Труды Международной Конференции по конструктивной теории функций
Варна, 19–25 мая, 1970

Proceedings of the International Conference on Constructive Function Theory, Varna, May 19–25, 1970

О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ СПЛАЙН-ФУНКЦИЯМИ И РАЦИОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

В. А. Попов и Бл. Сендов

Резюме. Рассматривается приближение некоторых классов функций сплайн-функциями и рациональными функциями относительно равномерного и хаусдорфове расстояния.

1. Определения и обозначения. Через $S_{n,m}$ будем обозначать множество сплайн-функций порядка (n, m) на отрезке $[a, b]$, т. е. $s(x) \in S_{n,m}$, если $s(x) \in C_{[a,b]}^{m-1}$ и $s^{(m-1)}(x)$ является ломанной с n звенями.

Множество рациональных функций порядка $\leqq n$ будем обозначать через R_n.

Для функций f и g, заданных на отрезке $[a, b]$, будем рассматривать равномерное расстояние $\varrho(f, g)$ и хаусдорфово расстояние $r_\Delta(f, g)$ [1].

Соответствующие наилучшие приближения для двух аппаратов приближения и двух расстояний будем обозначать следующим образом:

$$E_n^m(f) = \inf_{s \in S_{n,m}} \varrho(f, s), \quad R_n(f) = \inf_{q \in R_m} \varrho(f, q),$$

$$E_{n,r}^m(f) = \inf_{s \in S_{n,m}} r_\Delta(f, s), \quad R_{n,r}(f) = \inf_{q \in R_n} r_\Delta(f, q),$$

Наилучшие приближения для классов функций будем обозначать соответственно:

$$\varepsilon_n^m(A) = \sup_{f \in A} E_n^m(f), \quad \varkappa_n(A) = \sup_{f \in A} R_n(f),$$

$$\varepsilon_{n,r}^m(A) = \sup_{f \in A} E_{n,r}^m(f), \quad \varkappa_{n,r}(A) = \sup_{f \in A} R_{n,r}(f).$$

Будем рассматривать функциональные классы:

$V_{[a,b]}^m$ — функции f с абсолютно непрерывной $m-1$-ой производной, для которых $\overset{b}{\underset{a}{V}} f^{(m)} \leqq V < \infty$, притом $V_{[a,b]}^0$ будет множество функций с вариацией $\leqq V < \infty$.

$K_{[a,b]}$ — множество выпуклых на отрезке $[a, b]$ функции f, для которых $|f(x)| \leqq K$.

$K_{[a,b]}^{\varphi,\psi}$ — множество выпуклых на отрезке $[a,b]$ функции f, для которых

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq \varphi > -\infty,$$

$$\lim_{x\to b-0} \frac{f(b)-f(x)}{b-x} \leq \psi < \infty,$$

2. Некоторые известные резултаты. В [2] доказывается, что

(1) $$\varepsilon_n^m(V_{[a,b]}^m) = O(n^{-m-1}).$$

В случае $m=1$, этот результат можно уточнить [3], [4], а именно

$$\varepsilon_n^1(V_{[a,b]}^1) \leq \frac{(b-a)V}{8n^2}$$

и

(2) $$\varepsilon_n^1(K_{[a,b]}^{\varphi,\psi}) = \frac{(b-a)(\psi-\varphi)}{8n^2}.$$

В (2) равенство достигается лишь для некоторых функций $f \in K_{[a,b]}^{\varphi,\psi} \cap S_{n+1,1}$, которые можно описать експлицитно.

В [5] показано, что приближение можно улучшить, если увеличить гладкость приближающих сплайн-функций. Так, вместо (1) получается

(3) $$\varepsilon_{n,r}^1(V_{[a,b]}^0) = o(n^{-1})$$

и

(4) $$\varepsilon_n^{m+1}(V_{[a,b]}^m) = o(n^{-m-1}); \quad m \geq 1.$$

Отметим, что (3) верно для хаусдорфова расстояния, а (4) для равномерного и тем более для хаусдорфова расстояния.

В [4] доказано, что

(5) $$\varepsilon_{n,r}^1(K_{[a,b]}) \leq \frac{b-a+K}{n^2}.$$

Можно показать еще, что

$$\varepsilon_n^1(K_{[a,b]}) = o(n^{-1}).$$

Из последних двух оценок видно, что в классе $K_{[a,b]}$ приближение относительно хаусдорфова расстояния ломанными примерно на $1/n$ лучше чем приближение относительно равномерного расстояния. В этой работе мы покажем, что аналогичный факт имеет место и для приближения рациональными функциями.

