Труды Международной Конференции по конструктивной теории функций Варна, 19—25 мая, 1970

Proceedings of the International Conference on Constructive Function Theory, Varna, May 19—25, 1970

ОДНОСТОРОННИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

В. Чакалов

Резюме. Пусть T — компактное топологическое пространство, а $x_1(t), \dots x_n, (t)$ — действительные непрерывные функции, определенные на T. Обозначим через X пространство всех функций вида $x(t) = a_1x_1(t) + \dots + a_nx_n(t)$, где $a_1, \dots, a_n$ — действительные числа. Пространство X обладает следующими свойствами:

1. Существует такая функция $x_0(t) \in X$, что $x_0(t) > 0$ для всех $t \in T$.

2. Существуют строго позитивные линейные функционалы, определенные на X.

Доказывается следующая теорема: Для любой непрерывной функции $f(t)$ на T существуют функции $x'(t), x''(t) \in X$, удовлетворяющие следующим условиям: а) $x'(t) \leqq f(t) \leqq x''(t)$ для $t \in T$; б) если $X \ni x(t) \geqq 0$ и $x(t) \not\equiv 0$, то существуют $t' \in T$ и $t'' \in T$ такие, что $x'(t') = f(t')$, $x''(t'') = f(t'')$ и $x(t'') > 0$, $x(t'') > 0$.

Пусть T — компактное топологическое пространство, а $x_1, \dots x_n$, действительные непрерывные функции, определенные на T. Обозначим через X линейное пространство всех функций вида

$$x = a_1x_1 + \dots + a_nx_n,$$

где $a_1, \dots, a_n$ — действительные числа. Пространство X обладает следующим свойством.

1. Существует функция $x \in X$ такая, что $x_0(t) > 0$ для $t \in T$.

Теорема 1. Для любого позитивного* линейного функционала l, определенного на пространстве X, существуют n неотрицательных констант $A_1, \dots, A_n$ и n точек (узлов) $t_1, \dots, t_n$ таких, что для каждого $x \in X$ имело место равенство

$$l(x) = A_1x(t_1) + \dots + A_nx(t_n). \tag{1}$$

Доказательство теоремы 1 в случае, когда T удовлетворяет второй аксиоме счетности, можно найти, например, в [1]. В общем случае доказательство проводится аналогичным образом.

Пусть f — непрерывная функция, определенная на T. Обозначим через Y пространство всех линейных комбинаций вида

$$y = a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_{n+1}f,$$

с действительными коэффициентами. Очевидно, $X \subset Y$. Ясно также, что теорема 1 остается справедливой, если заменить X на Y и n на $n+1$.

* Это означает, что из $x(t) \geqq 0$ для $t \in T$ всегда следует неравенство $l(x) \geqq 0$.

Лемма 1. Если l — строго позитивный* линейный функционал, определенный на X, то

а) существует хотя бы одно строго позитивное продолжение функционала l на пространство Y (это продолжение будем обозначать через l_λ, где λ — значение продолжения для функции f);

б) существуют такие действительные числа λ_1 и λ_2, $\lambda_1<\lambda_2$, что если $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$, то функционал

$$(2)\qquad l_\lambda(y)=a_1 l_1+\cdots+a_n l_n+a_{n+1}\lambda, \quad l_i=l(x_i)=l_\lambda(x_i);\ i=1,\ldots,n,$$

строго позитивен на Y, если $\lambda \overline{\in} [\lambda_1, \lambda_2]$, то (2) не является позитивным на Y и, наконец, если $\lambda=\lambda_1$, или $\lambda=\lambda_2$, то (2) нестрого позитивен* на Y.

Доказательство. Чтобы показать существование позитивного продолжения функционала l на Y, достатъчно применить теорему 1 и определить продолжение следующим образом

$$l_\lambda(y)=A_1 y(t_1)+\cdots+A_n y(t_n),$$

где, очевидно,

$$\lambda=A_1 f(t_1)+\cdots+A_n f(t_n).$$

Далее мы покажем существование хотя бы двух различных позитивных продолжений $l_{\lambda'}$, $l_{\lambda''}$, $\lambda'\neq\lambda''$. Действительно, в противном случае (если l_λ — единственное позитивное продолжение), для любого $\varepsilon\neq 0$ функционал

$$(3)\qquad l_{\lambda+\varepsilon}(y)=a_1 l_1+\cdots+a_n l_n+a_{n+1}(\lambda+\varepsilon)$$

