Труды Международной Конференции
по конструктивной теории функций
Варна, 19—25 мая, 1970

Proceedings of the International
Conference on Constructive Function
Theory, Varna, May 19—25, 1970

SUR LES SÉRIES DE FOURIER À CERTAINE PUISSANCE ABSOLUMENT CONVERGENTES

L. Alpar

Résumé. Soient t une variable réelle et A^r, $r>0$, $A^1=A$, l'ensemble des fonctions $f(t)\sim\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu \exp(i\nu t)$, avec $\|f\|_r=\left(\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}|a_\nu|^r\right)^{1/r}<\infty$. On suppose de plus que $f(t)$ est bornée et l'on pose $Mf=\max_t|f(t)|$. A. Beuring a prouvé que $\lim_{n\to\infty}\|f^n\|_1^{1/n}=Mf$. On démontre un théorème analogue pour les $f\in A^r$, avec $0<r<1$ et un autre pour certaines $f\in A^r$, avec $1<r\leq 2$.

1. Notations. Soit t une variable réelle et A^r, $r>0$, $A^1=A$, l'ensemble des fonctions

$$(1.1)\qquad g(t)\sim\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} b_\nu e^{i\nu t},\qquad \text{avec } \|g\|_r=\left(\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}|b_\nu|^r\right)^{1/r}<\infty.$$

$\|\cdot\|_r$ est une norme au sens habituel, si $r\geq 1$. Ce n'est pas le cas lorsque $0<r<1$. En effet, pour $0<r<1$, $\|g\|_r=0$ si, et seulement si $g\equiv 0$; $\|cg\|_r=|c|.\|g\|_r$ où c est une constante; mais $\|\cdot\|_r$ ne vérifie pas généralement l'inégalité du triangle. Néanmoins, on a, dans ce cas, inégalité $\|g+h\|_r^r\leq\|g\|_r^r+\|h\|_r^r$.

Les fonctions de t que nous allons considérer sont toujours 2π-périodiques.

Notons par B l'ensemble des fonctions bornées et par C celui des fonctions continues. Posons, pour $g\in B$.

$$Mg=\text{vrai}\max_t|g(t)|.$$

Rappelons enfin que, si $f(t)\in L$,

$$\omega_1(\delta)=\omega_1(\delta;f)=\sup_{0\leq h\leq\delta}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t+h)-f(t)|dt$$

est le module de continuité intégrale de f dans L. Si $\omega_1(\delta)=O(\delta^\alpha)$, $0<\alpha\leq 1$, $\delta\to+0$, nous disons avec Zygmund que f appartient à la classe de fonctions Λ_α^1. Si

$g \in \Lambda^1_\alpha$ (g étant donnée sous (1.1)), on a $b_\nu = O(|\nu|^{-\alpha})$ ([8], 1, p. 46). Il en résulte que $\Lambda^1_\alpha < A^r$ pourvu que $r^{-1} < \alpha \leq 1$.

2. Introduction. La généralisation du résultat ci-après de A. Beurling [2] fait l'objet de la note présente.

Théorème A. Si $f \in A \cap C$ alors

$$\lim_{n\to\infty} \| f^n \|_1^{1/n} = Mf. \tag{1.2}$$

En s'appuyant sur ce fait, on peut montrer aux moyens de l'analyse fonctionnelle la proposition suivante, bien connue, de N. Wiener [5] (voir aussi [4], pp. 416—420): Si $f(t) \neq 0$ et $f \in A \cap C$, alors $f^{-1} \in A$. La méthode de l'analyse fonctionnelle conduit également à une généralisation de ce théorème ([4], p. 423), qui a été établie pour la première fois par P. Lévy [3] à l'aide d'un raisonnement classique.

Cependant, on peut suivre aussi une voie inverse, comme le fait Zygmund ([8], I, pp. 245—247): démontrer d'abord le théorème de Wiener et de Lévy et d'en déduire ensuite celui de Beurling tout en utilisant les moyens de l'analyse classique. Nous allons procéder nous aussi de cette façon pour généraliser le théorème A, puisque nous avons déjà obtenu le résultat ci-dessous ([1], théorème 1).

