Труды Международной Конференции по конструктивной теории функций Варна, 19–25 мая, 1970

Proceedings of the International Conference on Constructive Function Theory, Varna, May 19–25, 1970

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ С. М. НИКОЛЬСКОГО ДЛЯ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ В ХАУСДОРФОВОЙ МЕТРИКЕ

Бл. Сендов и В. А. Попов

Резюме. Известно [1], [2], что наилучшее приближение $E_{n,r}(f)$ ограниченной функции f, заданной на конечном отрезке Δ алгебраическими многочленами n-ной степени в хаусдорфовой метрике, удовлетворяет условию

$$E_{n,r}(f)=O\left(\frac{\ln n}{n}\right). \tag{1}$$

В этой работе уточняется оценка (1) нахождением оценки типа Никольского [3] для хаусдорфова расстояния (функция в концах отрезка приближается алгебраическими многочленами лучше, чем в середине отрезка) и эта оценка используется для получения некоторых обратных теорем о приближениях относительно хаусдорфова расстояния. Кроме того, дается и уточнение оценки типа (1) для наилучшего приближения 2π-периодических функций тригонометрическими многочленами в хаусдорфовой метрике.

Так как оценки типа (1) являются универсальными для всех функций, для которых $|f(x)|\leqq M$, а множество непрерывных функций в нашем случае плотно в множестве всех ограниченных функций, рассматриваются только непрерывные функции.

1. k-отклонение между двумя функциями в точке и хаусдорфовое расстояние. Пусть f и g — непрерывные на отрезке Δ функции. k-отклонением в точке $x\in\Delta$ между f и g будем называть

$$|f(x)\overset{k}{-}g(x)|=\max\{\min_{\xi\in\Delta}\|f(x),g(\xi)\|_k,\ \min_{\xi\in\Delta}\|f(\xi),g(x)\|_k\},$$

где

$$\|f(x),g(\xi)\|_k=\max\left\{\frac{1}{k}|x-\xi|,\ |f(x)-g(\xi)|\right\};\ k>0.$$

Тогда хаусдорфовое расстояние [2] между f и g на отрезке Δ определяется следующим образом: $r(f,g)=r(\Delta,k;\,f,g)=\max\limits_{x\in\Delta}|f(x)\overset{k}{-}g(x)|$. Константу k будем называть параметром хаусдорфова расстояния. Не трудно видеть, что при $k\to 0$ хаусдорфовое расстояние $r(\Delta,\,k;\,f,\,g)$ стремится к равномерному расстоянию между f и g, т. е.

$$\varrho(f,g)=\max_{k\in\Delta}|f(x)-g(x)|=\lim_{k\to 0}r(\Delta,k;\,f,g).$$

При $k=1$ будем писать $r(\Delta; f, g)$ вместо $r(\Delta, 1; f, g)$ и, если отрезок Δ, на котором берется расстояние, определен из контекста, иногда на место $r(\Delta; f, g)$ пишется $r(f>g)$.

Отметим, что из включения $\Delta_1 \subset \Delta^2$ не следует, что $r(\Delta_1, k; f, g) \leqq r(\Delta_2, k; f, g)$. Например, если обозначим

$$\varphi(x)=\begin{cases} 0 & \text{для} \quad |x| \leqq \frac{1}{2}, \\ 4|x|-2 & \text{для} \quad \frac{1}{2} \leqq |x| \leqq \frac{3}{4}, \\ 1 & \text{для} \quad \frac{3}{4} \leqq |x| \leqq 1, \end{cases} \quad \psi(x)=\begin{cases} 0 & \text{для} \quad |x| \leqq \frac{3}{4}, \\ 4|x|-3 & \text{для} \quad \frac{3}{4} \leqq |x| \leqq 1, \end{cases}$$

то непосредственно проверяется, что

$$r\left(\left[-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right], k; \varphi, \psi\right)=1, \quad r([-1, 1], k; \varphi, \psi) \leqq \frac{1}{1+4k}<1.$$

