Труды Международной Конференции по конструктивной теории функций Варна, 19—25 мая, 1970

Proceedings of the International Conference on Constructive Function Theory, Varna, May 19—25, 1970

О СХОДИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Ю. А. Шашкин

Резюме. Дается краткий обзор некоторых результатов по проблеме сходимости линейных операторов в пространстве $C(X)$ непрерывных функций. Рассматривается главным образом вопрос о том, при каких условиях сходимость операторов на всем пространстве $C(X)$ следует из их сходимости на некотором конечном множестве функций (K-системе) из $C(X)$ или на некотором его подпространстве G (K-пространстве). Указывается на аналогию между задачей типа Коровкина о сходимости операторов и задачей типа Вейерштрасса — Стоуна о плотности в алгебре $C(X)$ некоторой ее подалгебры G.

1. Пусть X — компактное хаусдорфовое топологическое пространство (компакт); $C(X)$ — линейное пространство (или алгебра) вещественных или комплексных непрерывных функций на X с обычной нормой; $C^*(X)$ — сопряженное пространство линейных функционалов или мер Радона на X; $K(X)$ — конус неотрицательных непрерывных на X функций; $K^*(X)$ — двойственный конус неотрицательных мер Радона; G — линейное подпространство в $C(X)$, не обязательно замкнутое, но наследующее при необходимости структуру алгебры; G^* — сопряженное пространство; в дальнейшем всюду, кроме пункта 5, предполагается, что подпространство G содержит константы.

Сформулируем теперь задачи типа Коровкина о сходимости операторов, притом так, чтобы была видна их аналогия с задачами типа Вейерштраса — Стоуна. Именно, пусть $\mathfrak{M}$ — некоторый класс линейных операторов $A: C(X) \to C(X)$. С помощью этого класса определим „$\mathfrak{M}$-замыкание" $\widehat{G}_{\mathfrak{M}} = \widehat{G}$ подпространства G в $C(X)$ следующим образом. Мы скажем, что функция $f(x)$ из $C(X)$ принадлежит $\widehat{G}$, если для любой последовательности операторов A_n, $n=1, 2, \ldots$, класса $\mathfrak{M}$ из сходимости $\|A_n g - g\| \to 0$ для всех $g(x) \in G$ следует сходимость $\|A_n f - f\| \to 0$. Так определенное „замыкание" $\widehat{G}$ является линейным подпространством в $C(X)$, замкнутым в сильной (метрической) топологии этого пространства.

В терминах „$\mathfrak{M}$-замыкания" интересующие нас задачи получают следующие формулировки.

(А) Задан класс операторов $\mathfrak{M}$; найти условия на подпространство G, необходимые и достаточные для того, чтобы

$$\widehat{G} = C(X).$$

(Б) Если это равенство не выполнено, описать непрерывные функции на X, входящие в „замыкание" $\widehat{G}$.

Пространство G, совпадающее со своим $\mathfrak{M}$-замыканием, мы будем иногда называть K-пространством в $C(X)$.

Заменяя здесь подпространство G подалгеброй, а $\mathfrak{M}$-замыкание — обычным замыканием в метрике $C(X)$, мы приходим к задачам (А) и (Б) типа Вейерштрасса — Стоуна.

К настоящему времени задачи типа Коровкина изучались для следующих классов линейных операторов: положительных, нерастягивающих [3] (или, общее, оставляющих инвариантным некоторое выпуклое множество), мультипликативных [4], класса S_m в смысле Коровкина [5], [6]. Остается открытым вопрос о полной характеристике классов линейных операторов, для которых имеет смысл рассматривать сформулированные задачи, или, точнее говоря, для которых при $G \neq C(X)$ возможно равенство $\widehat{G} = C(X)$. По-видимому, всякий такой класс операторов должен быть полугруппой (разумеется, отличной от полугруппы всех линейных операторов, действующих в пространстве $C(X)$).

Отметим здесь еще статьи В. С. Климова, М. А. Красносельского и Е. А. Лифшица [7], [8] и Д. Вулберта [9], в которых задача (А) рассматривается в более общей постановке.

