Труды Международной Конференции по конструктивной теории функций Варна, 19—25 мая, 1970

Proceedings of the International Conference on Constructive Function Theory, Varna, May 19—25, 1970

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

С. М. Никольский

Резюме. Пусть Ω ограниченная область n-мерного пространства R_n с гладкой границей Γ и $C_{r,\alpha}=C_{r,\alpha}(\Omega)$ класс определенных на Ω функций f, имеющих непрерывные частные производные порядка r, удовлетворяющие на Ω условию Липшица степени α $(r=0, 1, 2, \ldots, 0<\alpha<1)$.

В работе рассматривается проблема характеристики таких функций приближениями их алгебраическими многочленами степени n.

$$P_n(x)=\sum_{|k|\leq n} a_k x^k,$$

где $k=(k_1, \ldots, k_n)$, $x=(x_1, \ldots, x_n)$, $|k|=\sum_{j=1}^{n} k_j$, $x^k=x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$.

Упомянутая выше проблема легко решается в терминах продолжений f за пределы $\bar{\Omega}$ и соответствующих приближений продолженной функции $\bar{f}$ многочленами.

Действительно, пусть $\Delta\subset R_n$ есть открытый куб, содержащий в себе $\bar{\Omega}$ $(\bar{\Omega}\subset\Delta)$. Всякую функцию $f\in C_{r,\alpha}(\Omega)$ можно продолжить на Δ (см. [3]) с сохранением класса, т. е. так, что продолженная функция $\bar{f}(x)$ $(\bar{f}(x)=f(x)$, $x\in\Omega)$ будет принадлежать к $C_{r,\alpha}(\Delta)$ $(\bar{f}\in C_{r,\alpha}(\Delta))$ и тогда, сводя вопрос при помощи косинус-подстановки к периодической функции и приближению ее частными тригонометрическими полиномами, на основании классических теорем приближения получим:

Функция f принадлежит к $C_{r,\alpha}(\Omega)$ тогда и только тогда, если существует функция $\bar{f}(x)$, продолжающая f на Δ и последовательность многочленов $P_n(x)$ так, что

$$|\bar{f}(x)-P_n(x)|<\frac{C}{n^{r+\alpha}}, \quad x\in\Delta, n=1, 2, \ldots$$

Однако, эта формулировка имеет тот дефект, что для достижения поставленной цели приходится продолжать функцию за пределы $\bar{\Omega}$ и оперировать приближениями ее многочленами на более обширной области $A\supset\Omega$.

Пусть $\varrho=\varrho(x)$ есть расстояние от точки $x\in\Omega$ до границы Γ области Ω.

В одномерном случае, когда Ω есть некоторый интервал (a, b) и

$$\varrho(x)=\min\{x-a, b-x\},$$

имеет место следующая

Теорема 1. Для класса $C_{r,\alpha}(a, b)$ можно указать последовательность функций $\varkappa_n(\varrho)=\varkappa_n(\varrho(x))$, обладающую следующими свойствами:

а) Для всякой функции $f\in C_{r,\alpha}(a, b)$ найдется последовательность $\{\varrho_n\}$ многочленов

$$P_n(x)=\sum_{s=0}^{n} a_s x^s$$

и зависящая от r, α и $b-a$ константа $c>0$ такая, что

$$|f(x)-P_n(x)|<cM_f\varkappa_n(\varrho(x)),\ n=1, 2, \ldots,\ x\in(a, b), \tag{1}$$

где M_f константа Липшица производной $f^{(r)}$ порядка r.

б) Наоборот, если для какой-либо определенной на (a, b) функции f существует последовательность многочленов $\{\varrho_n\}$, для которых на (a, b) выполняются неравенства

$$|f(x)-P_n(x)|<\varkappa_n(\varrho(x)),\quad x\in(a, b), \tag{2}$$

то функция f принадлежит к $C_{r,\alpha}(a, b)$ и $M_f<c'$, где c' зависит от r, α и $b-a$.

При этом константы c и c' непрерывно зависят от $(b-a)$.

Эта теорема во всей полноте доказана В. К. Дзядыком [2] и А. Ф. Тиманом [6], где функция $\varkappa_n(\varrho)$ определялась по формуле

$$\varkappa_n(\varrho)=\left(\frac{\sqrt{\varrho}}{n}\right)^{\alpha}+\frac{1}{n^{2\alpha}}.$$

По этому поводу см. еще [1], [5].

Возникает вопрос, переносится ли сформулированная теорема на случай нескольких переменных ($n>1$).

Оказывается это, вообще говоря, не так. Например, в случае, когда Ω есть круг, для класса $C_{r,\alpha}(\Omega)$, теорема не верна. Не существует последовательности функций $\varkappa_n(\varrho)$ с указанными в теореме свойствами (см. [4]). С другой стороны, утверждение б) теоремы верно, какова бы ни была ограниченная область $\Omega\subset R_n$ с гладкой границей Γ. Граница может даже быть липшицевой.

Именно можно высказать следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть задана такая последовательность неотрицательных функций $\varkappa_n(\varrho)$, $\varrho>0$, что $\varkappa_n(c\varrho)<c\,.\,\varkappa_n(\varrho)$ и для любого интервала (a, b) верно утверждение б). Тогда, если определенная на n-мерной области Ω с гладкой (или даже липшицевой) границей функция $f(x)=$ $=f(x_1, \ldots, x_n)$ может быть аппроксимирована многочленами $P_n(x)$ с оценкой

$$|f(x)-P_n(x)| < \varkappa_n(\varrho(x)), \quad x \in \Omega,$$

где $\varrho(x)$ расстояние x до границы Γ области Ω, то $f \in C_{r,\alpha}(\Omega)$.

Для доказательства этой теоремы, сформулированной здесь в несколько более общем виде, см. упомянутую уже нашу статью [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Е. Гопенгауз. К вопросу о приближении функций на отрезке в области с углами. Сб. „Теория функций, функциональный анализ и их приложения", вып. 3 (1967), 204—210.
2. В. К. Дзядык. О конструктивной характеристике функций, удовлетворяющих условию Липшица степени α на конечном отрезке вещественной оси. *Известия АН СССР*, **20** (1956), 623—642.
3. С. М. Никольский. О продолжении функций многих переменных с сохранением дифференциальных свойств. *Матем. сборник*, **60** (1956), 243—268.
4. С. М. Никольский. К вопросу о приближении функций многих переменных многочленами. *Сибирский матем. журнал*, **10** (1969), 1075—1083.
5. С. А. Теляковский. Две теоремы о приближении функций алгебраическими многочленами. *Матем. сборник*, **70** (1966), 252—265.
6. А. Ф. Тиман. Усиление теоремы Джексона о наилучшем приближении непрерывных функций многочленами на конечном отрезке вещественной оси. *Доклады АН СССР*, **78** (1951), 17—20.

Математический институт
АН СССР ул. Вавилова 42
Москва В-333 СССР

Поступило 17 июля 1970