В связи с этим интересно отметить, что имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. Если f и g непрерывные и 2π-периодические функции, то

$$r((-\infty, \infty), k; f, g) \leqq r([-\pi, \pi], k; f, g),$$

и если, кроме того, f и g — четные функции, то

$$r((-\infty, \infty), k; f, g)=r([-\pi, \pi], k; f, g).$$

Доказательство. Обозначим

(2) $$r((-\infty, \infty), k; f, g)=\alpha, \quad r([-\pi, \pi], k; f, g)=\beta.$$

В силу первого равенства (2), существует точка $X_0(x_0, y_0)$ графика одной из двух функций такая, что в открытом прямоугольнике

$$D_0=\{(x, y): |x-x_0|<k\alpha, \ |y-y_0|<\alpha\}$$

не содержатся точки графика другой функций. Так как функции 2π-периодические, то можно считать, что $x_0 \in [-\pi, \pi]$. Но тогда имеет место неравенство

(3) $$\alpha \leqq \beta,$$

и, следовательно, первая часть леммы доказана.

В силу второго равенства (2), существует точка $X_1(x_1, y_1)$, $x_1 \in [-\pi, \pi]$, которую без ограничения общности можно считать принадлежащей графику функции f, т. е. $y_1=f(x_1)$, и такая, что в прямоугольнике

(4) $$D_1^*=\{(x, y): x \in (x_1-k\beta, x_1+k\beta) \cap [-\pi, \pi], \ |y-y_1|<\beta\}$$

не содержатся точки графика функции g.

Докажем, что и в открытом прямоугольнике

(5) $$D_1=\{(x, y): |x-x_1|<k\beta, \ |y-y_1|<\beta\}$$

тоже не содержатся точки графика функций g. Из этого будет следовать, что $\beta \leqq \alpha$, которое вместе с (3) дает $\alpha=\beta$, т. е. лемма будет доказана.

Допустим противоположное, что в прямоугольнике D_1, определенном через (5), содержится точка $(x_2, g(x_2))$ графика функций g. Тогда

$$(6) \qquad x_1 - k\beta < x_2 < x_1 + k\beta, \quad x_2 \bar{\in} [-\pi, \pi].$$

Без ограничения общности можно считать, что $x_2 > \pi$ и, следовательно, существует целое положительное число s, для которого $x_2 - 2s\pi \in [-\pi, \pi]$. Но тогда и $-x_2 + 2s\pi \in [-\pi, \pi]$.

Из периодичности и четности g следует, что $g(-x_2+2s\pi) = g(x_2)$ и, следовательно, точка $(-x_2+2s\pi, g(-x_2+2s\pi))$ принадлежит прямоугольнику D_1^*, определенному через (4), которое противоречит нашему допущению. Этим лемма доказана.

Из определения хаусдорфова расстояния следуют непосредственно следующие утверждения:

$$(7) \qquad r(\Delta, k; cf, cg) = |c| r(\Delta, |c| k; f, g),$$

$$(8) \qquad r(\Delta, k; f, g) \leqq \max[1, k_1/k] r(\Delta, k_1; f, g),$$

где c — произвольная константа.

Докажем еще следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть $\varphi(t)$ — монотонная функция на отрезке $\Delta_1 = [a_1, b_1]$, которая удовлетворяет условию Липшица с константой L, т. е.

$$|\varphi(t') - \varphi(t'')| \leqq L |t' - t''|$$

и, кроме того, $\varphi(a_1) = a$, $\varphi(b_1) = b$. Если обозначим $f_1(t) = f(\varphi(t))$, $g_1(t) = g(\varphi(t))$ и $\Delta = [a, b]$, то

$$r(\Delta, L; f, g) \leqq r(\Delta_1, 1; f_1, g_1).$$

Доказательство следует непосредственно из неравенств

$$\begin{aligned} \|f(x), g(\xi)\|_L &= \max\left\{\frac{1}{L}|x-\xi|, |f(x)-g(\xi)|\right\} \\ &= \max\left\{\frac{1}{L}|\varphi(t)-\varphi(\zeta)|, |f(\varphi(t)) - g(\varphi(\zeta))|\right\} \\ &\leqq \max\{|t-\zeta|, |f_1(t)-g_1(\zeta)|\} = \|f_1(t), g_1(\zeta)\|_1. \end{aligned}$$