3. Приближение выпуклых функций рациональными функциями. Известно [6], что

(6) $$\varkappa_n(V_{[a,b]}^1) = O(\ln^2 n/n^2)$$

и [7]

(7) $$\varkappa_n(K_{[a,b]}) = O(\ln^2 n/n).$$

Притом, в (6) и (7) порядок существенно улучшить нельзя. Более точно, существует функция $f \in V^1_{[a,b]}$, для которой [8]

(8) $$R_n(f) \geq \frac{c}{n^2 \ln^2 n}; \quad c = \mathrm{const},$$

и функция $f \in K_{[a,b]}$, для которой

$$R_n(f) \geq \frac{c}{n \ln^2 n}; \quad c = \mathrm{const}.$$

Покажем, что относительно хаусдорфова расстояния порядок аппроксимации примерно на $1/n$ лучше.

Теорема 1. Имеет место соотношение

(9) $$\varkappa_{n,r}(K_{[a,b]}) = O(\ln^4 n/n^2).$$

Доказательство. Если $f \in K_{[a,b]}$, то для $0 < \delta < \frac{b-a}{2}$ имеет место неравенство

$$\bigvee_{a+\delta}^{b-\delta} f' \leq 2K\delta^{-1}$$

и, согласно (5), для ломанной $p_{m,f} \in S_{m,1}$, осуществляющей наилучшего хаусдорфова приближения функции f на отрезке $\Delta_1 = [a+\delta, b-\delta]$, будем иметь

(10) $$r_{\Delta_1}(f, p_{m,f}) \leq (b-a+K)m^{-2}.$$

Из наличия альтернанса для ломанной $p_{m,f}$ следует, что угловые коэффициенты звеньев ломанной $p_{m,f}$ не будут превышать по абсолютной величине $K\delta^{-1}$.

Рассмотрим ломанную $p_{m,f}$ на всем отрезке $[a, b]$. Из известного результата Ньюмана [9] о том, что $|x|$ аппроксимируется на отрезке $[-1, 1]$ рациональными функциями из R_n с точностью $3e^{-\sqrt{n}}$ следует, что на отрезке $[a, b]$

$$R_{km}(p_{m,f}) \leq 6(b-a)K\delta^{-1}e^{-\sqrt{k}}.$$

Если взять $\delta = n^{-2}$, $k = 16[\ln^2 n]$, $m = n/k$, то из последнего неравенства следует существование рациональной функции $q_{n,p} \in R_n$, для которой

(11) $$\max_{a \leq x \leq b} |p_{m,f}(x) - q_{n,p}(x)| \leq 6(b-a)Kn^{-2}.$$

Нетрудно видеть, что выпуклая функция φ на отрезке $[a, b]$, тождественно равная нулю на отрезке $[a+\delta, b-\delta]$, $0 < \delta < \frac{b-a}{2}$, может быть апроксимирована рациональной функцией из R_4 относительно хаусдорфова расстояния с точностью δ. Следовательно, из (10) и (11) следует (9). Теорема доказана.

Отметим, что оценку (9) нельзя улучшить существенно, так как для функции Липшица равномерное и хаусдорфово расстояние эквивалентны, а функция, для которой выполнено (8), является функцией Липшица.

Функция f называется кусочно-выпуклой на отрезке $\Delta=[a,b]$, если Δ можно разбить на конечное число подотрезков Δ_i; $\Delta=\bigcup\Delta_i$, так что на каждом из подотрезков f является выпуклой или вогнутой. Очевидно, равномерное приближение кусочно-выпуклой функции f рациональными функциями из R_n относительно равномерного расстояния может быть сколь угодно плохим, так как эта функция может и не быть непрерывной. Тем более интересно отметить, что имеет место следующее утверждение, которое можно доказать аналогично доказательству предыдущей теоремы.

Теорема 2. Если f является кусочно-выпуклой на конечном отрезке, то

$$R_{n,r}(f)=O(\ln^4 n/n^2).$$

4. Локальная аппроксимация. До сих пор мы рассматривали оценки которые имеют глобальный характер. Как известно, в отдельных точках ппроксимация может быть и лучше.

Теорема 3. Пусть функция f выпукла и принадлежит $V^1_{[-1,1]}$. Если $a\in[-1,1]$, то для каждого натурального n существует ломанная $s_n\in S_{n,1}$ такая, что для каждого $x\in[-1,1]$ имеет место неравенство

$$|f(x)-s_n(x)|\leq\left(18\pi\frac{\sqrt{|x-a|}}{n^2}+\frac{108\pi^2}{n^3}\right)V. \tag{12}$$

Доказательство. Так как оценка (12) универсальна для всех выпуклых функций, для которых $\overset{1}{\underset{-1}{V}}f'\leq 1$, то мы можем предполагать, что f' — непрерывная, строго монотонная функция и что $f'(-1)=0, f'(1)=1$.

