Труды Международной Конференции по конструктивной теории функций Варна, 19—25 мая 1970

Proceedings of the International Conference on Constructive Function Theory, Varna, May 19—25, 1970

EINSEITIGE TSCHEBYSCHEFF-APPROXIMATION BEI RANDWERTAUFGABEN

L. Collatz

Inhalt

1. Einige allgemeine Bemerkungen über Genauigkeitsabschätzungen. Bei partiellen Differentialgleichungen sind das Differenzenverfahren und seine zahlreichen Varianten wohl die zur Zeit am meisten gebrauchten Methoden zur angenäherten numerischen Lösung von Anfangs- und Randwertaufgaben. Diese Verfahren sind sehr allgemein anwendungsfähig auch bei nichtlinearen Problemen und komplizierteren Randbedingungen und komplizierteren Bereichen, haben aber den Nachteil, daß sie, abgesehen von einigen sehr einfach gelagerten Beispielen, keine exakte Fehlerabschätzung gestatten, wenn man nur solche Fehlerabschätzungen in Betracht zieht, die numerisch durchführbar sind, und nur Größen verwendet, die in der numerischen Rechnung bekannt sind.

Demgegenüber gibt es eine Reihe einfacherer Fälle, die auch schon Klassen nichtlinearer Differentialgleichungen erfassen, bei welchen man Monotoniesätze aufstellen und auf diese Weise sehr bequem numerisch gut brauchbare Fehlerabschätzungen und Einschließungen für die gesuchte Lösung erhalten kann. In einfachen Fällen bestehen Beziehungen zwischen Monotoniesätzen und Randmaximumsätzen (vgl. z. B. Redheffer [13]). Bisher hat man für die numerische Rechnung häufig Randmaximumsätze benutzt. Verwendet man dabei für die Näherungsfunktion einen Ansatz in analytischer Form mit einer endlichen Anzahl freier Parameter, so kommt man dabei in der Regel zu einer Tschebyscheff'schen Approximationsaufgabe. Die Monotoniesätze aber führen gewöhnlich zu Aufgaben der einseitigen Approximation, die mir bisher noch zu wenig behandelt worden zu sein scheint. Die folgende Arbeit bezieht sich daher hauptsächlich auf die einseitige Tschebyscheff-Approximation, kurz E. T. A. Es sei bemerkt, daß beide Arten, die gewöhnliche und die einseitige T. A., sich unmittelbar als Optimierungsaufgaben schreiben und dann bei diskreter Durchführung bequem auf Computern durchrechnen lassen. Au diese Weise sind an Rechenanlagen schon zahlreiche Anfangs- und Randwertaufgaben behandelt worden.

2. Ein einfaches Beispiel. Randmaximumsätze liefern gewöhnlich eine im ganzen Bereich konstante Fehlerschranke, während Monotoniesätze untere und obere Schranken für die gesuchte Funktion liefern, welche selbst Funktionen sind und dadurch dem Problem oft besser angepaßt sind. Das zeigt sich schon bei ganz einfachen linearen Problemen. Vorgelegt sei die Gleichung $Lu=u_t-u_{xx}=0$ mit den Anfangs- und Randbedingungen:

$$u(x,0)=f(x)=1-x^2,\ -1\leqq x\leqq 1, \tag{2.1}$$

$$u(\pm 1,t)=0,\ t>0. \tag{2.2}$$

Dabei kann die Funktion $u(x, t)$ beispielsweise als Temperatur in einem Stabe an der Stelle x zur Zeit t gedeutet werden. Wir suchen eine angenäherte Lösung $v(x, t)$ in der Form $v(x,t)=a\cos bx\exp(-b^2t)$.

Diese Funktion v erfüllt die Differentialgleichung exakt und die Konstanten a, b sind so zu bestimmen, daß die Bedingungen (2.1) (2.2) möglichst gut erfüllt werden. Dafür hat man mehrere Möglichkeiten:

I. Gewöhnliche Tschebyscheff-Approximation

A) Die Forderung

$$\operatorname*{Max}_x |v(x,0)-f(x)|=\delta,\ \delta=\text{Min} \tag{2.3}$$

ergibt die Werte $a=1.027$, $b=1.544$, $\delta=0.027$. Das Maximumprinzip liefert dann für den Fehler $\varepsilon=v-u$ im ganzen Bereich $|x|<1, t>0$ die konstante Schranke

$$|\varepsilon(x,t)|\leqq\delta. \tag{2.4}$$

Diese Funktion $v(x, t)$, verletzt die Randbedingungen (2.2).