Из доказанной леммы и (8) следует

$$(9) \qquad r(\Delta, k; f, g) \leqq \max[1, L] r(\Delta_1, k; f_1, g_1).$$

2. Некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 3. Для каждого $s \geqq 0$ существует четный тригонометрический многочлен $A_{n,s}$ порядка не выше n, для которого

$$(10) \qquad |A_{n,s}(t)| \leqq n^{-s} \quad \text{для} \quad \lambda_s \leqq t \leqq 2\pi - \lambda_s,$$

$$(11) \qquad A_{n,s}(t) \geqq -n^{-s} \quad \text{для каждого } t,$$

$$(12) \qquad A_{n,s}(0) \geqq M,$$

где
$$\lambda_s = \frac{\ln 2Mn^s}{n}.$$

Доказательство. Обозначим

$$A_{n,s}(t) = n^{-s} T_n\left(\frac{2\cos t + 1 - \cos\lambda_s}{1+\cos\lambda_s}\right), \tag{13}$$

где $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ — многочлен Чебышева. Когда $\lambda_s \leq t \leq 2\pi - \lambda_s$, имеем

$$-1 \leq \frac{2\cos t + 1 - \cos\lambda_s}{1+\cos\lambda_s} \leq 1,$$

откуда следует, что $A_{n,s}$ удовлетворяет неравенству (10). Многочлен $A_{n,s}$ удовлетворяет и неравенству (11), что непосредственно вида из его определения (13).

Для доказательства (12) воспользуемся известным представлением

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left[(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n\right].$$

Из последнего и (13) имеем

$$A_{n,s}(0) = \frac{1}{2n^s}\left[\left(\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\lambda_s}{4}}{1-\operatorname{tg}\frac{\lambda_s}{4}}\right)^{2n} + \left(\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\lambda_s}{4}}{1+\operatorname{tg}\frac{\lambda_s}{4}}\right)^{2n}\right]$$

$$\geq \frac{1}{2n^s}\left(\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\lambda_s}{4}}{1-\operatorname{tg}\frac{\lambda_s}{4}}\right)^{2n} \geq \frac{1}{2n^s}\left(\frac{1+\frac{\lambda_s}{4}}{1-\frac{\lambda_s}{4}}\right)^{2n},$$

или

$$A_{n,s}(0) \geq \frac{1}{2n^s} e^{n\lambda_s} = M,$$

используя неравенство

$$\frac{1+\lambda}{1-\lambda} \geq e^{2\lambda}; \quad 0 \leq \lambda < 1.$$

Лемма 4. Для каждого $\alpha \in (\lambda_{s+1}, \pi)$, $s>0$, и каждого $M>0$ существует функция

$$B_{n,s}(\alpha;\, t) = a_n t + b_n(\alpha) + \sum_{k=1}^{n} c_{k,n} \sin k(t-\alpha), \tag{14}$$

где a_n и $c_{k,n}$, $k=0, 1, 2, \ldots, n$, — константы, независящие от α, $b_n(\alpha)$ зависит от α, но не зависит от t, для которой имеют место неравенства

$$|B_{n,s}(\alpha;\, t)| \leq 2\pi n^{-s} \qquad \text{для} \quad 0 \leq t \leq \alpha - \lambda_{s+1}, \tag{15}$$

$$-2\pi n^{-s} \leq B_{n,s}(\alpha;\, t) \leq M + 2\pi n^{-s} \qquad \text{для} \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \tag{16}$$

$$|B_{n,s}(\alpha;\, t) - M| \leq 2\pi n^{-s} \qquad \text{для} \quad \alpha + \lambda_{s+1} \leq t \leq 2\pi. \tag{17}$$

