Труды Международной Конференции по конструктивной теории функций Варна, 19—25 мая, 1970

Proceedings of the International Conference on Constructive Function Theory, Varna, May 19—25, 1970

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОПЕРАТОРА ОРТОГОНАЛИЗАЦИИ

А. М. Олевский

Резюме. Исследуются некоторые свойства оператора ортогонализации Шмидта S; в частности, показывается существование точек локальной неустойчивости этого оператора и устанавливается устойчивость в окрестности неподвижной точки. Указываются приложения к построению ортогональных базисов в различных пространствах.

1. Как известно, Шаудер построил некоторый специальный класс базисов в пространстве $C_{[0,1]}$. Каждой всюду плотной на $[0,1]$ последовательности точек ω отвечает система Шаудера $\varphi^{\omega}=\{\varphi_k^{\omega}\}$ [1]. Эти базисы существенно неортогональны, однако, если применить к любому из них процесс ортогонализации S, то получим ортонормированный базис в C. Именно на этом пути Франклином был впервые построен пример такого базиса.

Вообще же, как показал недавно Шленк [2], класс базисов в C неинвариантен относительно оператора S. Контрпример получен малым возмущением системы Шаудера. Точнее, в [2] доказано, что для любой последовательности чисел $\varepsilon=\{\varepsilon_k>0\}$ существует система Шаудера φ^{ω} и возмущенный базис $\widetilde{\varphi}$, $\|\widetilde{\varphi}_k-\varphi_k^{\omega}\|<\varepsilon_k$ такой, что система $\psi=S\widetilde{\varphi}$ не является базисом в C. Этот результат характеризует отсутствие равномерной устойчивости оператора S (возмущаемый базис φ^{ω} здесь существенно зависит от ε), и не исключает возможности того, что каждая фиксированная система Шаудера является точкой локальной устойчивости в смысле следующего определения: Систему φ будем называть **точкой устойчивости оператора** S, если существует последовательность $\varepsilon=\{\varepsilon_k>0\}$ такая, что для любой системы $\widetilde{\varphi}$, $\|\widetilde{\varphi}_k-\varphi_k\|<\varepsilon_k$, соответствующая ортонормальная система $S\widetilde{\varphi}$ образует базис в C (множество всех систем $\widetilde{\varphi}$, удовлетворяющих указанным неравенствам, называется ε-окрестностью точки φ). Правдоподобность предположения об устойчивости базисов Шаудера подтверждается работой Шайдукова [3], где с помощью малого возмущения одного из этих базисов и последующей ортогонализации строится пример ортогонального базиса в C, состоящего из алгебраических полиномов.

Оказывается, однако, что каждая из систем Шаудера является точкой локальной неустойчивости; более того, зафиксировав любую из систем Шаудера, можно сколь угодно малым возмущением лишь одного (любого) ее элемента, оставляя все остальные элементы неизменными, получить базис $\widetilde{\varphi}$, для которого система $S\widetilde{\varphi}$ уже не является базисом в C, Следующая теорема проясняет геометрическую природу подобной неустойчивости.

Теорема 1. Пусть система φ такова, что $S\varphi$ — базис в C. Тогда для устойчивости оператора S в точке φ необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1. Система φ минимальна в пространстве L^2;

2. $\sup \|P_n^{(k)}\varphi_k\| < \infty$, $k = 1, 2, \ldots$, где $P_n^{(k)}$ — оператор ортогонального проектирования пространства C на подпространство, порожденное векторами $\{\varphi_i;\ 1 \leq i \leq n,\ i \neq k\}$.

Условия 1. и 2. — независимы; нарушение каждого из них приводит к точкам неустойчивости, соответственно, первого и второго типов. Примерами точек неустойчивости первого типа являются системы Шаудера.