B) Tschebyscheff-Approximation (2.3) mit den Nebenbedingungen $v(\pm 1,0)=0$; das ergibt $a=1.0397, b=\pi/2, \delta=0.0397$. Die Fehlerabschätzung hat die gleiche Form in (2.4), aber die Funktion $v(x, t)$ genügt jetzt den Randbedingungen (2.2). Aber auch hier bekommt man im ganzen Bereich eine konstante Fehlerschranke.

II. Einseitige T. A.

Man fragt nun nach einer Fehlerfunktion $\varepsilon=\varepsilon(x,t)\geqq 0$ oder $\varepsilon\leqq 0$. Es liegt eine Aufgabe monotoner Art vor (vgl. z. B. Collatz [3]). Für die Approximation für $v(x,0)-f(x)$ von unten erhält man die Werte $a=1, b=\pi/2$, $-0{,}056\leqq\varepsilon\leqq 0$ und für die Approximation von oben $a=1.051$, $b=1.523$, $0\leqq\varepsilon\leqq 0.051$. Die Fehlerabschätzung führt nun mit

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\exp\left(-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2t\right)\leqq u(x,t)\leqq 1.051\cos(1.523x)\exp(-(1.523)^2t)$$

zu unteren und oberen Schranken, welche für $t\to\infty$ gegen Null gehen und daher für große Werte von t das Verhalten der Lösung besser wiedergeben als eine konstante Fehlerschranke.

3. Allgemeine Formulierung. Für eine Funktion $u(x)=u(x_1,\ldots,x_n)$ in einem Bereich B des n-dimensionalen Punktraumes R^n mit dem Rand Γ seien die Differentialgleichung

$$(3.1)\qquad Mu=0 \quad \text{in } B$$

und die Randbedingungen

$$(3.2)\qquad Su=0 \quad \text{auf } \Gamma$$

vorgegeben. Su kann dabei ein Vektor mit mehreren (endlich vielen) Komponenten sein. Die Gleichungen (3.1) (3.2) werden zusammengefasst zu $Tu=\{Mu,\ Su\}=0$.

Wir setzen voraus, daß das Problem für „Vergleichsfunktionen" v, $\bar{v}$ (d. h. für Funktionen, die hinreichend oft partiell differenzierbar sind) die Monotonieeigenschaft besitzt

$$(3.3)\qquad Tv \leqq T\bar{v} \text{ hat zur Folge } v \leqq \bar{v}.$$

In (3.3) bedeutet das Ungleichheitszeichen punktweise Gültigkeit in $B+\Gamma$ im Sinne der natürlichen Ordnung reeller Zahlen für beide Komponenten M, S.

Wenn das Problem (3.1) (3.2) eine Lösung u besitzt und wenn man sich Näherungslösungen w, $\bar{w}$ mit nichtpositiven bzw. nichtnegativem Defekt verschaffen kann, so erhält man die Fehlerabschätzung

$$(3.4)\qquad Tw \leqq 0 \leqq T\bar{w} \text{ hat zur Folge } w \leqq u \leqq \bar{w}.$$

Nun wählen wir zwei Scharen von Vergleichsfunktionen

$$(3.5)\qquad W=\{w(x,a_1,\ldots,a_p)\} \quad \text{und} \quad \bar{W}=\{\bar{w}(x,\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_q)\}.$$