Рассмотрим следующие точки:

$x_i=2i/m$,

x'_i — решение уравнения $f'(x)=i/m$,

$$\xi'_i=a-2\left[1-\cos\frac{\pi i}{m}\right],$$

$$\xi''_i=a+2\left[1-\cos\frac{\pi i}{m}\right],$$

для $i=0, 1, 2, \ldots, m$. Из этих точек возьмем только те, различные между собой, точки, которые находятся на отрезке $[-1,1]$, упорядочим их по возрастанию и обозначим через

$$-1=t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n=1;\ n\leq 3m. \tag{13}$$

Обозначим через $s_{n,f}$ ломанную, вписанную в f с узлами в точках (13). Из выбора узлов (13), следует, что если $x\in(t_{j-1}, t_j]$, то

$$t_j-t_{j-1}\leq 2\left(\cos\frac{\pi k}{m}-\cos\frac{\pi(k+1)}{m}\right)$$

для некоторого целого неотрицательного $k\leq m/2$, следовательно,

$$t_j - t_{j-1} \leq \frac{2\pi}{m} \sin \frac{\pi(k+\theta)}{m}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Но так как $x \in [t_{j-1}, t_j]$, то

$$\frac{|x-a|}{2} = 1 - \cos \frac{\pi(k+\theta_1)}{m},$$

где $0 < \theta_1 < 1$. Тогда можно написать

$$t_j - t_{j-1} \leq \frac{2\pi}{m}\left[\sin \frac{\pi(k+\theta_1)}{m} + \frac{\pi|\theta - \theta_1|}{m} \cos \frac{\pi(k+\theta_3)}{m}\right],$$

где $0 < \theta_3 < 1$, и, следовательно,

$$t_j - t_{j-1} \leq \frac{2\pi}{m}\left[\sqrt{|x-a|} + \frac{2\pi}{m}\right]$$

или

$$t_j - t_{j-1} \leq 2\pi \frac{\sqrt{|x-a|}}{m} + \frac{4\pi^2}{m^2}.$$

Так как точки x_i' находятся среди узлов ломанной $s_{n,f}$, то вариация f' на каждом отрезке $[t_{j-1}, t_j]$ не больше $1/m$. Тогда не трудно сообразить, что для каждого $x \in [-1, 1]$ имеет место неравенство

$$|f(x) - s_{n,f}(x)| \leq \max_{1 \leq j \leq n} (t_j - t_{j-1}) \overset{t_i}{\underset{t_{j-1}}{V}} f'$$

$$\leq 2\pi \frac{\sqrt{|x-a|}}{m^2} + \frac{4\pi^2}{m^3} \leq 18\pi \frac{\sqrt{|x-a|}}{n^2} + \frac{108\pi^2}{n^3}.$$

Этим теорема доказана.

Доказанную теорему можно обобщить и на конечное число точек a_i на отрезке. Тогда оценка в правой стороне будет иметь вид

$$c_1 \left(\prod_{i=1}^{k} |x - a_i|\right)^{1/2} n^{-2} + c^2 n^{-3},$$

где c_1 и c_2 — константы, зависящие от V и от наименшей разности между двумя соседними точками $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$.

Если $f \in C_{[a,b]}^{m-1}$ и $\omega(f^{m-1}; \delta) \leq \omega(\delta)$, где $\omega(\delta)$ выпуклый модуль непрерывности, то аналогичным образом можно показать существование функции $s_f \in S_{n,m}$, для которой

$$|f(x) - s_f(x)| \leq c_1 \left(\prod_{i=1}^{k} |x - a_i|\right)^{\frac{m-1}{2}} \omega\left(\left(\prod_{i=1}^{k} |x - a_i|\right)^{\frac{1}{2}} n^{-1} + \frac{c_2}{n^2}\right).$$

Тот же самый вопрос можно рассмотреть и для аппроксимирования рациональными функциями, где получаются аналогичные оценки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бл. Сендов. Некоторые вопросы теории приближений функций и множеств в хаусдорфовой метрике. *Успехи матем. наук*, **24** (1969), 5, 141—178.
2. G. Freud, V. Popov. On approximation by spline-functions. Colloq. of Constr. theory of functions. Budapest, 1969. (в печати).
3. В. А. Попов. Аппроксимация выпуклых функций полигонами. *Доклады БАН*, **23**, (1970), 643—645.
4. В. А. Попов, Апроксимиране на изпъкнали функции с полигони. *Известия на Мат. инст. БАН*, **11** (1970), 117—126.
5. Бл. Сендов, В. А. Попов. Об аппроксимации сплайн функциями. *Доклады БАН* **23** (1970), 755—757.
6. G. Freud. Über die Approximation reeller Funktionen durch rationale gebrochene Funktionen. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **17** (1966), 313—324.
7. А. П. Буланов, О порядке приближения выпуклых функций рациональными функциями. *Известия АН СССР*, **33** (1969), 1132—1149.
8. P. Szüsz, P. Turan. On constructive theory of functions. I. *MTA, Math. Kut. Int. Közl.* (1965), 495—502.
9. D. J. Newman. Rational approximation to $|x|$. *Michigan Math. J.*, **11** (1969), 11—14,
10. Бл. Сендов, В. А. Попов. О классах, характеризуемых наилучшим приближением сплайн-функциями. *Матем. заметки*, **8** (1970), 59—65.

Математический институт
с Вычислительным центром БАН
София Болгария

Поступило 7 июня 1970