Théorème B. (i) Si $f \in C \cap A^r$, $0 < r \leq 1$, et si les valeurs (en général complexes) de $f(t) = z$ se trouvent sur une courbe Γ en chaque point de laquelle une fonction $F(z)$ à variable complexe est analytique (non nécessairement uniforme) telle que $F(z)$ revienne à sa détermination initiale après un parcours complet de Γ correspondant à une variation de 2π de t, alors $F(f) \in A^r$.

(ii) Si, en particulier, $f(t) \neq 0$ et $f \in A^r \cap C$, alors $f^{-1} \in A^r$.

Pour $r = 1$, (i) se réduit au théorème de Lévy et (ii) à celui de Wiener.

La même proposition a été trouvée par W. Żelazko [7]. Sa démonstration utilise un de ses résultats antérieurs [6] qui est en quelque sorte un analogue généralisé du théorème A. Il emploie dans les notes [6] et [7] les moyens d'une algèbre de Banach généralisée.

Nous avons obtenu de plus un certain résultat, paire du théorème B, pour $r > 1$ ([1], théorème 3). Pour énoncer cette proposition, désignons par $\Lambda_1(E)$ la classe de fonctions à variable complexe z qui, sur l'ensemble E du plan des z, remplissent une condition de Lipschitz d'ordre 1. Nous disons donc que $F \in \Lambda_1(E)$ si, pour chaque couple de points $z_1, z_2 \in E$, on a $|F(z_1) - F(z_2)| \leq K |z_1 - z_2|$ où la constante K est indépendente de z_1, de z_2 et de $|z_1 - z_2|$.

Théorème C. (i) Si $f \in \Lambda^1_\alpha$, $r^{-1} < \alpha \leq 1$ et si les valeurs de $f(t) = z$ forment un ensembe E sur lequel on peut définir une fonction $F(z) \in \Lambda_1(E)$, alors $F(f) \in \Lambda^1_\alpha \subset A^r$.

(ii) Si $f(t)$ remplit les conditions de (i) et si $F(z)$ est analytique et uniforme dans un domaine D dont E est un sous-ensemble ayant une distance positive de la frontière de D, alors $F(f) \in \Lambda^1_\alpha \subset A^r$.

Les théorèmes A, B et C constituent la base des deux propositions que nous allons établir.

Théorème 1. (i) Si $f(t)$ et $F(z)$ satisfont aux conditions du théorème B, alors $F^n(f) \in A^r$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, et

$$(2.1) \qquad \lim_{n\to\infty} \| F^n(f) \|_r^{1/n} = MF(f).$$

(ii) Si, en particulier, $F(z)=z$, on a

$$(2.2) \qquad \lim_{n\to\infty} \| f^n \|_r^{1/n} = Mf.$$

Nous devons supposer pour ce qui suit que $f \in B$. Nous n'avons pas adopté cette hypothèse dans le théorème C, mais qui ne reste pas moins vrai en admettant cette restriction additionnelle. Cependant, le fait $f \in B \cap \Lambda_\alpha^1$ entraîne que $f \in L^2 \equiv A^2$ et, par suite, seuls les cas $1<r\leq 2$ qui sont à considérer.

Théorème 2. (i) Si $f \in B \cap \Lambda_\alpha^1$, $r^{-1}<\alpha\leq 1$, $1<r\leq 2$, et les autres conditions du théorème C(i) ou C(ii) sont réalisées, alors $F^n(f) \in B \cap \Lambda_\alpha^1 \subset A^r$, $n=1, 2, 3, \ldots$, et $\lim_{n\to\infty} \| F^n(f) \|_r^{1/n} = MF(f)$.

(ii) Si, en particulier, $F(z)=z$, on a $\lim_{n\to\infty} \| f^n \|_r^{1/n} = Mf$.