Доказательство. Обозначим

$$C_{n,s}(\alpha;\,t)=\int_0^t A_{n,s+1}(\tau-\alpha)\,d\tau, \tag{18}$$

где $A_{n,s+1}$ — четный тригонометрический многочлен (13). Очевидно, функция $C_{n,s}$, определенная равенством (18), имеет вид (14). Из (18) и (10) следует, что $\nu C_{n,s}$ удовлетворяет неравенству (15) для каждого ν, для которого $|\nu|\leqq n$.

Займемся оценкой величины

$$N=\int_{\alpha-\lambda_{s+1}}^{\alpha+\lambda_{s+1}} A_{n,s+1}(\tau-\alpha)d\tau=2\int_0^{\lambda_{s+1}} A_{n,s+1}(\tau)d\tau,$$

где для краткости вместо λ_{s+1} будем писать λ. Имея в виду (13), для N получаем

$$N\geqq n^{-s-1}\int_0^{\lambda}\left[\frac{2\cos t+1-\cos\lambda+2\sqrt{(1+\cos t)(\cos t-\cos\lambda)}}{1+\cos\lambda}\right]^n dt$$

$$=n^{-s-1}(1+\cos\lambda)^{-n}\int_0^{\lambda}(\sqrt{1+\cos t}+\sqrt{\cos t-\cos\lambda})^{2n}dt$$

$$\geqq n^{-s-1}\cos^{-2n}\frac{\lambda}{2}\int_0^{\lambda}\left(\cos\frac{t}{2}+\sin\frac{\lambda-t}{2}\right)^{2n}dt,$$

или

$$N\geqq\frac{1}{n^{s+1}}\left(\frac{2\cos\dfrac{\pi-\alpha}{4}}{\cos\dfrac{\lambda}{2}}\right)^{2n}\int_0^{\lambda}\cos^{2n}\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi-\lambda}{4}\right)dt. \tag{19}$$

Обозначим

$$\varphi(t)=\cos^{2n}\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi-\lambda}{4}\right).$$

Непосредственно видно, что для $0\leqq t\leqq\lambda$

$$\varphi'(t)=-n\cos^{2n-1}\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi-\lambda}{4}\right)\sin\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi-\lambda}{4}\right),$$

$$\varphi''(t)=\frac{1}{2}n^2\left[1-\frac{1}{n}-\sin\left(\frac{\lambda}{2}-t\right)\right]\cos^{2n-2}\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi-\lambda}{4}\right)$$

$$\geqq\frac{1}{2}n^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)\cos^{2n-2}\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi-\lambda}{4}\right),$$

т. е. для $n\geqq 2$ $\varphi''(t)\geqq 0$; $0\leqq t\leqq\lambda$.

Тогда имеет место неравенство

$$\int_0^{\lambda} \varphi(t)\,dt \geqq -\frac{\varphi^2(0)}{2\varphi'(0)} = \frac{\cos^{1n}\frac{\pi-\lambda}{4}}{2n\cos^{2n-1}\frac{\pi-\lambda}{4}\sin\frac{\pi-\lambda}{4}}.$$

Из последнего и (19) получаем

$$N \geqq \frac{1}{2n^{s+2}}\frac{\cos\frac{\pi-\lambda}{4}}{\sin\frac{\pi-\lambda}{4}}\left(\frac{2\cos^2\frac{\pi-\lambda}{4}}{\cos\frac{\lambda}{2}}\right)^{2n} = \frac{1}{2n^{s+2}}\operatorname{cotg}\frac{\pi-\lambda}{4}\left(\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\lambda}{4}}{1-\operatorname{tg}\frac{\lambda}{4}}\right)^{2n}$$

$$\geqq \frac{1}{2n^{s+2}}\left(\frac{1+\frac{\lambda}{4}}{1-\frac{\lambda}{4}}\right)^{2n} \geqq \frac{1}{2n^{s+2}}e^{n\lambda},$$

или

$$(20) \qquad N \geqq M/n,$$

так как $\lambda=\lambda_{s+1}=(\ln 2Mn^{s+1})/n$.