Hierbei kann der Vektor $a=(a_1,\ldots,a_p)$ einen gewissen Bereich A des Raumes R^p und analog der Vektor $\bar{a}=(\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_q)$ den Bereich $\bar{A}\subset R^q$ durchlaufen. Man hat nun für die Konstanten $a_1,\ldots,a_p,\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_q$ die nichtlineare Optimierungsaufgabe

$$(3.6)\quad \text{A}:\qquad 0 \leqq \bar{w}(x,\bar{a})-w(x,a) \leqq \delta,\ x \in B+\Gamma;\ \delta=\text{Min},$$

mit den (unendlich vielen) Nebenbedingungen

$$(3.7)\qquad Tw(x,a) \leqq 0 \leqq T\bar{w}(x,\bar{a}),\ x \in B+\Gamma.$$

Im linearen Fall mit

$$(3.8)\qquad Mu=\hat{M}u-\mu(x),\ Su=\hat{S}u-\sigma(x)$$

mit linearen Operatoren $\hat{M}$, $\hat{S}$ und gegebenen Funktionen $\mu(x)$, $\sigma(x)$ und mit

$$Tu=\hat{T}u-r=\{\hat{M}u-\mu,\ \hat{S}u-\sigma\}$$

kann man in (3.5) lineare Ausdrücke verwenden

$$(3.9)\qquad w(x)=\sum_{v=1}^{p} a_v w_v(x),\ \bar{w}(x)=\sum_{v=1}^{q} \bar{a}_v \bar{w}_v(x)$$

und man hat dann als einseitige Approximationsaufgabe die lineare Optimierung

$$(3.10)\quad \text{AL}: \begin{cases} 0 \leq \sum_{v=1}^{q} \bar{a}_v w_v(x) - \sum_{v=1}^{p} a_v w_v(x) \leq \delta, \ \delta = \text{Min}; \\ \sum_{v=1}^{p} a_v \hat{T} w_v(x) \leq r(x) \leq \sum_{v=1}^{q} \bar{a}_v \hat{T} \bar{w}_v(x). \end{cases}$$

Anstelle des Problems A benutzt man für die Rechnung oft das einfachere Problem

$$(3.11)\quad \text{B}. \qquad -\delta_1 \leq Tw(x, a) \leq 0, \quad \delta_1 = \text{Min}$$

und

$$(3.12)\qquad 0 \leq T\bar{w}(x, \bar{a}) \leq \delta_2, \quad \delta_2 = \text{Min}.$$

Beide Probleme sind einseitige T. A. Im Fall B hat man die Schranken

$$(3.13)\qquad w(x,a) \leq u(x) \leq \bar{w}(x, \bar{a}),$$

welche man leichter aufstellen kann als bei (3.6) (3.7); sie sind aber im allgemeinen nicht so gut wie beim Problem A.

Wenn hierbei T linear wie in (3.8) ist, kann man die linearen Ausdrücke (3.9) benutzen, und wenn sowohl eines der Tw_v als auch eines der $T\bar{w}_v$ konstant ist, dann ist die einseitige T. A. äquivalent zu der klassischen T. A.

Anstelle des Problems B kann mann das noch mehr vereinfachte Problem C betrachten.

$$(3.14)\quad \text{C}: \qquad |T(w, a)| \leq \delta_3, \quad \delta_3 = \text{Min}.$$

Dies ist im allgemeinen eine Tschebyscheff-Combi-Approximation (Collatz [6], vgl. auch Bredendiek [2]), aber in diesem Falle erhält man bei nichtlinearen Aufgaben keine Fehlerschranken.

4. Hinreichendes Kriterium für eine Minimallösung. Es wird folgende Problemklasse zugrunde gelegt: B sei ein abgeschlossener Bereich des n-dimensionalen Punktraumes R^n der Punkte $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und sei $C(B)$ der Banachraum der auf B gegebenen stetigen Funktionen $f(x)$ bei der üblichen supremum-Norm:

$$(4.1)\qquad \|f\| = \sup_{x \in B} |f(x)|.$$

Nun sei $f(x)$ eine fest gegebene Funktion aus $C(B)$ und W sei wie in (3.5) $W = \{w(x, a_1, \ldots, a_p\}$ eine von den Parametern a_p abhängende zu $C(B)$ gehörende Funktionenschar. Eine Funktion $\bar{w} \in W$, welche

$$(4.2)\qquad \|\bar{w} - f\| = \varrho_0 = \inf_{w \in W} \|f - w\|$$

erfüllt, heißt Minimallösung für die E. T. A. (Einseitige Tschebyscheff-Approximation) von oben, bzw. von unten, wenn $\bar{w}$ der Nebenbedingung

$$(4.3)\qquad \bar{w}(x) \geq f(x) \ \text{bzw.} \ \bar{w}(x) \leq f(x)$$

für alle $x \in B$ genügt.

