Труды Международной Конференции по конструктивной теории функций Варна, 19—25 мая, 1970

Proceedings of the International Conference on Constructive Function Theory, Varna, May 19—25, 1970

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ В МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Д. Митов

Резюме. В работе приведены некоторые достаточные условия для сходимости итерации $x_{i+1}=Ax_i$ (A — оператор) в метрическом пространстве.

Рассмотрим итерацию $x_{i+1}=\psi(x_i)$. Классическое условие $|\psi'(x)|\leqq\theta<1$ [1] в некотором интервале J гарантирует сходимость итерации при некоторых естественных ограничениях на выборе начальной точки итерации x_0. Однако, итерация может сходиться, даже если неравенство выполнено не на всем J.

Теорема. Пусть E — метрическое пространство и на $N\subset E$ задан оператор $A:N\to E$ с неподвижной точкой $a\in N$. Если существует оператор H, взаимно-однозначно отображающий N в некотором метрическом пространстве $\widetilde{E}$ и такой, что H^{-1} — непрерывный и для каждого $x, y\in N$ выполняется неравенство

$$\text{(1)}\qquad \widetilde{\varrho}(HAx, HAy)\leqq\theta\,\widetilde{\varrho}(Hx, Hy),\quad 0\leqq\theta<1$$

($\widetilde{\varrho}$ — метрика в $\widetilde{E}$), то последовательность $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ итерации $x_{i+1}=Ax_i$ содержится в N и $x_i\xrightarrow[i\to\infty]{}a$, при любом выборе $x_0\in M\subset N$, $M\ni a$, лишь только

$$\operatorname{diam}(HM)\leqq\inf_{x\in N}\widetilde{\varrho}(HM, Hx).$$

В ходе доказательства получается оценка

$$\widetilde{\varrho}(Ha, Hx_n)\leqq\theta^n\widetilde{\varrho}(Ha, Hx_0).$$

Если в качестве E берется действительная прямая, условия теоремы можно несколько ослабить. Формулируем условия, предполагая дифференцируемость (это несущественно, так как можно пользоваться неравенствами типа (1)).

Теорема. Пусть $\psi(x)$ — дифференцируемая в интервале $J^*\subset R$ и $\psi(x)\in J^*$ при $x\in J\subset J^*$ (J содержит неподвижную точку $a=\psi(a)$). Если существует строго монотонная и дифференцируемая в $J^*\cup\psi(J^*)$ функция $F(x)$, такая, что для каждого $x\in J^*$

$$(2) \qquad \left|\frac{d}{dx}F(\psi(x))\right| \leq \theta \left|\frac{d}{dx}F(x)\right|, \quad 0 \leq \theta < 1,$$

то последовательность $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ итерации $x_{i+1}=\psi(x_i)$ содержится в J^* и $x_i \xrightarrow[i\to\infty]{} a$, при любом выборе x_0 из J.

Можно дать примеры, где классический критерий $|\psi'(x)| \leq \theta$ неприменим, а эта теорема применяется с успехом.

Из теоремы можно вывести конкретные достаточные условия сходимости итераций. Например:

1. Пусть $J^* \subset R^+$, $\psi(x)>0$, $F(x)=\ln x$. Условие (2) есть

$$|\psi'(x)| \leq \theta \frac{\psi(x)}{x}.$$

2. Пусть $J^* \subset R^+$, $\psi(x)>0$, $F(x)=x^a/(a+1)$. Условие (2) есть

$$|\psi'(x)| \leq \theta \left(\frac{x}{\psi(x)}\right)^a$$

для некоторого действительного числа a.

3. Пусть $J^* \subset R$, $F(x)=\exp x$. Условие (2) есть

$$|\psi'(x)| \leq \theta e^{x-\psi(x)}.$$

Если в первой теореме $N=E$ и E — полное метрическое пространство, то, поскольку неравенство (1) влечет в этом случае

$$\tilde{\varrho}(HAH^{-1}u, HAH^{-1}v) \leq \theta\tilde{\varrho}(u, v)$$

для каждого u, v из $\tilde{E}$ и, значит, оператор HAH^{-1} — сжатие в $\tilde{E}$, A является сжатием в E.

Вышеприведенные теоремы не теряют силу и в полуметрических пространствах, конечно, с перередактированием неподвижности и единственности на языке только расстояний.

Пусть теперь E — полное метрическое пространство. Если для гомеоморфизма $H: E \to E$ существует оператор $A: E \to E$, так что HAH^{-1} — сжатие, будем говорить, что H сжимает A. Обозначим совокупность всех таких H через $\mathscr{H}$. Очевидно, $\mathscr{H}$ совпадает с совокупностью всех гомеоморфизмов в E. В самом деле, пусть H — гомеоморфизм. Возмем сжимающий оператор B. Тогда H сжимает оператор $A=H^{-1}BH$.

Если A — оператор, то множество всех гомеоморфизмов H, которые сжимают данный оператор A, обозначим через $\mathscr{H}_A$. Будем говорить, что A сжимает слабее B (обозначение $A \lessdot B$), если $\mathscr{H}_A \subset \mathscr{H}_B$. Таким образом, в множестве $\boldsymbol{A}$ всех A введено отношение псевдоупорядоченности. В самом деле, рефлексивность и транзитивность очевидны. Однако, из $\mathscr{H}_A = \mathscr{H}_B$ не видно как следует $A=B$ (для $\mathscr{H}_A = \mathscr{H}_B = \emptyset$ это заведомо неверно), что и мешает этому отношению быть полуупорядоченностью.

Конечно, можно ввести отношение эквивалентности и провести факторизацию A, но это врядь ли выход из положения. Так что, надо подробнее исследовать свойства $\mathscr{H}_A$, хотя бы в некоторых специальных случаях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Эдвардс. Функциональный анализ. Москва, 1969.

Математический институт
с Вычислительным центром БАН
София Болгария

Поступило 28 мая 1970