Обозначим $\nu=M/N$, тогда согласно (20) $0<\nu\leqq n$ и для функции $B_{n,s}(\alpha;\,t)=\nu C_{n,s}(\alpha;\,t)$ будет иметь для $\alpha+\lambda_{s+1}\leqq t\leqq 2\pi$

$$B_{n,s}(\alpha;\,t)=\nu\int_0^{\alpha-\lambda_{s+1}} A_{n,s+1}(\tau-\alpha)d\tau+M+\nu\int_{\alpha+\lambda_{s+1}} A_{n,s+1}(\tau-\alpha)d\tau,$$

или

$$B_{n,s}(\alpha;\,t)=M+\nu\int_{-\alpha}^{-\lambda_{s+1}} A_{n,s+1}(\tau)d\tau+\nu\int_{\lambda_{s+1}}^{t} A_{n,s+1}(\tau)d\tau.$$

Следовательно, согласно (10) $B_{n,s}$ удовлетворяет неравенствам (16) и (17) и имеет вид (24). Этим лемма доказана.

3. Прямые аппроксимационные теоремы. Перейдем сейчас к доказательству некоторых утверждений о порядке приближения непрерывных функций алгебраическими и тригонометрическими многочленами относительно хаусдорфова расстояния.

Лемма 5. Для каждой непрерывной и 2π-периодической функции f и каждого натурального n существует тригонометрический многочлен $T_{n,f}$ порядка не выше n, для которого имеет место неравенство

$$(21) \qquad r([-\pi,\pi],n^{s-2};\,f,\,T_{n,f}) \leqq 3\frac{\ln 2Mn^s}{n^{s-1}}+O\left(\frac{\ln n}{n^s}\right),$$

где $s\geqq 1$ и $M=\max_x|f(x)|$. При этом, если f является четной функцией, то $T_{n,f}$ тоже четный.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имея в виду правую часть (21), можно рассматривать n достаточно большое.

Обозначим $m=\left[\frac{\pi n}{3\ln 2Mn^s}\right]$, $t_i=\frac{\pi i}{m}$; $i=0, 1, 2, \ldots, 2m$; $\Delta_i=t_i-t_{i-1}$, $i=1, 2, 3, \ldots, 2m$.

Отметим, что имеют место следующие неравенства:

(22) $$3\lambda_s=3\frac{\ln 2Mn^s}{n}\leqq t_i-t_{i-1}=\frac{\pi}{m}\leqq 3\lambda_s+O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right).$$

Так как $s\geqq 1$, то для достаточно больших n имеет место

(23) $$\lambda_{s+1}<\frac{3}{2}\lambda_s.$$

Введем еще следующие обозначения:

$$y_i=f(t_i),\ i=0, 1, 2, \ldots, 2m;$$

$$y_i'=\min_{t\in\Delta_i} f(t),\ y_i''=\max_{t\in\Delta_i} f(t),\ i=1, 2, 3, \ldots, 2m.$$

Очевидно, если f—четная функия, то

(24) $$y_i=y_{2m-i},\qquad i=0, 1, 2, \ldots, 2m,$$
$$y_i'=y'_{2m-i+1},\quad y_i''.$$

Рассмотрим следующую функцию, пользуясь обозначениями, введенными в леммах 3 и 4:

$$\varphi_i(\alpha, \beta; t)=\frac{y_i-y_{i-1}}{M}B_{n,s}\left(\pi\frac{2i-1}{2m};\ t\right)+\alpha A_{n,s}\left(t-\pi\frac{3i-2}{3m}\right)+\beta A_{n,s}\left(t-\pi\frac{3i-1}{3m}\right),$$

где $|\alpha|\leqq 1$, $|\beta|\leqq 1$.