Wenn in der Funktionenklasse W ein Parameter, etwa a_1, als additive Konstante auftritt, wenn also W sich schreiben läßt als

$$(4.4)\qquad W = \{w = a_1 + \varphi(x, a_2, \ldots, a_p)\}$$

so ist die E. T. A. der gewöhnlichen Tschebyscheff-Approximation äquivalent, da sich dann die zugehörigen Minimallösungen nur um Konstanten unterscheiden. Wenn aber W nicht die Gestalt (4.4) hat, treten neue Erscheinungen auf, wie schon die einfachsten Beispiele zeigen:

1. Sei B das eindimensionale Intervall $-1 \leq x \leq 1$ und W die Funktionenklasse $w = a_1 x$.

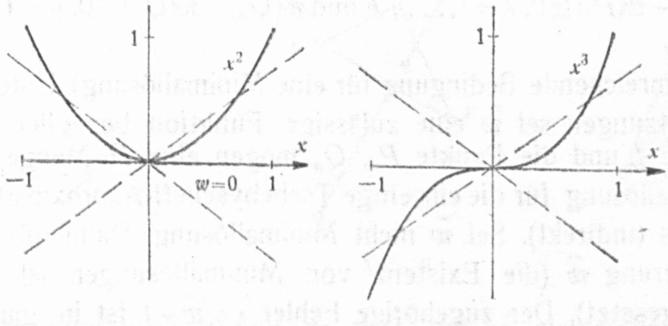

Abb. 1

Ia. Die Funktion $f(x) = x^2$ hat bei E. T. A. von oben keine Lösung und von unten her die Lösung $w \equiv 0$ (Abb. 1).

Ib. Die Funktion $f(x) = x^3$ hat weder bei E. T. A. von oben noch von unten her eine Lösung.

II. Entsprechende Erscheinungen hat man im Mehrdimensionalen; sei z. B. B der Kreis $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ im R^2 und W die Klasse der Funktionen $w = a_1 x_1 + a_2 x_2$.

IIa. $f(x_1, x_2) = x_1^2$ Erscheinung wie in Beispiel Ia.

IIb. $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ Erscheinung wie bei Ib.

Mit der Theorie der E. T. A., mit Existenz- und Eindeutigkeitsfragen haben sich u. a. Freud[8], Tschaplygin[17], Ganelius, Popoviciu[12] und Sippel[14] beschäftigt. Hier soll in Erweiterung der Theorie der H-Mengen ein einfaches Kriterium genannt werden, das dem Kolmogoroff-Kriterium (Kolmogoroff[9]) entspricht und in vielen Fällen infolge seiner leichten Anwendbarkeit den Nachweis gestattet, daß eine bestimmte zum Parametervektor $\tilde{a} = (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_p)$ gehörige Funktion $\tilde{w} = w(x, \tilde{a}) \in W$ Minimallösung ist.

Die Betrachtungen werden auf den Fall der E. T. A. von oben her beschränkt, da sie für die E. T. A. von unten her genau analog durchgeführt werden können.

Es sei A die Menge der „zulässigen" Parametervektoren a, d. h. derjenigen a, für welche

$$w(x, a) \geq f(x) \tag{4.5}$$

für alle $x \in B$ gilt. Die zugehörigen Funktionen $w(x, a)$ mögen „zulässige" Funktionen heißen. Es sei w eine solche zulässige Funktion. Nun werden für die E. T. A. den H-Mengen entsprechende H_1-Mengen eingeführt. Da $\tilde{w}$ zulässig ist, gilt für den Fehler $\tilde{\varepsilon} = \tilde{w} - f \geq 0$ in B. Nun seien $P_\varkappa$ ($\varkappa = 1, \ldots, k$) Punkte in B, in welchen der Fehler verschwindet; $\tilde{\varepsilon}(P_\varkappa) = 0$, $\varkappa = 1, \ldots, k$, und Q_μ,

$\mu=1, \ldots, m$, seien Punkte in B, in welchen der Fehler seinen maximalen Wert annimmt; $\tilde{\varepsilon}(Q_\mu) = \max_{x \in B} \tilde{\varepsilon}(x) = \varrho_0$, $\mu = 1, \ldots, m$. Dann kann man die Definition aufstellen.

