Труды Международной Конференции по конструктивной теории функций Варна, 19—25 мая, 1970

Proceedings of the International Conference on Constructive Function Theory, Varna, May 19—25, 1970

ПРИБЛИЖЕНИЕ СПЛАЙНАМИ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА НОРМЫ ИХ ПРОИЗВОДНЫХ

Ю. Н. Субботин

Резюме. Будем говорить, что функция $f(x) \in W^k L_p$, если на каждом конечном отрезке она имеет абсолютно непрерывную $k-1$ производную, а k производная удовлетворяет неравенству $\| f^{(k)} \|_{L_p(J)} \leqq 1$, где $J=[0, \infty]$ или $(-\infty, \infty)$. Пусть $S_m(x)$ обозначает сплайн порядка m с нефиксированными узлами (т. е. точками разрыва производной $S_m^{(m)}(x)$). При целых k, l и m $(1 \leqq k \leqq l \leqq m)$ изучается величина

$$\Phi_N = \sup \{\inf \{\| f - s_m \| L_q(J)\} ; \| S_m^{(l)} \|_{L_s(J)} \leqq N\} ; \| f^{(k)} \| L_p(J) \leqq 1, 1 \leqq p,\ q,\ s \leqq \infty\}.$$

Теорема. Если выполняется неравенство $ks^{-1}+(l-k)q^{-1} \leqq lp^{-1}$, то при любом $N>9$ величина ΦN конечна и $\Phi N \leqq C(k, l, m) N^{-\nu}$, где $\nu=(k+q^{-1}-p^{-1})(l-k-s^{-1}+p^{-1})^{-1}$ и константа $C(k, l, m)$ зависит только от указанных величин.

Введем предварительно некоторые обозначения. Будем говорить, что функция $f(x) \in W_p^k$, если у нее существует локально абсолютно непрерывная $(k-1)$-ая производная, а k-ая производная принадлежит $L_p(J)$, т. е.

$$\| f^{(k)} \|_{L_p(J)} = \left\{ \int_J | f_{(x)}^{(k)} |^p dx \right\}^{1/p} < \infty, \quad 1 \leqq p \leqq \infty, \tag{1}$$

где $J=(-\infty, \infty)$ или $[0, \infty)$. При $p=\infty$ $\| f^{(k)} \|_{L_\infty(J)} = \sup\limits_{x \in J} | f^{(k)}(x) |$ и под $f^{(k)}(x)$ понимается наибольшее по абсолютной величине производное число $(k-1)$-ой производной. Изучается приближение в $L_q(J)$, $1 \leqq q \leqq \infty$, функций $f(x)$ из класса W_p^k сплайнами $S_m(x)$ порядка m при дополнительном предположении, что нормы в L_s их l-ых производных ограничены одним и тем же числом N. На узлы сплайна не налагается никаких ограничений. Под сплайном $S_m(x)$ в терминологии, принятой в [1], понимается простой полиномиальный сплайн степени m, т. е. $S_m(x)$ имеет непрерывную $(m-1)$-ую производную, а m-ая производная кусочно постоянна. Точки разрыва m-ой производной называются узлами сплайна. Кроме того, предполагается, что k, l и m — фиксированные натуральные числа и $1 \leqq k \leqq l \leqq m$. Более точно задача состоит в исследовании величины

$$\Phi_N = \Phi_N(k, l, m, p, q, s) = \sup_{\| f^{(k)} \|_{L_p(J)} \leqq 1} \ \inf_{\| s_m^{(l)} \|_{L_s(J)} \leqq N} \| f - S_m \|_{L_q(J)}, \tag{2}$$

$1 \leqq p,\ q,\ s \leqq \infty$.

Справедлива следующая

Теорема. Если выполняется неравенство

$$(3)\qquad ks^{-1}+(l-k)q^{-1}\leq lp^{-1},$$

то при любом $N>0$ величина Φ_N конечна и $\Phi_N\leq C(k,l,m)N^{-\nu}$, где $\nu=(k+q^{-1}-p^{-1})/(l-k-s^{-1}+p^{-1})$ и константа $C(k,l,m)$ зависит только от указанных величин. Порядок по N является точным. Кроме того, справедливо тождество

$$(4)\qquad \Phi_N=\Phi_{N_0}(N/N_0)^{-\nu}.$$

Замечание. Если $\nu\neq 0$, ∞ и $0/0$, то $\Phi_N\to 0$ при $N\to\infty$, так как тогда $0<\nu<\infty$. В исключенных случаях доказано лишь, что величина Φ_N ограничена одним и тем же числом, не зависящим от N.