В силу лемм 3 и 4, а также (22) и (23), для $t\in\Delta_j$ имеют место следующие неравенства:

а) для $j<i$

(25) $$-16n^{-s}\leqq\varphi_i(\alpha, \beta; t)\leqq 16n^{-s},$$

б) для $j>i$

(26) $$y_i-y_{i-1}-16n^{-s}\leqq\varphi_i(\alpha, \beta;\ t)\leqq y_i-y_{i-1}+16n^{-s}.$$

Имея в виду леммы 3 и 4, нетрудно сообразить, что можно выбрать такие значения параметров $\alpha=\alpha_i$ и $\beta=\beta_i$; $|\alpha_i|\leqq 1$, $|\beta_i|\leqq 1$, для которых имеют место равенства

(27) $$\min_{t\in\Delta_i}\varphi_i(\alpha_i, \beta_i;\ t)=y_i'-y_{i-1}',$$
$$\max_{t\in\Delta_i}\varphi_i(\alpha_i, \beta_i;\ t)=y_i''-y_{i-1}''$$

Притом, если f—четная функция, то ввиду (24), константы α_i и β_i можно выбрать так, чтобы имели место равенства

(28) $$\alpha_i=\beta_{2m-i+1},\quad \beta_i=\alpha_{2m-i+1}.$$

Образуем функцию

$$T_{n,f}(t)=y_0+\sum_{i=1}^{2m}\varphi_i(\alpha_i, \beta_i;\ t).$$

Так как

$$\sum_{i=1}^{2m} \frac{y_i - y_{i-1}}{M} = \frac{1}{M} [f(2\pi) - f(0)] = 0,$$

то, в силу (13) и (14), $T_{n,f}$ является тригонометрическим многочленом порядка не выше n. Притом, если f — четная функция, то в силу (24) и (28), $T_{n,f}$ будет четный тригонометрический многочлен.

Из неравенств (25), (26) и равенств (27) следует непосредственно, что

$$|y'_i - \min_{t \in \Delta_i} T_{n,f}(t)| \leq 32mn^{-s},$$

$$|y''_i - \max_{t \in \Delta_i} T_{n,f}(t)| \leq 32mn^{-s}.$$

Но из последних неравенств и определения хафсдорфова расстояния следует, что

$$r([-\pi, \pi], k; f, T_{n,f}) \leq \max [\pi/km, 32mn^{-s}]$$

$$\leq \max \left[\frac{3 \ln 2Mn^s}{kn} + O\left(\frac{\ln n}{kn}\right), \frac{32\pi}{n^{s-1} \ln 2Mn^s}\right],$$

из которого для $k = n^{s-2}$ получаем

$$r([-\pi, \pi], n^{s-2}; f, T_{n,f}) \leq \frac{3 \ln 2Mn^s}{n^{s-2}} + O\left(\frac{\ln n}{n^s}\right).$$

Этим лемма доказана.

Если обозначим через $E^T_{n,r}(f)$ наилучшее приближение 2π-периодических функций f тригонометрическими многочленами порядка не выше n относительно хаусдорфова расстояния $r(f, g) = r((-\infty, \infty), 1; f, g)$, то из лемм 5 и 1 следует непосредственно следующая

Теорема 1. Если $f \in C_{2\pi}$, то

$$E^T_{n,r}(f) \leq 6 \frac{\ln n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

или более точно

$$E^T_{n,r}(f) \leq 3 \frac{\ln 2Mn^2}{n} + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right),$$

где $M = \max_x |f(x)|$.

В доказанной теореме имеем более хорошую оценку относительно константы перед $\ln n/n$, чем в [1] и [4], но это еще не лучшая константа.

Если обозначим через $E_{n,r}(f)$ наилучшее приближение функции f, заданной на отрезке $[-1, 1]$ алгебраическими многочленами порядка не выше n относительно хаусдорфова расстояния $r(f, g) = r([-1, 1], 1; f, g)$, то из лемм 5, 1 и 2 следует

Теорема 2. Если $f \in C_{[-1, 1]}$, то

$$E_{n,r}(f) \leq 6 \frac{\ln n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

или более точно

$$E_{n,r}(f) \leqq 3\,\frac{\ln 2Mn^2}{n} + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right),$$

где $M = \max\limits_{x \in \Delta} |f(x)|$.