Definition. Die Punkte $P_\varkappa$, Q_μ bilden eine H_1-Menge, wenn es in der Klasse W kein Element w gibt mit

$$w(P_\varkappa) - \tilde{w}(P_\varkappa) \geqq 0,\ \varkappa = 1, \ldots, k \text{ und } w(Q_\mu) - \tilde{w}(Q_\mu) < 0,\ \mu = 1, \ldots, m, \tag{4.6}$$

dann gilt der

Satz (Hinreichende Bedingung für eine Minimallösung). Unter den genannten Voraussetzungen sei $\tilde{w}$ eine zulässige Funktion bezüglich einer gegebenen Funktion f und die Punkte $P_\varkappa$, Q_μ mögen eine H_1-Menge bilden. Dann ist $\tilde{w}$ Minimallösung für die einseitige Tschebyscheff-Approximation von oben.

Beweis (indirekt). Sei $\tilde{w}$ nicht Minimallösung. Dann gibt es eine „bessere" Annäherung $\hat{w}$ (die Existenz von Minimallösungen ist bei dem Satz nicht vorausgesetzt). Der zugehörige Fehler $\hat{\varepsilon} = \hat{w} - f$ ist in ganz B nichtnegativ, $\hat{\varepsilon} \geqq 0$ in B und das Supremum $\hat{\varrho}$ von $\hat{\varepsilon}$ ist echt kleiner als ϱ_0; es gilt also $\hat{\varepsilon} \leqq \hat{\varrho} < \varrho_0$ in ganz B. Für die Differenz $v = \hat{\varepsilon} - \tilde{\varepsilon} = w(x, \hat{a}_v) - f(x, \hat{a}_v)$ hat man dann

$$v(P_\varkappa) \geqq 0,\ \varkappa = 1, \ldots, k;\ v(Q_\mu) < 0,\ \mu = 1, \ldots, m.$$

Nach der Definition einer H_1-Menge sollte es aber kein solches v geben.

5. Nachprüfung der Bedingungen für eine H_1-Menge bei linearer Approximation. Für die Anwendung des Satzes in Nr. 4 ist es nötig nachzuprüfen, ob das System von Ungleichungen (4.6) Lösungen hat oder nicht. Dafür stehen die gleichen algorithmischen Methoden zur Verfügung wie für die H-Mengen bei der gewöhnlichen Tschebyscheff-Approximation (vgl. z. B. Collatz [4], S. 331—336). Bei linearer Tschebyscheff-Approximation ist dies besonders bequem, aber auch verschiedene Fälle von nichtlinearer Tschebyscheff-Approximation sind auf diese Weise erfaßbar. Bei der linearen E. T. A. durch Funktionen

$$w = \sum_{v=1}^{p} a_v w_v(x)$$

mit gegebenen Funktionen $w_v(x)$ hat die Differenz $v = w - \tilde{w}$ wieder die Form einer Linearkombination aus den w_v und es kommt nur darauf an nachzuweisen, daß das System von Ungleichungen

$$\sum_{v=1}^{p} c_v w_v(P_\varkappa) \geqq 0,\ \varkappa = 1, \ldots, k;\ \sum_{v=1}^{p} c_v w_v(Q_\mu) < 0,\ \mu = 1, \ldots, m,$$

keine reelle Lösung c_v besitzt. Dann bilden die Punkte $P_\varkappa$, Q_μ eine H_1-Menge vgl. die Durchrechnung im Beispiel V. Einige einfache Beispiele mögen dies erläutern.

Beispiel I. Funktionenklasse $w = a_1 x_1 + a_2 x_2$ im R^2. In Polarkoordinaten r, φ seien zwei Punkte $P_\varkappa = (r_\varkappa, \varphi_\varkappa)$ $\varkappa = 1, 2$, und ein Punkt $Q = (r_3, \varphi_3)$ gegeben und es gelte (Abb. 2)

$$\varphi_1 < \varphi_3 < \varphi_2 < \varphi_1 + \pi. \tag{5.1}$$

Dann bilden die Punkte $P_\varkappa$, Q eine H_1-Menge. Dazu ist zu zeigen, daß es in der Funktionenklasse W kein w gibt mit $w(P_1)\geqq 0$, $w(P_2)\geqq 0$, $w(Q)<0$.

