Труды Международной Конференции по конструктивной теории функций Варна, 19—25 мая 1970

Proceedings of the International Conference on Constructive Function Theory, Varna, May 19–25, 1970

DER DURCHSCHNITTSSATZ FÜR EXTREMALSIGNATUREN UND EINIGE FOLGERUNGEN

B. Brosowski und R. Wegmann

Zusammenfassung. Die von R i v l i n und S h a p i r o [3] eingeführten Extremalsignaturen werden in der Tschebyscheff-Approximation verwendet zur Charakterisierung von Minimallösungen, Einschliessung des Minimalabstandes und für Eindeutigkeitskriterien. Wir verallgemeinern den Begriff der Extremalsignatur auf normierte lineare Räume und zeigen, daß der Durchschnittssatz für Extremalsignaturen auch im Falle eines normierten linearen Raumes für α-Sonnen gültig ist. Dies verallgemeinert ein Ergebnis aus der Theorie der Tschebyscheff-Approximation, das von Brosowski (Nichtlineare Tschebyscheff Approximation, Mannheim, 1968) mit einer anderen Methode bewiesen wurde. Der Beweis des Satzes wird skizziert und einige Anwendungen und Folgerungen werden angegeben.

Im folgenden sei R ein normierter linearer Raum über dem Körper der reellen oder komplexen Zahlen und R^* der Dualraum von R, das ist die Menge der auf R stetigen linearen Funktionen. Mit S_{R^*} bezeichnen wir die Einheitskugel $\{L \in R^* : \|L\| \leqq 1\}$ von R^*, mit E die Menge der Extremalpunkte von S_{R^*} und mit σ_E die Einschränkung der schwachen Topologie $\sigma(R^*, R)$ auf E. Jedem f aus R wird die Menge $E_f := \{L \in E : L(f) = \|f\|\}$ zugeordnet. Das ist eine nichtleere und σ_E-abgeschlossene Teilmenge von E.

Wir definieren nun:

D e f i n i t i o n 1. a) Eine nichtleere, σ_E-abgeschlossene Menge $A \subset E$ heißt genau dann eine Signatur, wenn es ein $f \neq 0$ aus R gibt mit $A \subset E_f$.

b) Sei V eine Teilmenge von R. Eine Menge $A \subset E$ heißt genau dann extremal für ein Element $v_0 \in V$ bezüglich V, wenn für alle $v \in V$ gilt: $\min\limits_{L \in A} \operatorname{Re} L(v - v_0) \leqq 0$.

c) Eine Signatur A, die als Teilmenge von E im Sinne von b) extremal ist für ein v_0 aus V bezüglich V, heißt eine Extremalsignatur für v_0 bezüglich V.

Für die Tschebyscheff-Approximation im Raume $C[Q]$ der komplexwertigen stetigen Funktionen wurden die Extremalsignaturen 1961 von T. J. R i v l i n und H. S. S h a p i r o [3] eingeführt. Durch die Definition 1 wird dieser Begriff auf allgemeine normierte Räume verallgemeinert.

Im folgenden Satz wird ein bekanntes Kriterium von A. N. K o l m o g o r o f f auf normierte Räume übertragen.

Satz 1. (verallgemeinertes Kolmogoroff-Kriterium). Es sei $V \subset R$, $f \in R$ und $v_0 \in V$. Ist die Signatur E_{f-v_0} extremal für v_0 bezüglich V, dann ist v_0 Minimallösung für f bezüglich V.

Dieses Kriterium ist also stets hinreichend dafür, daß v_0 Minimallösung für f bezüglich V ist. Es ist jedoch im allgemeinen nicht notwendig. Die Mengen V, welche durch die Eigenschaft charakterisiert werden, daß das Kolmogoroffsche Kriterium stets notwendig ist, sind die sogenannten α-Sonnen, die folgendermaßen definiert werden.

Definition 2. Eine Teilmenge V von R heißt genau dann eine α-Sonne, wenn für jedes $f \in R$ und $v_0 \in V$ gilt: Ist v_0 beste Approximation für $f \in R$ bezüglich V, dann auch beste Approximation für $v_0+\lambda(f-v_0)$ für alle $\lambda>1$.

Als Beispiele für α-Sonnen seien die konvexen Mengen erwähnt. In der Definition 2 werden die α-Sonnen durch eine approximationstheoretische Eigenschaft gekennzeichnet. Man kann sie auch durch geometrische Eigenschaften beschreiben (vgl. hierzu [2]).

Es sei nun f ein Element von R und $V \subset R$ eine α-Sonne. Die Elemente $v_1, v_2 \in V$ seien beste Approximationen für f bezüglich V. Da das verallgemeinerte Kolmogoroff-Kriterium notwendig ist, gibt es zu jedem $v \in V$ und $i=1, 2$ ein Funktional $L_i \in \boldsymbol{E}_{f-v_i}$ mit $\mathrm{Re} L_i(v-v_i) \leq 0$. Eine für Eindeutigkeitsprobleme wichtige Frage ist, ob $L_1=L_2$ gewählt werden kann. Den Schlüssel zur Lösung dieser und verwandter Fragen gibt der nun folgende Durchschnittssatz für Extremalsignaturen.

