучшего одностороннего приближения.

Как известно [1], обычное хаусдорфовое приближение алгебраическими многочленами степеней $\leqq n$ стремится к нулю, когда $n\to\infty$. Однако, для односторонних приближений это не так. Легко строится контрпример —например $f=\begin{cases}1, & x=0\\ 0, & x\neq 0\end{cases}$.

Оказывается, что стремление к нулю наилучших верхних приближений связано с полунепрерывности сверху функции f.

Пользуясь односторонними приближениями, можно доказать следующую теорему, которая является обобщением классической теоремы Дини о равномерной сходимости монотонно-неубывающих последовательностей непрерывных функций к непрерывной функции.

Теорема 1. Пусть неубывающая последовательность полунепрерывных снизу функций

$$f_n(x)\leqq f_{n+1}(x)\leqq \dots \leqq f(x)$$

стремится поточечно к ограниченной функции $f(x)$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$, на отрезке $[a, b]$. Тогда хаусдорфовое расстояние $r(f_n, f)$ между f_n и f стремится к нулю.

Доказательство. Отметим, что из условия теоремы сразу следует, что функция $f(x)$ тоже полунепрерывна снизу.

Покажем, что для каждое $\varepsilon>0$ можно найти n_0 так, что если $n>n_0$, для каждое $x_0\in\Delta$ существуют $(x'_n, y'_n)\in\bar{f}$ и $(x''_n, y''_n)\in\bar{f}_n$ такие, что

(1) $$\max[|x'_n-x_0|, |y'_n-f_n(x_0)|]\leqq\varepsilon.$$

(2) $$\max[|x''_n-x_0|, |y''_n-f_n(x_0)|]\leqq\varepsilon,$$

где $\bar{f}$ — дополненный график функции f [1].

Отсюда и из леммы 5 в работе [1] следует, что для $n>n_0$ выполняется $r(f_n, f)\leqq\varepsilon$, что утверждалось в теореме.

Докажем, что существует n_0 такое, что при $n>n_0$ есть точки $(x'_n, y'_n)\in\bar{f}$, для которых выполняется (1).

Предположим противное, т. е. что существуют бесконечно много $\{n_k\}$ и $\{x_{n_k}\}$, $x_{n_k}\in\Delta$ такие, что в квадратике с центром $(x_{n_k}, f_{n_k}(x_{n_k}))$ и стороной ε нет точки дополненного графика f. Переходя к подпоследовательностям, можно считать, что последовательности x_{n_k} и $f_{n_k}(x_{n_k})$ сходятся при $n_k\to\infty$ и $\lim_{n_k\to\infty} x_{n_k}=x_0$, $\lim_{n_k\to\infty} f_{n_k}(x_{n_k})=y_0$. Очевидно, что в квадратике с центром (x_0, y_0) и стороной $\varepsilon/2$ не может быть точки дополненного графика f, т. е.

(3) $$|f(x_0)-y_0|>\frac{\varepsilon}{2}.$$

Допустим сперва, что

(4) $$f(x_0)>y_0+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Но $\lim_{n\to\infty} f_n(x/_0)=f(x_0)$, следовательно, существует n_0 такое, что

(5) $$|f(x_0)-f_{n_0}(x_0)|\leqq\frac{\varepsilon}{4}.$$

Функция $f_{n_0}(x)$ полунепрерывная снизу, следовательно, существует такое $\delta<\varepsilon/2$, что

(6) $$\inf_{|x-x_0|<\delta} f_{n_0}(x)\geqq f_{n_0}(x_0)-\frac{\varepsilon}{4}.$$

Из монотонности последовательности $f_n(x)$ следует, что для $n>n_0$ имеем

(7) $$\inf_{|x-x_0|<\delta} f_n(x)\geqq f_{n_0}(x_0)-\frac{\varepsilon}{4}.$$

Отсюда и из (5) и (6) получаем

(8) $$f(x_0)\geqq f_{n_k}(x_{n_k})\geqq f(x_0)-\frac{\varepsilon}{2},$$

если n_k достаточно большое, чтобы выполнилось $|x_{n_k}-x_0|<\delta$.

Но (8) противоречит (4), так, как

$$\lim_{n_k\to\infty} f_{n_k}(x_{n_k})=y_0.$$

Полученное противоречие доказывает (1) в данном случае.

Теперь пусть

$$f(x_0)<y_0-\frac{\varepsilon}{2}. \tag{9}$$

Выбирая n_k достаточно большим, чтобы

$$|f_{n_k}(x_{n_k})-y_0|<\frac{\varepsilon}{4}, \quad |x_{n_k}-x_0|<\frac{\varepsilon}{4},$$

получаем, что для этих n_k имеем

$$f(x_{n_k})>y_0-\frac{\varepsilon}{4}. \tag{10}$$

Пользуясь леммой 4 из работы [1], получаем, что существует такая точка $(x, y_0)\in \bar{f}$, что

$$|x-x_{n_k}|<\frac{\varepsilon}{4}, \quad |x_0-x|<\frac{\varepsilon}{4}. \tag{11}$$

Из (11) вытекает, что точка (x, y_0) принадлежит квадратику с центром (x_0, y_0) и стороной $\varepsilon/2$. Полученное противоречие доказывает окончательно (1).