Дальнейшее изложение касается только классов положительных и нерастягивающих операторов в пространстве $C(X)$. Решение задачи (A) для этих классов будет приведено в аналитической форме через так называемые связи в пространстве G и в двух геометрических, двойственных между собой, формах. Применительно к случаю положительных операторов первая геометрическая форма решения дает условия равенства $\widehat{G} = C(X)$ в терминах взаимного расположения в пространстве $C(X)$ конуса $K(X)$ и подпространства G, а вторая — в терминах канонического отображения компакта X в сопряженное пространство G^*.

Каноническое отображение $\Psi\colon X \to C^*(X)$ определяется тем, что каждой точке $x_0 \in X$ ставится в соответствие функционал $\varphi \in C^*(X)$, равный для всех $f(x) \in C(x)$ значению функции $f(x)$ в точке x_0. Каноническое отображение $\Phi : X \to G^*$ определяется как суперпозиция отображения Ψ и оператора сужения $R : C^*(X) \to G^*$. В частности, если G — конечномерное пространство с базисом $g_0(x) = 1, g_1(x), \ldots, g_n(x)$ или алгебра с конечной системой образующих $g_1(x), \ldots, g_n(x)$, от Φ можно определить равенство $\Phi(x_0) = (g_1(x_0), \ldots, g_n(x_0))$ для всех $x_0 \in X$.

2. Для сравнения с теоремами о сходимости операторов мы приводим в этом пункте некоторые наиболее известные теоремы типа Вейерштрасса — Стоуна.

Пусть сначала $C(X)$ — вещественное пространство и G имеет структуру алгебры.

Теорема 2.1 (М. Стоун [10]). Для равенства $\overline{G} = C(X)$ необходимо и достаточно, чтобы в G не было элементарных связей.

Мы говорим, что в G имеется элементарная связь, если существуют такие различные точки x_1 и x_2 компакта X, что $g(x_1) = g(x_2)$ для всех $g(x) \in G$.

Теорема 2.1 имеет „аналитическую“ форму. Ее геометрическим эквивалентом является

Теорема 2.2. Для равенства $\overline{G}=C(X)$ необходимо и достаточно, чтобы каноническое отображение $\Phi\colon X\to G^*$ было гомеоморфизмом.

Отсюда, в частности, следует, что если плотная в $C(X)$ алгебра G имеет конечное число n образующих, то компакт X метризуем и имеет конечную размерность $\dim X\leq n$.

Решение задачи (Б) для вещественной алгебры G дается следующими двумя утверждениями, записанными соответственно в аналитической и геометрической формах.

Теорема 2.3. Для любой алгебры G замыкание $\overline{G}$ состоит из всех непрерывных на X функций, каждая из которых удовлетворяет всем имеющимся в G элементарным связям.

Теорема 2.4. Для любой алгебры G замыкание $\overline{G}$ эквивалентно пространству $C(\widetilde{X})$ функций, непрерывных на образе $\widetilde{X}$ компакта X при каноническом отображении Φ.

Заметим, что теоремы 2.1—2.4 справедливы не только для алгебр, но и для решеток G; см. по этому поводу работы С. Какутани [11] и М. Г. Крейна и С. Г. Крейна [12]. Кроме того, здесь уместно заметить, что замыкание $\overline{G}$ алгебры G совпадает с ее „замыканием“ $\widehat{G}_{\mathfrak{m}}$ относительно класса мультипликативных операторов; таким образом, для равенства $\widehat{G}_{\mathfrak{m}}=C(X)$ необходимо и достаточно отсутствие в G элементарных связей (см. [4]).

Переходя к комплексному пространству $C(X)$, ограничимся случаем, когда алгебра G имеет одну образующую, то есть является множеством полиномов от одного комплексного переменного. В соответствии с этим мы предполагаем, что компакт X лежит на плоскости и не разбивает ее.

Решение задачи (А) для этого случая дается, как известно, следующей теоремой.

Теорема 2.5 (М. А. Лаврентьев [13]). Для равенства $\overline{G}=C(X)$ необходимо и достаточно, чтобы компакт X совпадал со своей (топологической) границей относительно плоскости.