Remarque. Dans la note [1] nous nous sommes efforcés seulement de trouver pour $\| F(f) \|_r$ une borne supérieure finie quelconque sans nous soucier de l'ordre de grandeur de celle-ci. Si l'on évalue cette borne d'une manière plus précise, on obtient (2.1) sans difficulté et il en découle (2.2) resp. (2.0) comme cas particulier. Mais on peut procéder aussi d'une autre façon. (2.1) est un simple corollaire de (2.2) et du théorème B, si l'on sait déjà que $F(f) \in A^r$, $0<r\leq 1$, implique $F^n(f) \in A^r$, $n=2, 3, \ldots$ En tenant compte de ces faits, nous pouvons et nous allons donner deux démonstrations au théorème 1.

Quant au théorème 2, on peut le prouver également de deux manières différentes.

3. $0<r\leq 1$. Avant de passer à la démonstration du théorème 1, nous allons évoquer quelques relations connues.

Si $g_i \in A^r$ et c_i est constante, $i=1, 2, 3, \ldots$, on a

$$(3.1) \qquad \left\| \sum c_i g_i \right\|_r^r \leq \sum |c_i|^r \| g_i \|_r^r; \quad \| g_1 g_2 \|_r^r \leq \| g_1 \|_r^r \| g_2 \|_r^r$$

d'où l'on tire, pour $g \in A^r$ et $n=2, 3, \ldots$,

$$(3.2) \qquad \| g^n \|_r^r \leq \| g \|_r^{rn}.$$

Première démonstration du théorème 1. Selon le théorème B, $F(f) \in A^r$; (3.2) implique ainsi que $F^n(f) \in A^r$.

Posons

$$(3.3) \qquad f(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu e^{i\nu t}.$$

Comme $f \in A^r$, cette série est uniformément convergente et possède une somme partielle, soit

$$s_j(t) = \sum_{\nu=-j}^{j} a_\nu e^{i\nu t}$$

vérifiant simultanément les deux inégalités suivantes:

$$(3.4) \qquad M(f-s_j)<\frac{\varrho_j}{2}; \quad \| f-s_j \|_r^r = \sum_{|\nu|>j} |a_\nu|^r < \left(\frac{\varrho_j}{2}\right)^r$$

où $\varrho_j \to 0$ avec $1/j$.

Si j est assez élevé, $F(z)$ est régulière dans chaque cercle $|z-f(t)| \leq 2\varrho_j$. Fixons donc j pour le moment et écrivons $s_j(t)=s(t)$; $\varrho_j=\varrho$. Ceci posé, (3.4) permet de développer $F[f(t)]$ en série de Taylor:

$$(3.5) \qquad F[f(t)]=F(f-s+s)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{F^{(m)}(s)}{m!}(f-s)^m.$$

Le théorème B garantit que $F^{(m)}(s) \in A^r$, $m=0, 1, 2, \ldots$, tandis que (3.2) et (3.4) montrent que $(f-s)^m \in A^r$. Les formules (3.1) et (3.2) s'appliquent donc au dernier membre de (3.5), et l'on obtient

$$(3.6) \qquad \| F(f) \|_r^r \leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\| F^{(m)}(s) \|_r^r}{(m!)^r} \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{rm}.$$

Nous avons constaté dans la note [1] (§ 3) que

$$(3.7) \qquad \| F^{(m)}(s) \|_r^r \leq C_{sr} |F^{(m+\lambda_m)}[s(t_m)]|^r, \quad m=0, 1, 2, \ldots,$$

où C_{sr} est une constante qui dépend uniquement de $s(t)$ et de r, t_m est un nombre et λ_m est un entier convenablement choisi. Notamment $0 \leq \lambda_m \leq k =[r^{-1}]+1$, en désignant par $[r^{-1}]$ la partie entière de r^{-1}.

Observons ensuite que, grâce à la première formule (3.4), $F(z)$ est aussi régulière dans chaque cercle $|z-s(t)| \leq 3\varrho/2$.