Ist O der Koordinatenanfangspunkt, so sei S der Schnittpunkt der Geraden P_1P_2 und OQ, der nicht notwendig innerhalb der Strecke OS liegen

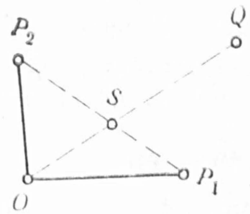

Abb. 2

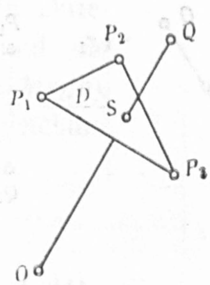

Abb. 3

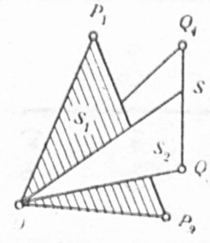

Abb. 4

muß. Es müßte dann $w(S)\geqq 0$ sein, da $w(P_\varkappa)\geqq 0$ ist, aber zugleich $w(S)<0$ da $w(Q)<0$ ist. Das ist ein Widerspruch und die Punkte $P_\varkappa$, Q bilden eine H_1-Menge.

B e i s p i e l II. Funktionenklasse $w=a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3$ im R^3. Die drei Punkte P_1, P_2, P_3 mögen nicht auf einer Geraden liegen, sondern ein Dreieck D bilden (Abb. 3).

Es sei O wieder der Koordinatenanfangspunkt und der Halbstrahl von O aus durch einen Punkt Q treffe das Dreieck D in einem Punkte S, wobei sowohl der Punkt Q als auch der Punkt S von O verschieden sei. Dann bilden wieder die Punkte P_1, P_2, P_3, Q eine H_1-Menge, da $w(S)$ nicht sowohl $\geqq 0$ als auch <0 sein kann.

B e i s p i e l III. Dieselbe Funktionenmenge wie im vorigen Falle. Es mögen 4 Punkte P_1, P_2, Q_3, Q_4 in folgender Lage vorliegen (Abb. 4). Die Sektoren $S_1=OP_1P_2$ und $S_2=OQ_3Q_4$ mögen die Öffnungswinkel α_j, $j=1,2$, haben mit $0<\alpha_j<\pi$. Die beiden Sektoren mögen genau einen von O ausgehenden Halbstrahl OS gemeinsam haben, dann bilden die Punkte $P_\varkappa$, Q_μ wieder eine H_1-Menge, da nicht $w(S)$ zugleich >0 und <0 sein kann.

B e i s p i e l IV. Wiederum dieselbe Funktionenklasse wie im vorigen Beispiel. Zwei Punkte P, Q auf demselben Halbstrahl durch O (Abb. 5, a) bilden bereits eine H_1-Menge.

B e i s p i e l V. Funktionenklasse $w=a_1x_1+a_2x_2+a_3x_1^2$ im R^2. Vier Punkte (Abb. 5, b) seien durch ihre Koordinaten gegeben $P_1=(\alpha,\beta)$, $P_2=(\gamma,-\delta)$, $Q_3=(\alpha,-\beta)$, $Q_4=(\gamma,\delta)$ mit $\beta>0$, $\delta>0$, $\alpha>0$, $\gamma>0$. Dabei dürfen α und δ beliebig sein, jedoch im Falle $\alpha=\gamma$, muß man $\beta\neq\delta$ voraussetzen. Das System der Ungleichungen lautet dann

$$\alpha a_1+\beta a_2+\alpha^2 a_3\geqq 0;$$

$$-\alpha a_1+\beta a_2-\alpha^2 a_3>0;$$

$$\gamma a_1-\delta a_2+\gamma^2 a_3\geqq 0,$$

$$-\gamma a_1-\delta a_2-\gamma^2 a_3>0.$$

Aus den ersten beiden Ungleichungen folgt $\beta a_2>0$, aus den letzten beiden $-\delta a_2>0$, welche miteinander in Widerspruch stehen. Die Punkte P_1,

P_2, Q_3, Q_4 bilden also eine H_1-Menge. Die Zahl der Beispiele läßt sich leicht stark vermehren.