Эта теорема имеет геометрическую форму. В „аналитической“ форме условие М. А. Лаврентьева эквивалентно требованию, чтобы алгебра G не имела на компакте X „связей“, выражаемых, например, интегральной формулой Коши.

Решение задачи (Б) дано, как известно, С. Н. Мергеляном.

Теорема 2.6 (С. Н. Мергелян [14]). Для любого компакта X, не разбивающего плоскость, замыкание $\overline{G}$ алгебры G состоит из всех функций, непрерывных на X и аналитических во всех его внутренних точках.

Иными словами, $\overline{G}$ состоит из всех функций, непрерывных на X и имеющих там те же „связи“, что и все функции из G.

3. Всюду в дальнейшем X — метризуемый компакт, $C(X)$ — вещественное пространство и G — линейное подпространство в $C(X)$, не имеющее элементарных связей. В этом пункте мы рассмотрим задачу (А) о сходимости положительных операторов. Впервые условия равенства $\overline{G}=C(X)$ были даны для случая, когда X — отрезок или окружность. Они имеют следующий вид.

Теорема 3.1 (П. П. Коровкин [1], [2]). Пусть G — трехмерное пространство с базисом $S=\{g_0(x), g_1(x), g_2(x)\}$. Для равенства $\widehat{G}=C(X)$ необходимо и достаточно, чтобы система функций S была чебышевской.

Позднее было выяснено (см. [15]), что для любого компакта X, содержащего более трех точек и отличного от отрезка и окружности, теорема 3.1 перестает быть верной; точнее говоря, если компакт X не гомеоморфен окружности или ее подмножеству, то, как известно, на нем вообще не существует нетривиальных чебышевских систем; если же X содержит более трех точек, вкладывается в окружность и несвязен, то на нем существует чебышевская система функций $S=\{g_0(x), g_1(x), g_2(x)\}$, которая не является K-системой.

Теорема 3.2 (Ю. А. Шашкин [16]). Для равенства $\widehat{G}=C(X)$ необходимо и достаточно каждое из следующих условий:

а) компакт X совпадает со своей границей Шоке относительно подпространства G (см. [17]);

б) подпространство G не имеет положительных связей.

Мы говорим, что в G имеется положительная связь, если на компакте X существует такая положительная мера Радона μ с носителем, отличным от точки x_0, что

$$g(x_0)=\int g(x)d\mu$$

для всех $g(x)\in G$.

Для формулировки геометрического аналога теоремы 3.2 обозначим через $K_R^*(X)$ образ конуса $K^*(X)$ при естественном отображении (сужении) $R\colon C^*(X)\to G^*$.

Теорема 3.3 (Ю. А. Шашкин [15]). Для равенства $\widehat{G}=C(X)$ необходимо и достаточно каждое из следующих условий:

а) каноническое отображение $\Phi\colon X\to\widetilde{X}$ в сопряженное пространство G^* гомеоморфно и каждая точка компакта $\widetilde{X}$ является экстремальной точкой его выпуклой оболочки;

б) оператор сужения $R\colon C^*(X)\to G^*$ отображает множество экстремальных лучей конуса $K^*(X)$ взаимно однозначно на множество экстремальных лучей конуса $K_R^*(X)$.

Отсюда, в частности, следует, что если G — n-мерное K-пространство в $C(X)$, то компакт X имеет размерность $\dim X\leq n-2$; подробнее зависимость между топологическими свойствами X и минимальной размерностью K-пространств в $C(X)$ была рассмотрена в работах [15] и [18].

Приведем теперь геометрический эквивалент теоремы 3.2 в терминах взаимного расположения в пространстве $C(X)$ подпространства G и конуса $K(X)$. В близкой форме (через понятие насыщения подпространства G точками гладкости конуса $K(X)$) достаточные условия равенства $\widehat{G}=C(X)$ были впервые даны (в более общей ситуации) В. С. Климовым, М. А. Красносельским и Е. А. Лифшицем [7]. Мы ограничимся здесь частным случаем конечномерного пространства.