On en conclut que

$$(3.8) \qquad M \max_{|z-s(t)| \leq \varrho} |F(z)| = \mu < \infty.$$

Par conséquent, si $\varrho=\varrho_j<1$, ce qui arrive si j est assez élevé,

$$(3.9) \qquad \frac{|F^{(m)}[s(t)]|}{m!}=\frac{1}{2\pi}\left| \int_{|z-s(t)|=\varrho} \frac{F(z)dz}{[z-s(t)]^{m+1}} \right| \leq \mu\varrho^{-m} < \mu\varrho^{-m-k_0}$$

où $k_0 \geq 0$ est un entier. On obtient ainsi, en tenant compte de (3.6)—(3.9),

$$(3.10) \qquad \| F(f) \|_r^r \leq C_{sr}\varrho^{-kr}\mu^r \sum_{m=0}^{\infty} [(m+1)\ldots(m+k)]^r 2^{-rm} = K_{sr}^r \varrho^{-kr}\mu^r.$$

Il en résulte que $\| F^n(f) \|_r^r \leq K_{sr}^r \varrho^{-kr}\mu^{nr}$. K_{sr}^r et ϱ^{-kr} étant indépendants de n, il s'ensuit que $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \| F^n(f) \|_r^{1/n} \leq \mu$. $s(t)$ et ϱ étant fonctions de j, on a aussi $\mu=\mu_j=(1+\varepsilon_j)MF(f)$ où, grâce à la convergence uniforme de la série (3.3), $\varepsilon_j \to 0$ avec $1/j$. On en tire que

$$(3.11) \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \| F^n(f) \|_r^{1/n} \leq MF(f).$$

Nous avons, d'autre part,

(3.12) $$\|F^n(f)\|_r^r \geq \|F^n(f)\|_1^r \geq [MF^n(f)]^r = [MF(f)]^{rn}$$

d'où il vient

(3.13) $$\varliminf_{n\to\infty} \|F^n(f)\|_r^{1/n} \geq MF(f).$$

(3.11) et (3.13) constituent la démonstration du théorème 1.

La seconde preuve du théorème 1 suit la même voie que [8] (pp. 246—247). Elle s'appuye sur un lemme qu'on peut facilement établir d'après ce qui précède.

Lemme 1. Si $f \in A^r \cap C$, $0 < r \leq 1$, et si chaque fonction $F_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, est assujettie aux mêmes conditions que $F(z)$ dans le théorème B, si de plus les $F_n(z)$ tendent uniformément vers 0 dans un même voisinage de Γ, alors $\|F_n(f)\|_r \to 0$.

D é m o n s t r a t i o n. Il existe, par hypothèse, un nombre ϱ, $0 < \varrho < 1$, indépendant de n tel que $F_n(z)$ soit régulière dans chaque cercle $|z - f(t)| \leq 2\varrho$ et les inégalités (3.4) soient vérifiées si l'on y remplace ϱ_j par ϱ. On obtient simplement de plus l'analogue de (3.8) $M \max\limits_{|z-s(t)|\leq\varrho} |F_n(z)| = \mu_n \to 0$, $n \to \infty$.

Il en découle, vu (3.10), $\|F_n(f)\|_r \leq K_{sr} \varrho^{-k} \mu_n \to 0$, $n \to \infty$, et le lemme est démontré.

S e c o n d e d é m o n s t r a t i o n d u t h é o r è m e 1. Soit $R > Mf$ et $F_n(z) = (z/R)^n$. Nous avons, en vertu du lemme 1,

$$\lim_{n\to\infty} \|F_n[f(t)]\|_r = \lim_{n\to\infty} \frac{\|f^n\|_r}{R^n} = 0$$

et de là

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\|f^n\|_r^{1/n}}{R} \leq 1.$$

Cette relation ayant lieu pour tout $R > Mf$, il vient $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \|f^n\|_r^{1/n} \leq Mf$. De l'autre côté, on a, à l'instar de (3.12) et (3.13), $\varliminf\limits_{n\to\infty} \|f^n\|_r^{1/n} \geq Mf$ et (ii) du théorème 1 est prouvé. (i) est ensuite, comme nous l'avons déjà fait remarquer, un corollaire de (ii), du théorème B et de (3.2).