Оценки в теореме 2 лучше относительно константы перед $\ln n/n$, чем приведенные в [2] и [5], но это еще не лучшая константа. Наверное, лучшая константа в шесть раз менше.

Перейдем к доказательству основной теоремы в настоящей работе.

Теорема 3. Если $f \in C_{[-1,1]}$, то существует алгебраический многочлен $P_{n,f}$ степени не выше n, для которого имеет место следующее неравенство для каждого $x \in [-1, 1]$,

$$|f(x) - P_{n,f}(x)| \leqq 6\sqrt{1-x^2}\,\frac{\ln n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

или более точно

$$|f(x) - P_{n,f}(x)| \leqq 2\sqrt{1-x^2}\,\frac{\ln 2Mn^3}{n} + O\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right), \tag{29}$$

где $M = \max\limits_{|x| \leqq 1} |f(x)|$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $f_1(t) = f(\cos t)$, которая является 2π-периодической и четной. В силу леммы 5, существует четный тригонометрический многочлен $T_{n,s}$, для которого

$$r([-\pi, \pi], n^{s-2};\ f_1,\ T_{n,t}) \leqq 2\,\frac{\ln 2Mn^s}{n^{s-1}} + O\left(\frac{\ln n}{n^s}\right).$$

Но это означает, что для каждой $t_0 \in [-\pi, \pi]$ существуют $t_1, t_2 \in [-\pi, \pi]$ такие, что

$$|t_0 - t_1|,\ |t_0 - t_2| \leqq 2\,\frac{\ln 2Mn^s}{n} + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) = \delta_s$$

и

$$|f_1(t_1) - T_{n,f}(t_0)|,\ |f_1(t_0) - T_{n,f}(t_2)| \leqq 2\,\frac{\ln 2Mn^s}{n^{s-1}} + O\left(\frac{\ln n}{n^s}\right).$$

Положим $x = \cos t$, $x_j = \cos t_j$; $j = 0, 1, 2$, и $P_{n,f}(x) = T_{n,f}(\arccos x)$, где $P_{n,f}$ является алгебраическим многочленом степени не выше n, так как $T_{n,f}$ — четный тригонометрический многочлен порядка не выше n. Тогда из вышенаписанных неравенств получаем, что для каждого $x_0 \in [-1, 1]$ существуют $x_1, x_2 \in [-1, 1]$, такие что

$$|x_0 - x_1|,\ |x_0 - x_2| \leqq \delta_s \sin t_0 + \delta_s^2 = 2\sqrt{1-x_0^2}\,\frac{\ln 2Mn^s}{n} + O\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right)$$

и

$$|f(x_1) - P_{n,f}(x_0)|,\ |f(x_0) - P_{n,f}(x_2)| \leqq 2\,\frac{\ln 2Mn^s}{n^{s-1}} + O\left(\frac{\ln n}{n^s}\right).$$

Но тогда, имея в виду определение k-отклонения, из последних неравенств получаем для $s = 3$, что

$$|f(x_0)-P_{n,f}(x_0)|\leq 2\sqrt{1-x_0^2}\,\frac{\ln 2Mn^3}{n}+O\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right).$$

Этим теорема доказана.

Отметим, что член $O\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right)$ в (29) нельзя улучшить по порядку.

4. Обратные теоремы и связь между наилучшим приближением относительно равномерного и хаусдорфова расстояния. Через $E_n(f)$ и $E_n^T(f)$ будем обозначать наилучшее ранномерное приближение функций f соответственно алгебраическими и тригонометрическими многочленами порядка не выше n.