Сформулируем основные моменты доказательства. Пусть даны две различные произвольные точки x_i, x_{i+1} и функция $f(x)$ из класса W_p^k. Определим сплайн $S_{m,i}(x)$ порядка m с узлами

$$x_i=\bar{x}_{i,0}<\bar{x}_{i,1}<\cdots<\bar{x}_{i,m}=x_{i+1}$$

из условий

$$(5)\qquad \begin{aligned} &f^{(n)}_{(x_i)}=S^{(n)}_{m,i}(x_i),\ n=0,1,\ldots,k-1;\quad S^{(n)}_{m,i}(x_i)=0,\ n=k,\ldots,m-1\ (m>k),\\ &f^{(n)}_{(x_{i+1})}=S^{(n)}_{m,i}(x_{i+1}),\ n=0,1,\ldots,k-1;\ S^{(n)}_{m,i}(x_{i+1})=0,\ n=k,\ldots,m-1\ (m>k). \end{aligned}$$

Тогда имеют место равенства

$$(6)\qquad f(x)-S_{m,i}(x)=\frac{1}{m!}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{d^{m-k+1}}{dt^{m-k+1}}\left\{(x-t)_+^m-\sum_{r=0}^{m-1}\frac{\omega(t)(x-\bar{x}_{i,r})_+^m}{\omega'(\bar{x}_{i,r})(t-\bar{x}_{i,r})}\right\}f^{(k)}(t)\,dt,$$

$$(7)\qquad S_{m,i}(x)=\sum_{n=0}^{k-1}f^n(x_i)\frac{(x-x_i)^n}{n!}+\frac{1}{m!}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{d^{m-k+1}}{dt^{m-k+1}}\sum_{r=0}^{m-1}\frac{\omega(t)(x-\bar{x}_{i,r})_+^m}{\omega'(\bar{x}_{i,r})(t-\bar{x}_{i,r})}f^{(k)}(t)\,dt,$$

где

$$(x-t)_+^m=\begin{cases}(x-t)^m, & x\geq t,\\ 0, & x<t;\ m\geq 0,\end{cases}$$

$\omega(t)=\omega_i(t)=(t-\bar{x}_{i,0})(t-\bar{x}_{i,1})\ldots(t-\bar{x}_{i,m})$. Формула (6) при $m=k-1$ получена в [2].

Рассмотрим задачу для полуоси. В случае $J=(-\infty,\infty)$ требуются лишь незначительные изменения. Пусть отрезки $[x_i,x_{i+1}]$ имеют общими разве лишь концы и покрывают всю вещественную полуось,

$$0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_i<\cdots.$$

Проведем предыдущее построение для каждого i и при $x_i\leq x\leq x_{i+1}$ положим $S_m(x)=S_{m,i}(x)$. Промежуточные узлы сплайна $S_{m,i}(x)$ выберем так, чтобы $\bar{x}_{i,r}=x_i+\lambda_r(x_{i+1}-x_i)$, $r=0,1,\ldots,m$, где числа λ_r не зависят от i и удовлетворяют неравенствам $0=\lambda_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_m=1$. Например, можно положить $\lambda_r=r/m$. Тогда для $x_i\leq x\leq x_{i+1}$ $(x_i\leq t\leq x_{i+1})$ выполняются неравенства

$$\left|\frac{d^{m-k+1}}{dt^{m-k+1}}(x-t)_+^m\right| \leq \frac{m!}{k!}(x_{i+1}-x_i)^{k-1}=\frac{m!}{k!}\Delta x_i^{k-1},$$

$$(8)\qquad \left|\frac{d^{m-k+1}}{dt^{m-k+1}}\sum_{r=0}^{m-1}\frac{\omega(t)(x-\bar{x}_{i,r})_+^m}{\omega'(\bar{x}_{i,r})(t-x_{i,r})}\right| \leq N_0(k, m)\Delta x_i^{k-1}.$$