Теорема 3.4. Пусть компакт X состоит из конечного числа m точек. Для равенства $\widehat{G}=C(X)$ необходимо и достаточно, чтобы пространство $\widehat{G}$ проходило через внутреннюю точку каждой $(m-1)$ -мерной грани конуса $K(X)$.

Геометрическое условие теоремы 3.4 есть не что иное, как условие пика, состоящее в том, что для каждой точки $x_0 \in X$ существует функция $g(x) \in G$, равная нулю в точке x_0 и положительная в остальных точках компакта X. Таким образом, теорема 3.4 показывает, что в случае конечномерного пространства $C(X)$ условие пика необходимо и достаточно для равенства $\widehat{G} = C(X)$. Как известно, в общем случае это условие лишь достаточно для указанного равенства, но, вообще говоря, не является необходимым.

4. В этом пункте дается описание „замыкания" $\widehat{G}$ пространства G относительно класса положительных операторов; приводимые здесь результаты получены независимо друг от друга В. А. Баскаковым [19] и Г. Бауэром в статье [20], посвященной абстрактной задаче Дирихле. Фиксируя точку $x_0 \in X$, обозначим через $M(x_0)$ множество всех положительных мер Радона μ, для которых выполнено равенство

$$g(x_0) = \int g(x)\,d\mu,\quad g(x) \in G.$$

Далее, пусть $f(x) \in C(X)$ и

$$f^*(x_0) = \inf\{g(x_0):\ g(x) \in G,\ g(x) \geqq f(x) \text{ на } X\},$$

$$f_*(x_0) = \sup\{g(x_0):\ g(x) \in G,\ g(x) \leqq f(x) \text{ на } X\}.$$

Теорема 4.1 (В. А. Баскаков; Г. Бауэр). Непрерывная функция $f(x)$ в том и только том случае принадлежит „замыканию" $\widehat{G}$ пространства G, когда выполнено любое из следующих эквивалентных между собой условий:

а) для всех точек $x \in X$ и всех мер Радона $\mu \in M(x)$

$$f(x) = \int f\,d\mu;$$

б) для всех $x \in X$

$$f(x) = f^*(x) = f^*(x);$$

в) для любого $\varepsilon > 0$ в пространстве G существуют функции $g_1, \ldots, g_m$ и $h_1, \ldots, h_n$ такие, что для верхней огибающей

$$g = \max\{g_1, \ldots, g_m\}$$

и нижней огибающей

$$h = \min\{h_1, \ldots, h_n\}$$

выполнены неравенства $g \leqq f \leqq h$ и $h - g \leqq \varepsilon$.

Условие а) этой теоремы показывает, что $\widehat{G}$ состоит из всех непрерывных функций, имеющих те же положительные связи, которые существуют в G.

Следующее предложение дает достаточное условие для совпадения „замыкания" $\widehat{G}$ с обычным замыканием.

Теорема 4.3 (Г. Бауэр [20]). Если G — решетка, то

$$\widehat{G} = \overline{G}.$$

5. Приведенные в пункте 3 результаты о задаче (A) сохраняются со соответствующими изменениями для класса операторов, норма которых не превосходит единицы. Такие операторы называются иногда нерастягивающими.

Назовем нерастягивающей связью в G соотношение

$$g(x_0)=\int g(x)\,d\mu,\ g(x)\in G,$$

где мера Радона μ имеет носитель, отличный от точки x_0, и полную вариацию, не большую единицы. В следующих теоремах $\widehat{G}$ обозначает „замыкание" G относительно класса нерастягивающих операторов.

Теорема 5.1. Для равенства $\widehat{G}=C(X)$ необходимо и достаточно, чтобы пространство G не имело нерастягивающих связей.

Теорема 5.2 (В. С. Рублев [21], Ю. А. Шашкин [22]). Для равенства $\widehat{G}=C(X)$ необходимо и достатъчна совокупность трех условий:

а) каноническое отображение $\Phi\colon X\to\widetilde{X}$ в сопряженное пространство G^* гомеоморфно;

б) пересечение $\widetilde{X}\bigcap(-\widetilde{X})$ пусто;

в) каждая точка множества $\widetilde{X}\bigcap(-\widetilde{X})$ является экстремальной точкой его выпуклой оболочки.