уже не будет позитивным. Тогда можно найти функцию

$$(4)\qquad y_\varepsilon=a_1^\varepsilon x_1+\cdots+a_n^\varepsilon x_n+a_{n+1}^\varepsilon f$$

так, что $y_\varepsilon(t)\geqq 0$, $t\in T$, $y_\varepsilon(t)\not\equiv 0$ и

$$(5)\qquad l_{\lambda+\varepsilon}(y_\varepsilon)=a_1^\varepsilon l_1+\cdots+a_n^\varepsilon l_n+a_{n+1}^\varepsilon(\lambda+\varepsilon)<0.$$

Не нарушая общности, можно предположить, что $\sum_{i=1}^{n}|a_i^\varepsilon|=1$. Из (5) сразу следует, что $\varepsilon a_{n+1}^\varepsilon<0$. Положив $\varepsilon\to+0$ и беря сходящуюся последовательность $\{y_{\varepsilon_s}\}_{s=1}^\infty$ функций вида (4), получим предельную функцию

$$y'=a_1' x_1+\cdots+a_n' x_n+a_{n+1}' f,$$

удовлетворяющую условиям $y'(t)\geqq 0$ для $t\in$ T, $y'(t)\not\equiv 0$ и $a_{n+1}'\leqq 0$. Предельный переход в (5) дает нам неравенство

$$(6)\qquad l_\lambda(y')=a_1' l_1+\cdots+a_n' l_n+a_{n+1}'\lambda\leqq 0.$$

Ввиду позитивности функционала l_λ, в (6) имеет место знак $=$. Кроме того, $a_{n+1}'<0$, так как в противном случае из равенства $a_{n+1}'=0$ и (6) следует нестрогая позитивность функционала l на X.

* Линейный функционал l называется строго позитивным, если из $x(t)\geqq 0$ для $t\in T$ и $x(t)\not\equiv 0$ следует наравенство $l(x)>0$. Всякий линейный позитивный функционал, не являющийся строго позитивным, будем называть нестрого позитивным.

Аналогично доказывается (при $\varepsilon \to -0$) существование функции $y'' \in Y$, для которой $y''(t) \geqq 0$ для $t \in T$, $y''(t) \not\equiv 0$ и $a''_{n+1} > 0$, а также

$$(7) \qquad l_\lambda(y'') = a''_1 l_1 + \cdots + a''_n l_n + a''_{n+1}\lambda = 0.$$

Выбирая положительные числа p и q так, что

$$pa'_{n+1} + qa''_{n+1} = 0,$$

положим

$$x^* = py' + qy'' = (pa'_1 + qa''_1)x_1 + \cdots + (pa'_n + qa''_n)x_n \in X.$$

Легко видеть, что $x^*(t) \geqq 0$ для $t \in T$, $x^*(t) \not\equiv 0$ и $l(x^*) = l_\lambda(x^*) = pl_\lambda(y') + ql_\lambda(y'') = 0$, что противоречит строгой позитивности функционала l на X. Полученное противоречие доказывает существование λ' и λ'', $\lambda' \neq \lambda''$, для которых продолжения $l_{\lambda'}$ и $l_{\lambda''}$ — позитивные.

Далее мы покажем, что если $\lambda \in (\lambda', \lambda'')$, то l_λ — строго позитивное продолжение функционала l на Y. Действительно в противном случае следует существование функции $y^* \in Y$, для которой $y^*(t) \not\equiv 0$, $y^*(t) \geqq 0$ для $t \in T$ и

$$(8) \qquad l_\lambda(y^*) = a^*_1 l_1 + \cdots + a^*_n l_n + a^*_{n+1}\lambda \leqq 0.$$