Здесь и в дальнейшем константы зависят только от указанных в скобках величин. Из равенств (6), (7) с помощью неравенства Гельдера получаем

$$(9)\qquad \| f-S_m\|_{L_q}^q \leq C^q(k, m)\sum_{i=0}^{\infty}\Delta x_i^{kq-q/p+1}\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}}|f^{(k)}(t)|^p dt\right)^{q/p},$$

$$(10)\qquad \| S_m^{(l)}\|_{L_s}^s \leq N_0^s\sum_{i=0}^{\infty}\Delta x_i^{1-s/p-s(l-k)}\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}}|f^{(k)}(t)|^p dt\right)^{s/p},$$

где $N_0=N_0(k, m)$. Отметим, что равенство (4) доказывается аналогично соответствующему соотношению в задаче о наилучшем приближении операторов дифференцирования [3], [4].

В дальнейшем применяется следующая схема рассуждений. При выполнении неравенства (3) осуществляется такой выбор узлов

$$0=x_0<x_1<\cdots<x_i<\cdots,\quad x_i\to\infty$$

при $i\to\infty$, что правые части неравенств (9) и (10) не превосходят некоторых констант, не зависящих от $f(x)$, т. е. доказывается теорема для фиксированного N. Общий случай следует из равенства (4). Применяемый ниже алгоритм выбора узлов использовался авторами работы [2] при доказательстве леммы 1, опубликованное доказательство которой основано на ином методе. Указанный алгоритм применяется здесь с любезным согласием Н. И. Черных. Выбор узлов существенно зависит от того, $q\geq p$ или $q<p$.

Рассмотрим сначала более сложный случай $q<p$ и будем считать, что p, q и s не равны ∞. Последний случай требует некоторой модификации рассуждений. Положим $\beta_0=(l-k)sp(s-p)^{-1}$ при $l>k$ и $\beta_0=1+p/s$ при $l=k$. Из (3) следует, что $\beta_0\leq kpq(p-q)^{-1}$ и, кроме того, $s>p$ при $l>k$, а $s\geq p$ при $l=k$. Зафиксируем произвольное число γ_1, удовлетворяющее неравенству

$$(11)\qquad 1<1+\beta_0\leq\gamma_1\leq kpq(p-q)^{-1}+1<\infty.$$

Введем вспомогательную функцию

$$(12)\qquad \psi(x)=\int_0^x|f^{(k)}(t)|^p dt,\quad x\geq 0,$$

и положим $x_0=0$. В качестве точки x_1 выберем наибольший корень уравнения $x^{\gamma_1}=\psi(x)$, если этот корень больше $1/2$, в противном случае положим $x_1=1/2$. Если разность между наибольшим корнем уравнения

$(x-x_1)^{\gamma_1}=\psi(x)-\psi(x_1)$ и x_1 больше $1/3$, то в качестве точки x_2 выберем этот корень. В противном случае положим $x_2=x_1+1/3$. Пусть выбрана точка x_i, тогда за x_{i+1} примем наибольший корень уравнения

$$(x-x_i)^{\gamma_1}=\psi(x)-\psi(x_i), \tag{13}$$

если разность между этим корнем и x_i больше $1/(i+2)$. В противном случае положим $x_{i+1}=x_i+1/(i+2)$ и т. д. Если при некотором i_0 окажется, что $\psi(x_{i_0})=1$, то положим $x_{i_0+1}=\infty$, так как в этом случае соответствующее слагаемое в суммах (9) и (10) равно нулю. Таким образом, отрезки $[x_i,\ x_{i+1}]$ покрывают всю полуось. Кроме того, очевидно, что $x_{i+1}-x_i\leqq 1$, если $f^{(k)}(t)$ не является финитной. Если производная финитна, то аналогичное утверждение справедливо для $i\leqq i_0-1$. Нетрудно также заметить, что всегда выполняется неравенство

$$\psi(x_{i+1})-\psi(x_i)\leqq(x_{i+1}-x_i)^{\gamma_1}. \tag{14}$$

Докажем теперь, что при таком выборе точек $\{x_i\}$ правые части неравенств (9) и (10) не превосходят абсолютных постоянных, не зависящих от функции $f(x)$. Оценивая правую часть неравенства (13), имеем

$$\|f-S_m\|^q_{L_q}\leq C^q(k,\ m)\{\textstyle\sum^{\mathrm{I}}+\sum^{\mathrm{II}}\},$$