4. $r > 1$. La preuve du théorème 2 se fond sur un lemme que nous avons établi dans la note [1] (§ 3, lemme 4), et que nous reproduisons ici.

Lemme 2. Si $g \in B \cap A_\alpha^1$, $r^{-1} < \alpha \leq 1$, alors $g^n \in A^r$, $n = 2, 3, \ldots$, et

(4.1) $$\|g^n\|_r \leq CnMg^{n-1}$$

où $C = C(g)$ est une constante.

D é m o n s t r a t i o n. Posons

$$g^n(t) \sim \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} b_{n\nu} e^{i\nu t}.$$

Nous avons, pour $\nu \neq 0$,

$$\int_0^{2\pi} g^n(t) e^{-i\nu t} dt = -\int_0^{2\pi} g^n\left(t + \frac{\pi}{\nu}\right) e^{-i\nu t}\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[g^n(t) - g^n\left(t + \frac{\pi}{\nu}\right)\right] e^{-i\nu t}\, dt$$

et de là

$$|b_{n\nu}| \leq \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \left| g^n\left(t+\frac{\pi}{\nu}\right) - g^n(t) \right| dt \leq \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \left| g\left(t+\frac{\pi}{\nu}\right) - g(t) \right|$$

$$\times \sum_{j=1}^{n} \left| g^{n-j}\left(t+\frac{\pi}{\nu}\right) g^{j-1}(t) \right| dt \leq \frac{1}{2}\,\omega_1\left(\frac{\pi}{\nu};\, g\right) n M g^{n-1} = O(|\nu|^{-\alpha} n M g^{n-1});$$

nous avons de plus $|b_{n0}| \leq Mg^n$. L'inégalité (4.1) est donc vérifiée et, par suite, $g^n \in A^r$, $n=1, 2, \ldots$

Démonstration du théorème 2. On obtient, à partir de (4.1), et des hypothèses du théorème 2, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \|f^n\|_r^{1/n} \leq Mf$. Pour avoir la relation adéquate concernant la limite inférieure en question, nous allons recourir au théorème de Hausdorff-Young, selon lequel

$$I_{nr'}(f) = \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^{nr'} dt\right]^{1/nr'} \leq \|f^n\|_r^{1/n}, \quad 1<r\leq 2;\ 1/r+1/r'=1.$$

Il est connu que $\lim\limits_{n\to\infty} I_{nr'}(f) = Mf$. Par conséquent $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \|f^n\|_r^{1/n} \geq Mf$ et (ii) du théorème 2 est établi.

(i) est un corollaire de (ii), du théorème C et de (4.1). En effet, selon les conditions du théorème C, $F(f) \in B$, d'après le théorème C même, $F(f) \in A_\alpha^1$ et, vu (4.1), $F^n(f) \in A^r$.

On aurait pu démontrer (i) directement et considérer (ii) comme cas particulier.

BIBLIOGRAPHIE

1. L. Alpár. Généralisation d'un théorème de Wiener et de Lévy. *Acta Math. Acad. Sci Hung.*, **21** (1970), 11—19.
2. A. Beurling. Sur les intégrales de Fourier absolument convergentes et leur application à une transformation fonctionnelle. IX. Congrès des Math. Scandinaves, Helsingfors, 1938, 345—366.
3. P. Lévy. Sur la convergence absolue des séries de Fourier. *Compositio Math.*, **1** (1934), 1—14.
4. F. Riesz, B. Sz. Nagy. Leçons d'analyse fonctionnelle. Budapest, 1952.
5. N. Wiener. Tauberian theorems. *Ann. Math.*, **33** (1932), 1—100.
6. W. Zelazko. On the radicals of *p*-normed algebras. *Studia Math.*, **21** (1962), 203—206.
7. W. Zelazko. On analytic functions in *p*-normed algebras. *Studia Math.*, **21** (1962), 345—350.
8. A. Zygmund. Trigonometric series, 2 vols. Cambridge, 1959.

Institut Mathématique
Académie des Sciences de Hongrie
Reáltanoda u. 13—15
Budapest V Hongrie

Reçu le 22 mai 1970