Докажем теперь (2). Снова, предполагая противное, получаем, что существует последовательность точек $(x_{n_k}, f(x_{n_k}))$, принадлежащих графику функции f, такие, что в квадратике с центром $(x_{n_k}, f(x_{n_k}))$ и стороной ε нет точки дополненного графика f_{n_k}. Переходя к подпоследовательностей, можем считать, что $\lim\limits_{n_k\to\infty} x_{n_k}=x_0$, $\lim\limits_{n_k\to\infty} f(x_{n_k})=y_0$. В квадратике с центром (x_0, y_0) и стороной $\varepsilon/2$ не может быть точки дополненного графика f_{n_k} при достаточно больших n_k. Пусть n_k такое, что

$$|f(x_{n_k})-y_0|<\frac{\varepsilon}{4}, \quad |x_{n_k}-x_0|<\frac{\varepsilon}{4}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_{n_k})=f(x_{n_k})$, то для достаточно больших n точка $(x_{n_k}, f_n(x_{n_k}))$ войдет внутри квадратика с центром (x_0, y_0) и стороной $\varepsilon/2$, что противоречит допущению.

Следовательно, существуют точки (x''_n, y''_n), обладающие свойством (2).

Этим теорема полностью доказана.

Замечая, что для непрерывных функций хаусдорфовая и равномерная сходимости совпадают, то из только что сформулированной теоремы следует теорема Дини.

Приведем одно следствие. Пусть f полунепрерывная сверху. Тогда имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} \bar{E}_{n,r}(f)=\lim_{n\to\infty} \bar{R}_{n,r}(f)=\lim_{n\to\infty} \bar{E}^m_{n,r}(f)=0.$$

Перейдем к оценки скорости приближений. Сначала заметим, что даже для непрерывных функций $\overline{E}_{n,r}(f)$ может стремиться к нулю сколь угодно медленно. Тем более интересно получить универсальные оценки для приближения сплайн-функциями и рациональными функциями.

Теорема 2. Если f непрерывная функция на отрезке $[a, b]$, то для наилучшего одностороннего приближения ломанными имеем

$$\overline{E}_{1,r}^{m}(f) \leq \frac{6(b-a)}{m}. \tag{12}$$

Доказательство. По определению

$$\overline{E}_{1,r}^{m}(f) = \inf r(P, Q),$$

где inf берется по $P, Q \in S_{1,m}$ и $P(x) \leq f(x) \leq Q(x)$.

Пусть k наименьшее целое число такое, что $6k \geq m$. Разобем отрезок $[a, b]$ на k равных частей точками $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k = b$. Обозначим $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$ и

$$M_i = \max_{x \in \Delta_i} f(x) = f(\xi_i),$$

$$m_i = \min_{x \in \Delta_i} f(x) = f(\eta_i).$$

Выбираем сначала $\varepsilon > 0$ так, что в каждом отрезке $[x_i - 2\varepsilon, x_i + 2\varepsilon]$ функция f не достигает ни одного из чисел M_i, M_{i+1}, m_i и m_{i+1}, конечно, если $f(x_i)$ различно от этих чисел.

Сплайн-функцию $Q(x)$, приближающую $f(x)$ сверху, определим в отрезке Δ_i ломанной $A_iB_iC_iD_iE_iF_iG_i$, где

а) если $x_{i-1} < \eta_i < x_i$, берем точки

$$A_i = (x_{i-1}, f(x_{i-1}) + \varepsilon), \quad B_i = (x_{i-1} + \varepsilon, M_i), \quad C_i = (\eta_i - \varepsilon, M_i),$$

$$D_i = (\eta_i, m_i + \varepsilon), \quad E_i = (\eta_i + \varepsilon, M_i), \quad F_i = (x_i - \varepsilon, M_i),$$

$$G_i = (x_i, f(x_i) + \varepsilon);$$

б) если $\eta_i = x_{i-1}$ или $\eta_i = x_i$, берем

$$A_i = (x_{i-1}, f(x_{i-1}) - \varepsilon), \quad B_i = (x_{i-1} + \varepsilon, M_i),$$

$$C_i = (x_i - \varepsilon, M_i), \quad D_i = E_i = F_i = G_i = (x_i, f(x_i) + \varepsilon).$$

Сплайн-функцию $P(x)$, приближающую $f(x)$ снизу, определим в отрезке Δ_i ломанной $H_iI_iJ_iK_iL_iM_iN_i$, где