Ввиду $\lambda \in (\lambda', \lambda'')$ мы имеем $\lambda = p\lambda' + q\lambda''$, где $p, q > 0$, $p + q = 1$, так, что (8) можно написать в виде

$$(9) \qquad l_\lambda(y^*) = a^*_1(pl_1 + ql_1) + \cdots + a^*_n(pl_n + ql_n) + a^*_{n+1}(p\lambda' + q\lambda'')$$

$$= pl_{\lambda'}(y^*) + ql_{\lambda''}(y^*).$$

С другой стороны, ввиду позитивности функционалов $l_{\lambda'}$ и $l_{\lambda''}$ и положительности чисел p и q, мы имеем

$$pl_{\lambda'}(y^*) + ql_{\lambda''}(y^*) \geqq 0,$$

что вместе с (9) дает равенства $l_{\lambda'}(y^*) = l_{\lambda''}(y^*) = 0$ или

$$(10) \qquad a^*_{n+1}\lambda' = a^*_{n+1}\lambda''.$$

Но $a^*_{n+1} \neq 0$, так как в противном случае $y^* \in X$, $y^*(t) \geqq 0$ для $t \in T$, $y^*(t) \not\equiv 0$ и $l_\lambda(y^*) = 0$, что противоречит строгой позитивности функционала l_λ на X.

Из (10) и $a^*_{n+1} \neq 0$ следует невозможное равенство $\lambda' = \lambda''$. Полученное противоречие доказывает строгую позитивность функционала l_λ на Y.

Легко видеть, что для всех достаточно больших значений λ функционал l_λ уже не позитивен. Чтобы доказать этот факт, рассмотрим функцию

$$y = ax_0 - f,$$

где $x_0 \in X$ и $x_0(t) > 0$ для всех $t \in T$ и a — такое положительное число, что $y(t) > 0$ для $t \in T$ (существование a следует из непрерывности функций x_0 и f и компактности множества T). Ясно, что для всех достаточно больших положительных значений λ значение функционала

$$l_\lambda(y) = al_\lambda(x_1) - \lambda$$

отрицательно, т. е. l_λ — уже не позитивен. Тоже самое можно показать и для всех достаточно больших отрицательных λ.

Обозначим через λ_1 и λ_2 нижнюю и верхнюю грани всех значений λ, для которых l_λ — позитивен. Очевидно, l_{λ_1} и l_{λ_2} — нестрого позитивные функционалы. Отсюда и из доказанного выше нетрудно заключить, что если $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$, то l_λ — строго позитивен, а если $\lambda \bar{\in} [\lambda_1, \lambda_2]$, то l_λ не является позитивным. На этом заканчивается и доказательство леммы 1.

З а м е ч а н и е. Определенные выше нестрого позитивные на Y функционалы l_{λ_1} и l_{λ_2} будем называть соответственно нижним и верхним продолжением функционала l. Согласно теореме 1, l_{λ_1} и l_{λ_2} допускают представления вида

(11) $l_{\lambda_1}(y)=A_1 y(t_1)+\cdots+A_2 y(t_r),\ 1\leq r\leq n+1,\ A_i>0,\ t_i\in T,\ i=1,\ldots,r,$

(12) $l_{\lambda_2}(y)=B_1 y(t^1)+\cdots+B_s y(t^s),\ 1\leq s\leq n+1,\ B_i>0,\ t^i\in T,\ i=1,\ldots,s.$

Лемма 2. Пусть l — строго позитивный линейный функционал, определенный на X, а l_{λ_1} и l_{λ_2} — соответственно его нижнее и верхнее продолжение на Y. Для любого представления l_{λ_1} и l_{λ_2} вида (11) и (12) существуют функции x', $x''\in X$, для которых имеют место соотношения

$$x'(t)\leq f(t)\leq x''(t) \text{ для } t\in T;$$

$$x'(t_i)=f(t_i),\ i=1,\ldots,r;\ f(t^i)=x''(t^i),\ i=1,\ldots,s.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функционал

$$l_{\lambda_1}(y)=a_1 l_1+\cdots+a_n l_n+a_{n+1}\lambda.$$

Так как l_{λ_1} — нижнее продолжение l на X, то для любого $\varepsilon>0$ функционал

(13) $$l_{\lambda_1-\varepsilon}(y)=a_1 l_1+\cdots+a_n l_n+a_{n+1}(\lambda_1-\varepsilon)$$

уже не позитивен, следовательно, существует функция $y_\varepsilon\in Y$, $y_\varepsilon(t)\not\equiv 0$, $y_\varepsilon(t)\geqq 0$ (не нарушая общности, можно предполагать, что коэффициенты этой функции удовлетворяют условием $\sum_{i=1}^{n+1}|a_i^\varepsilon|=1$) так, что