Теорема 5.3. Пусть компакт X состоит из конечного числа m точек. Для равенства $\widehat{G}=C(X)$ необходимо и достаточно, чтобы пространство G проходило через внутреннюю точку каждой $(m-1)$-мерной грани m-мерного куба (единичного шара в $C(X)$).

Как и в случае положительных операторов, условие пика теоремы 5.3 является необходимым и достаточным только для конечномерного пространства $C(X)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. П. Коровкин. О сходимости линейных положительных операторов в пространстве непрерывных функций. *Доклады АН СССР*, **90** (1953), 961—964.
2. П. П. Коровкин. Линейные операторы и теория приближений. Москва, 1959.
3. В. И. Андреев. Об операторе тождественного преобразования в пространстве $C[0,1]$. *Уч. зап. Калинингр. Гос. пед. ин та*, **52** (1967), 1—8.
4. В. И. Волков. Условия сходимости последовательностей линейных мультипликативных операторов. *Уч. зап. Калинингр. Гос. пед. ин-та*, **52** (1967), 32—41.
5. П. П. Коровкин. Сходящиеся последовательности линейных операторов. *Успехи матем. наук*, **17** (1962), 147—152.
6. Р. М. Минькова, Ю. А. Шашкин. О сходимости линейных операторов класса S_m. *Мстем. заметки*, **6** (1969), 591—598.
7. В. С. Климов, М. А. Красносельский, Е. А. Лифшиц. Точки гладкости конуса и сходимость положительных функционалов и операторов. *Труды Моск. матем. о-ва*, **15** (1966), 55—69.
8. М. А. Красносельский, Е. А. Лифшиц. Принцип сходимости последовательностей линейных положительных операторов. *Studia Math.*, **31** (1968), 455—468.
9. D. E. Wulbert. Convergence of operators and Korovkin's theorem. *J. Approx. Theory*, **1** (1968), 381—390.
10. M. H. Stone. Applications of the theory of Bcolean rings to general topology. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **41** (1937), 375—481.
11. S. Kakutani. Concrete representation of abstract (M)-spaces. *Ann. Math.*, **42** (1941), 994—1024.

12. М. Г. Крейн, С. Г. Крейн. О пространстве непрерывных функций, определенных на бикомпакте, и его полуупорядоченных подпространствах. *Матем. сборник*, **13** (1943), 1—38.
13. M. A. Lavrentiev. Sur les fonctions d'une variable complexe représentables par des séries de polynomes. Paris, 1936.
14. С. Н. Мергелян. Равномерное приближение функций комплексного переменного. *Успехи матем. наук*, **7** (1952), 31—122.
15. Ю. А. Шашкин. Системы Коровкина в пространствах непрерывных функций. *Известия АН СССР*, Сер. матем., **26** (1962), 495—512.
16. Ю. А. Шашкин. Граница Мильмана — Шоке и теория приближений. *Функц. анализ и его прилож.*, **1** (1967), 95—96.
17. Р. Фелпс. Лекции о теоремах Шоке. Москва, 1968.
18. Ю. А. Шашкин. Топологические свойства множеств, связанные с теорией приближения функций. *Известия АН СССР*. Сер. матем., **29** (1965), № 5, 1085—1094.
19. В. А. Баскаков. О некоторых условиях сходимости линейных положительных операторов. *Успехи матем. наук*, **16** (1961) 131—134.
20. H. Bauer. Šilovscher Rand und Dirichletsches Problem. *Ann. Inst. Fourier*, **11** (1961), 89—136.
21. В. С. Рублев. О некоторых классах подпространств нормированного пространства. Диссертация, Воронеж, 1969.
22. Ю. А. Шашкин. О сходимости нерастягивающих операторов. *Mathematica*, **11** (1969), 355—360.

Свердловское отделение
Математического института АН СССР
Свердловск СССР

Поступило 20 мая 1970