а) если $x_{i-1} < \xi_i < x_i$, берем точки

$$H_i = (x_{i-1}, f(x_{i-1}) - \varepsilon), \quad I_i = (x_{i-1} + \varepsilon, m_i), \quad J_i = (\xi_i - \varepsilon, m_i),$$

$$K_i = (\xi_i, M_i - \varepsilon), \quad L_i = (\xi_i + \varepsilon, m_i), \quad M_i = (x_i - \varepsilon, m_i),$$

$$N_i = (x_i, f(x_i) - \varepsilon);$$

б) если $\xi_i = x_{i-1}$ или $\xi_i = x_i$, берем

$$H_i = (x_{i-1}, f(x_{i-1}) - \varepsilon), \quad I_i = (x_{i-1} + \varepsilon, m_i),$$

$$J_i = (x_i - \varepsilon, m_i), \quad K_i = L_i = M_i = N_i = (x_i, f(x_i) - \varepsilon).$$

В каждом отрезке Δ_i сплайн-функции P и Q имеют не больше 6 звеньев, что означает, что они $(1, m)$-ного порядка. Из построения и из непрерывности функции $f(x)$ видно, что можно взять $\varepsilon > 0$ достаточно малое, так что всюду в $[a, b]$ выполняется

$$P(x) \leq f(x) \leq Q(x).$$

Кроме того, для хаусдорфова расстояния между P и Q очевидно

$$r(P, Q) \leq \frac{b-a}{k} + \varepsilon \leq \frac{6}{m}(b-a) + \varepsilon.$$

Это, ввиду произвольности $\varepsilon > 0$, доказывает теорему.

Покажем теперь, что оценка (12) не улучшаема по порядке. Точнее, покажем, что существует функция $f(x)$ такая, что

$$E^m_{1,r}(f) \geq \frac{b-a}{m+1}.$$

Допустим, что для каждой функции $f(x)$

$$E^m_{1,r}(f) < \frac{b-a}{m+1}.$$

Это означает, что существует ломанная $P \in S_{1,m}$ такая, что в отрезке $[a, b]$ имеет место $P(x) \geq f(x)$ и $r(f, P) < \frac{b-a}{m+1}$.

Обозначим $h = \frac{b-a}{m+1}$. Пусть $f(x)$ ломанная

$$(a, 0)(a+h, 1)(a+2h, 0)(a+3h, 1)\ldots,$$

которая в $[a, b]$ имеет $m+1$ звеньев.

По предположению P должно быть выбрано таким образом, что $r(f, P) < \frac{b-a}{m+1}$. Это означает, что если концы отрезка $[a+ih, a+(i+2)h]$, $i = 0, 2, 4, \ldots$, будут выбраны центрами квадратиков со сторонами $\frac{b-a}{m+1}$, то в каждом квадратике должна попадать точка графика P. Следовательно, звенья у P не могут быть меньше, чем у f, т. е. $m+1$. Это означает, что $P \overline{\in} S_{1,m}$, что противоречит сделанному предположению. Таким образом, можно доказать, что и

$$\sup \underline{E}^m_{1,r}(f) \geq \frac{b-a}{m+1}$$

и, следовательно, еще более

$$\sup \underline{E}^m_{1,r}(f) \geq \frac{b-a}{m+1}.$$

Для $\underline{E}^m_{n,r}(f)$ у нас нет универсальной оценки для произвольного n. Для $\underline{R}_{n,r}(f)$ можно доказать оценку

$$(13) \qquad \overline{\underline{R}}_{n,r}(f) \leqq C \frac{\ln n}{n}.$$

Чтобы дать идею доказательства оценки (13), приведем следующую лемму.

Лемма. Дополненный график функции

$$\delta(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0, \end{cases}$$

можно приближить рациональными функциями порядка 2 сколь угодно быстро, т. е. $\overline{R}_{2,r}(\delta) = 0$.

На самом деле для приближающей функции достаточно взять $T_2(x) = \varepsilon/(\varepsilon + x^2)$, где $\varepsilon > 0$ достаточно малое.

Доказательство оценки (13) делается легко, используя эту лемму и результат Бл. Сендова, что скачкообразную функцию можно приблизить алгебраическими многочленами порядка n с ошибки $O(\ln n/n)$, что, очевидно, имеет место и для односторонних приближений. Функции P и Q из доказательства теоремы 2 можно рассматривать как полученные из скачкообразных функций, к которым добавлены острые складки в точках η_i и ξ_i. Сперва приближаем скачкообразные функции алгебраическими многочленами порядка n с ошибкой $O(\ln n/n)$ сверху (снизу), а потом прибавляем m функции типа T_2, что не нарушает порядка приближения, имея в виду лемму.

Проблема неулучшаемости оценки (13) пока не решена.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бл. Сендов. Некоторые вопросы теории приближений функций и множеств в хаусдорфовой метрике. *Успехи матем. наук*, **24**, 5 (1969), 141—178.

Математический факультет
Софийского университета
София Болгария

Поступило 15 июня 1970