(13) $$l_{\lambda_1-\varepsilon}(y_\varepsilon)=a_1^\varepsilon l_1+\cdots+a_n^\varepsilon l_n+a_{n+1}^\varepsilon(\lambda_1-\varepsilon)<0.$$

Здесь, как и выше, доказывается, что $-\varepsilon a_{n+1}^\varepsilon<0$. Положив $\varepsilon\to+0$ и выбрав последовательность функций $\{y_{\varepsilon s}\}_{s=1}^{\infty}$ сходящуюся к $y_\prime\in Y$, мы получим, что предельная функция y' удовлетворяет условиям $y'(t)\geqq 0$ для $t\in T$, $y'(t)\not\equiv 0$. Из (13) получим (при $\varepsilon\to+0$) неравенство

$$l_{\lambda_1}(y')=a_1' l_1+\cdots+a_n' l_n+a_{n+1}'\lambda\leq 0.$$

Так как l_{λ_1} — позитивный функционал, а $y'(t)\geqq 0$ для $t\in T$, то

$$l_{\lambda_1}(y')=0.$$

Очевидно, $a'_{n+1} \geq 0$. Но знак $=$ невозможен ввиду строгой позитивности l_λ на X. Итак, $a'_{n+1} > 0$. Из (11) видно, что $y'(t_i) = 0$ для $i = 1, \ldots, r$. Из $y'(t) \geq 0$ для $t \in T$ и $a'_{n+1} > 0$ следует, что функция

$$x' = -\frac{a'_1}{a'_{n+1}} x_1 - \cdots - \frac{a'_n}{a'_{n+1}} x_n$$

удовлетворяет условиям $x'(t) \leq f(t)$ для $t \in T$ и $x'(t_i) = f(t_i)$, $i = 1, \ldots, r$, где t_i, $i = 1, \ldots, r$ — узлы представления (11).

Аналогичным образом доказывается существование такой функции $x'' \in X$, что $f(t) \leq x''(t)$ для $t \in T$ и $x''(t^i) = f(t^i)$, $i = 1, \ldots, s$, где t^i, $i = 1, \ldots, s$, — узлы представления (12). На этом заканчивается доказательство леммы 2.

Теорема 2. Если пространства T и X удовлетворяют условиям (A) и если существует хотя бы один линейный строго позитивный функционал l, определенный на X, то для любой непрерывной на T функции f существуют такие функции x', $x'' \in X$, что

а) $x'(t) \leq f(t) \leq x''(t)$ для $t \in T$;

б) если $x \in X$ — любая неотрицательная функция и если из равенства $x'(t_0) = f(t_0)$ $(x''(t_0) = f(t_0))$ всегда следует равенство $x(t_0) = 0$, то $x(t) \equiv 0$.

Доказательство. Чтобы доказать теорему, достаточно заметить что если $x \in X$, $x(t) \geq 0$ для $t \in T$ и $x(t_i) = 0$ для каждого узла представления (11) (соотв. (12)) функционала l_{λ_1} (l_{λ_2}), то $x(t) \equiv 0$. Этот факт сразу вытекает из строгой позитивности l_{λ_1} (l_{λ_2}) на X. Имея в виду сказанное выше, остается применить лемму 2.

Наконец, сформулируем без доказательства следующее простое следствие теоремы 2.

Следствие. Если T — компактное множество точек $t(u, v)$ действительной плоскости, содержащее внутренние точки, а X — пространство действительных многочленов $x(u, v)$ степени не выше k, то для любой непрерывной функции $f(u, v)$ на T существуют многочлены $x'(u, v)$, $x''(u, v)$ такие, что

а') $x'(u, v) \leq f(u, v) \leq x''(u, v)$ для $(u, v) \in T$;

б') знак $=$ достигается в каждом из неравенств а') для точек, число которых не меньше чем $\frac{1}{2}\left(\left[\frac{k}{2}\right]+1\right)\left(\left[\frac{k}{2}\right]+2\right)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Vl. Tchakaloff. Formules de cubatures mécaniques à coefficients non négatifs *Bull. des sci. math.*, 2e *série*, 81 (1957), 123—134.

Математический институт с Вычислительным центром БАН
София Болгария

Поступило 20 июня 1970