Теорема 4. Если f 2π-периодическая функция и

(30) $$E_{n,r}^T(f)=O(n^{-1-\varepsilon}),\quad 0<\varepsilon<1,$$

то и

$$E_n^T(f)=O(n^{-1-\varepsilon})$$

и, следовательно, f' существует и удовлетворяет условию Гельдера порядком ε.

Доказательство. Как известно [2], если одна из функций f, g имеет модуль непрерывности $\omega(\delta)$, то

(31) $$\max_{x\in\Delta}|f(x)-g(x)|\leq r(\Delta;\ f,g)+\omega(r(\Delta;\ f,g)).$$

Следовательно, для доказательства теоремы достаточно доказать, что f удовлетворяет условию Липшица.

В силу неравенства Бернштейна для тригонометрических многочленов

$$\max|T_n'(t)|\leq n\max|T_n(t)|$$

и (31) из (30) следует, что

(32) $$E_n^T(f)=O(n^{-\varepsilon}).$$

Дальше будем считать, что ε — неалгебраическое число, так как в противном случае можно провести следующие рассуждения с неалгебраическим числом, находящимся между 0 и ε.

Из (32) и теорем Бернштейна [6] следует, что для модуля непрерывности $\omega(f,\delta)$ функции f имеет место равенство

$$\omega(f;\ \delta)=O(\delta^{\varepsilon}).$$

Из последнего и (31) следует, что

$$E_n^T(f)=O(n^{-(1+\varepsilon)\varepsilon})$$

и согласно теореме Бернштейна, что

$$\omega(f;\ \delta)=O(^{(1+\varepsilon)\varepsilon}).$$

Продолжая таким образом, получаем, что

$$\omega(f;\ \delta)=O(\delta^{\varepsilon(1+\varepsilon)^{\nu}}),$$

где ν — такое натуральное число, для которого

$$\varepsilon(1+\varepsilon)^{\nu}<1<\varepsilon(1+\varepsilon)^{\nu+1}.$$

Такое число ν существует в силу положительности и неалгебраичности ε. Но тогда

$$E_n^T(f)=O(n^{-\varepsilon(1+\varepsilon)^{\nu+1}})=O(n^{-1-\varepsilon'}),$$

где $\varepsilon'>0$. Следовательно, функция f удовлетворяет условию Липшица и теорема доказана.

Аналогичным образом доказывается и следующая

Теорема 5. Если $f\in C_{[-1,1]}$ и для каждого натурального n существует алгебраический многочлен $P_{n,f}$ степени не выше n такой, что для всех $x\in[-1,1]$ имеет место

$$|f(x)-P_{n,f}(x)|=O\left(\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^{1+\varepsilon}\right),$$

то и

$$|f(x)-P_{n,f}(x)|=O\left(\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^{1+\varepsilon}\right),$$

где $\varepsilon<0$.

Отметим, что в теоремах 4 и 5 $\varepsilon>0$ нельзя опустить.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бл. Сендов. Апроксимиране на функции с алгебрични полиноми по отношение на една метрика от хаусдорфовски тип. *Годишник СУ, Физ.-мат. фак.*, **55** (1962), 1—39.
2. Бл. Сендов. Некоторые вопросы теории приближений функций и множеств в хаусдорфовой метрике. *Успехи матем. наук*, **24** (1969), 5, 141—178.
3. С. М. Никольский. О наилучшем приближении многочленами функций, удовлетворяющих условию Липшица. *Известия АН СССР*, **10** (1946), 295—318.
4. В. М. Веселинов. Апроксимирование функций при помощи тригонометрических полиномов относительно одной метрики хаусдорфова типа. *Mathematica*, (1967) 185—199.
5. Бл. Сендов, В. А. Попов. Приближение функций многих переменных алгебраическими многочленами в метрике хаусдорфова типа. *Годишник СУ, Мат. фак.*, **63** (1970) (в печати).
6. И. П. Натансон. Конструктивная теория функций. Москва, 1949.

Математический институт
с Вычислительным центром БАН
София Болгария

Поступило 17 июня 1970