Интересны особенности расположения точек неустойчивости. Точки первого типа, очевидно, не могут располагаться вблизи ортонормальных систем. Оказывается, что точки неустойчивости второго типа могут находиться сколь угодно близко от ортонормальных базисов. Например, для любой последовательности ε существует ортонормированный базис в C, в ε-окрестности которого имеются точки неустойчивости. Кроме того, для любого ортонормированного базиса φ можно указать точку неустойчивости φ' такую, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|\varphi_k - \varphi'_k\|$ сколь угодно мала.

Вместе с тем основное следствие теоремы 1 состоит в том, что сами ортонормальные системы (т. е., неподвижные точки оператора S), образующие базис в C, являются точками устойчивости.

Рассмотренная задача может быть обобщена следующим образом. Вместо C рассмотрим произвольное сепарабельное банахово пространство B, в котором задано непрерывное скалярное произведение (т. е. $B \subset H$, где H — гильбертово пространство). При этом базисы и норма $\|\cdot\|$ понимаются в смысле B, а ортогональность — в смысле H. Определение точки устойчивости сохраняется в этом общем случае и положительные результаты об устойчивости — распространяются. В частности, имеет место теорема об устойчивости в окрестности неподвижной точки.

Теорема 2. Каждая ортонормальная в H система, образующая базис в B, является точкой устойчивости.

Отметим следствие:

Пусть E — линейное всюду плотное многообразие в B. Тогда, если в B вообще существует ортонормальный базис, то его можно составить из элементов множества E.

Например, в C существует ортонормальный базис, состоящий из полиномов по любой системе, замкнутой в этом пространстве.*

2. В окрестности неподвижной точки имеет место более сильная квадратическая устойчивость оператора S.

Теорема 3. Пусть φ — ортонормальная в H система, образующая базис в B. Тогда для любого числа $\delta > 0$ существует $\varepsilon = \{\varepsilon_k > 0\}$, так что из условия $\|\tilde{\varphi}_k - \varphi_k\| < \varepsilon_k$, $k = 1, 2, \ldots$, следует неравенство

* Более общий случай — пространство $C^k(I_n)$. Существование ортогонального базиса в этом пространстве установлено Чисельским, см. 147—150 настоящего сборника.

$$\varrho^2(\widetilde{\psi}, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \|\widetilde{\psi}_k - \varphi_k\|^2 < \delta, \quad \widetilde{\psi} = S\widetilde{\varphi}.$$

Из теоремы 3 (в частном случае $B=H$) следует возможность сколь угодно точной аппроксимации любой ортонормальной системы φ посредством полиномиальной ортонормальной системы $\widetilde{\psi}$ в смысле расстояния ϱ. Метод аппроксимации, доставляемый оператором S, является в известном смысле наилучшим. Именно, можно построить ортонормальную в L^2 систему φ такую, что для любой ортонормальной системы алгебраических полиномов p выполнено условие $\sum_{k=1}^{\infty} \|\varphi_k - p_k\|_{L^2}^{2-\alpha} = \infty$ при всех $\alpha > 0$.

Отметим еще, что конечность величины $\varrho(\varphi, \widetilde{\psi})$ обеспечивает, очевидно, равносходимость почти всюду рядов Фурье из L^2 по системам φ и $\widetilde{\psi}$. В частности, эти системы имеют одинаковые множители Вейля (если, например, взять систему Меньшова с $\omega(n) = \ln^2 n$, то сразу же получаем конструкцию полной ортонормальной системы полиномов с тем же множителем Вейля).

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Качмаж, Г. Штейнгауз. Теория ортогональных рядов. Москва, 1958.
2. W. Szlenk. Une remarque sur l'orthogonalisation des bases de Schauder dans l'espace *C. Colloq. math.*, **15** (1966), 297—301.
3. К. М. Шайдуков. О существовании ортонормированного базиса в классе полиномов. *Научн. труды Казанского ин-та инж.-строит.-нефт. пром-ти,* **5** (1957), 119—151.
4. А. М. Олевский. Об устойчивости оператора ортогонализации Шмидта. *Известия АН СССР*, **34** (1970), № 4, 803—826.

Институт электронного машиностроения
Вузовский пер. 3/12
Москва *СССР*

Поступило 22 мая 1970