где первая сумма распространена на те слагаемые, для которых $x_{i+1}-x_i=1/(i+2)$, а вторая на слагаемые, для которых $x_{i+1}-x_i>1/(i+2)$. Учитывая неравенство (14), имеем

$$\textstyle\sum^{\mathrm{I}}\leqq\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}(i+2)^{-kq+q/p-1-\gamma_1 q/p}\leqq\sum_{i=0}^{\infty}(i+2)^{-2}<1,$$

так как $\gamma_2\geqq 1$ и $k_q\geqq 1$. При оценке второй суммы используется тот факт, что, если i-ый член суммы не равен нулю, то

$$(x_{i+1}-x_i)^{-\gamma_1}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}|f^{(k)}(t)|^p dt=1$$

и $x_{i+1}-x_i\leqq 1$. Таким образом, имеем

$$\textstyle\sum^{\mathrm{II}}\leqq\displaystyle\sup_{\frac{1}{i+2}\leq\Delta x_i\leq 1}\Delta x_i^{kq-q/p+1-\gamma_1(1-q/p)}\left(\Delta x_i^{-\gamma_1}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}|f^{(k)}(t)|^p dt\right)^{q/p-1}\leqq 1,$$

так как в силу (11) $kq-q/p+1-\gamma_1(1-q/p)\geqq 0$.

Аналогично доказывается конечность правой части неравенства (10).

При $q\geqq p$ фиксируем число γ, удовлетворяющее неравенству

$$0<\alpha=kpq(q-p)^{-1}-1\leqq\gamma\leqq\beta,\quad \beta=\begin{cases}(l-k)ps(p-s)^{-1}-1, & s<p,\\ \infty, & s\geqq p.\end{cases} \tag{15}$$

В силу (4) $(l-k)ps(p-s)^{-1}\leqq kpq(q-p)^{-1}$. При $l=k$ неравенство (4) имеет вид $s\geqq p$. Положим опять $s_0=0$ и если точка x_i построена, то в качестве x_{i+1} выбираем корень уравнения $(x-x_i)^{\gamma}[\psi(x)-\psi(x_i)]=1$, где $\psi(x)$ определена равенством (12). Заметим, что этот корень единствен, так как функция $\psi(x)$ возрастает, а функция $(x-x_i)^{-\gamma}$ убывает. Из определения функции $\psi(x)$ и построения точек x_i следует, что $x_{i+1}-x_i \geqq 1$. Отсюда, учитывая, что

$$(x_{i+1}-x_i)^{\gamma}[\psi(x_{i+1})-\psi(x_i)]=1$$

и $\gamma \geqq \alpha > 0$, получаем для правой части неравенства (9) оценку

$$\sum_{i=0}^{\infty} \Delta x_i^{kq-q/p+1} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} |f^{(k)}(t)|^p dt \right)^{q/p-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f^{(k)}(t)|^p dt$$

$$\leq \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \Delta x_i^{\gamma} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f^{(k)}(t)|^p dt \right\}^{q/p-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f^{(k)}(t)|^p dt = \|f^{(k)}\|_{L_p}^p = 1.$$

Аналогично доказывается, что правая часть неравенства (10) не превосходит абсолютной постоянной, не зависящей от $f(x)$.

Если одно из чисел p, q, s равно ∞, то соответствующим образом переписываются неравенства (9) и (10) и в некоторых случаях несколько иначе определяются числа β_0, α, β, а в неравенствах для γ и γ_1 иногда исключается знак равенства. При $p=q=s=\infty$ этот результат фактически доказан в [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. J. N. Ahlberg, E. N. Nilson, J. L. Walsh. The Theory of Spline and Their Applications. New York, 1967.
2. Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных. Порядок наилучших сплайн-приближений некоторых классов функций. *Матем. заметки*, **7** (1970), 31—42.
3. С. Б. Стечкин. Наилучшее приближение линейных операторов. *Матем. заметки*, **1** (1967), 137—148.
4. В. В. Арестов. О наилучшем равномерном приближении операторов дифференцирования. *Матем. заметки*, **5** (1969), 273—284.
5. Ю. Н. Субботин. Поперечник класса W^2L в $L(0, 2\pi)$ и приближение сплайн-функциями. *Матем. заметки*, **7** (1970), 43—52.

Свердловское отделение Мат. института имени В. А. Стеклова, ул. С. Ковалевской 16 Свердловск СССР

Поступило 17 июля 1970