Satz 2. Es sei V eine α-Sonne, f ein Element von O und T eine Teilmenge von V. Dann gilt: T ist genau dann eine Menge von Minimallösungen für f bezüglich V, wenn der Durchschnitt

$$\Delta := \bigcap_{v_0 \in T} \boldsymbol{E}_{f-v_0}$$

extremal ist für jedes $v_1 \in T$ bezüglich V.

Der Beweis kann hier nur angedeutet werden. Sei $v_1 \in T$. Da Δ extremal ist für v_1 bezüglich V, ist auch $\boldsymbol{E}_{f-v_1}$ extremal für v_1 bezüglich V, und deshalb ist nach Satz 1 v_1 eine Minimallösung für f.

Der Nachweis der Umkehrung erfolgt für endliches T durch vollständige Induktion nach der Mächtigkeit n der Menge T. Für $n=1$ bedeutet die Aussage gerade die Notwendigkeit des Kolmogoroff-Kriteriums für α-Sonnen. Den Fall einer unendlichen Menge T führt man durch ein Kompaktheitsargument auf den endlichen Fall zurück. Der Beweis ist vollständig ausgeführt in [2].

Es sei noch bemerkt, daß dieser Beweis nicht vom Zornschen Lemma Gebrauch macht wie der bekannte Beweis (vgl. [1]) für den Raum $C[Q, H]$ der stetigen Funktionen mit Werten in einem Prähilbert-Raum H.

Wir ziehen nun einige Folgerungen aus Satz 2. In der angegeben Formulierung sagt er aus, daß für jedes v aus V

$$\sup_{v_0 \in T} \min_{L \in \Delta} \mathrm{Re} L(v-v_0) \leq 0$$

ist. Da für eine reelle Funktion φ von zwei Variablen stets gilt:

$$\sup_y \inf_x \varphi(x, y) \leq \inf_x \sup_y \varphi(x, y),$$

gibt die nachstehende Folgerung 1 eine etwas schärfere notwendige Bedingung als der Durchschnittssatz und ist deshalb als Grundlage für Eindeutigkeitsaussagen noch besser geeignet.

Folgerung 1. Es sei V eine α-Sonne, $f \in R$ und $T \subset V$. Dann ist T genau dann eine Menge von Minimallösungen für f bezüglich V, wenn mit $\Delta = \bigcap_{v_0 \in T} E_{f-v_0}$ für jedes $v \in V$ gilt $\min_{L \in \Delta} \sup_{v_0 \in T} \operatorname{Re} L(v-v_0) \leq 0$.

Weiter ergibt sich:

Folgerung 2. Ist V eine α-Sonne und v_0 eine Minimallösung für f bezüglich V, dann gibt es ein L aus E_{f-v_0}, so daß $L(v_1-v_0)=0$ gilt für alle anderen Minimallösungen v_1 für f bezüglich V.

Daraus erhält man sofort:

Folgerung 3. Ist V eine α-Sonne, dann ist die konvexe Hülle der Menge der Minimallösungen für f bezüglich V im Rand der Kugel

$$\{g \in R: \|f-g\| \leq \inf_{v \in V} \|f-v\|\}$$

enthalten.

Damit kann man eine Eindeutigkeitsaussage für strikt konvexe Räume beweisen:

Folgerung 4. In einem strikt konvexen Raum R ist jede α-Sonne V eine Tschebyscheff-Menge.

Dabei heißt eine Menge V eine Tschebyscheff-Menge, wenn zu jedem $f \in R$ höchstens eine beste Approximation v_0 für f bezüglich V existiert.

Aus Folgerung 2 erhält man ein hinreichendes Kriterium für die Eindeutigkeit der Approximation bezüglich α-Sonnen.

Folgerung 5. Es sei V eine α-Sonne. Wenn für je zwei verschiedene Elemente $v_1, v_2 \in V$ die Menge

$$\{L \in E: L(v_1-v_2)=0\}$$

nicht extremal ist für v_1, dann ist V eine Tschebyscheff-Menge.

In den hier angegebenen Resultaten sind viele bekannte Sätze als Spezialfälle enthalten. Wenn man z. B. die Folgerung 5 auf die Tschebyscheff-Approximation bezüglich endlichdimensionaler Teilräume von $C[Q]$ anwendet, wird man gerade auf den bekannten Haarschen Eindeutigkeitssatz geführt.

LITERATUR

1. B. Brosowski. Nichtlineare Tschebyscheff-Approximation. B. I. Hochschulskripten Bd. 808/808a. Mannheim, Bibliographisches Institut, 1968.
2. B. Brosowski, R. Wegmann. Charakterisierung bester Approximationen in normierten Vektorräumen. *J. Approx. Theory*, **3** (1970), 369—397.
3. T. J. Rivlin, H. S. Shapiro. A unified approach to certain problems of approximation and minimization. *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, **9** (1961), 670—699.

Prof. Dr. B. Brosowski
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
Bürgerstrasse 32
D-34 Göttingen BRD

Dr. R. Wegmann
Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik
Föhringer Ring 6
D-8 München 23 BRD

Eingegangen am 11. Juli 1970