6. H_1-Mengen bei nichtlinearer Approximation. Wie bei der gewöhnlichen Tschebyscheff-Approximation kann man auch bei der einseitigen Ap-

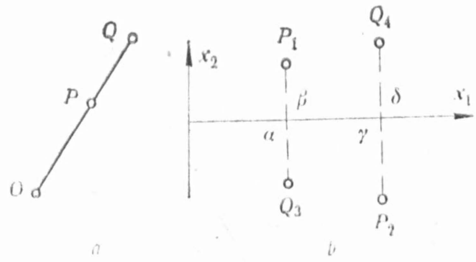

Abb. 5

proximation häufig nichtlineare Fälle auf lineare zurückführen. Bilden z. B. die Punkte $P_\varkappa$, Q_μ eine H-Menge für die Funktionenklasse

$$w = a_1 + f(x_1, \ldots, x_n, a_2, a_3, \ldots, a_p) \tag{6.1}$$

so bilden sie auch eine H_1-Menge für die gleiche Klasse, da der Parameter a_1 in w additiv auftritt. Sei nun V der Wertevorrat von w für $a_\nu \in A$, $(x_1, \ldots, x_n) \in B$ und sei $\varphi(z)$ eine (reellwertige) streng monoton (wachsende oder fallende) Funktion von z für $z \in V$. Bei monoton wachsendem φ folgt aus $w(P_\varkappa) \geqq \tilde{w}(P_\varkappa)$ dann $\varphi(w(P_\varkappa)) \geqq \varphi(\tilde{w}(P_\varkappa))$ und bei monoton fallendem φ kehrt sich der Sinn der Ungleichung um. Insgesamt wird die Lösbarkeit oder Unlösbarkeit des Systems (4.6) beim Vorschalten der Funktion φ nicht geändert. Gut verwendbare Funktionen sind (jeweils in den passenden Intervallen V) die Funktionen $\varphi(z) = e^z, \frac{1}{z}, \frac{1}{z+c}, z^c, \ldots$

Beispiel. Bilden die Punkte $P_\varkappa$, Q_μ eine H-Menge für die Funktionenklasse (6.1) so bilden sie zugleich eine H_1-Menge für die Funktionenklasse

$$\widehat{w} = e^w = \widehat{a}_1 \exp f(x_1, \ldots, x_n, a_2, \ldots, a_p). \tag{6.2}$$

Bei eindimensionaler E.T.A. kann man in vielen Fällen einfache, aus drei Punkten bestehende H_1-Mengen aufstellen, und zwar für die folgende Funktionenklasse, die nur 2 Parameter enthält (diese mögen der Einfachheit halber mit a und b bezeichnet werden).

$$w = a\ h(x, b). \tag{6.3}$$

Hierbei variiert x in einem Intervall I_x: $x_0 \leqq x \leqq x_1$ (welches auch halbseitig oder beidseitig unendlich sein darf) und b in einem Intervall I_b: $b_0 \leqq b \leqq b_1$ (welches ebenfalls nicht endlich zu sein braucht). a sei beliebig reell und es sei $h(x, b)$ für alle betrachteten x, b, positiv und stetig. Es werden drei Punkte $P_1(x = s_1)$, $Q(x = s_2)$, $P_2(x = s_3)$ mit $x_0 \leqq s_1 < s_2 < s_3 \leqq x_1$ betrachtet; und der Quotient

$$Q(x, b, \tilde{b}) = \frac{h(x, b)}{h(x, \tilde{b})} \tag{6.4}$$

eingeführt.

Satz. Der Quotient Q von (6.4) sei für alle b, $\widetilde{b} \in I_b$ in x streng monoton (wachsend oder fallend); dann sind die Punkte P_1, Q, P_2 eine H_1-Menge für die Funktionenklasse (6.3).

B e w e i s. Wie früher wird die Differenz $v = ah(x, b) - \widetilde{a}h(x, \widetilde{b})$ und die Abkürzungen $h_{jb} = h(s_j, b)$, $\widetilde{h}_{j\widetilde{b}} = h(s_j, \widetilde{b})$, $Q_j = Q(s_j, b, \widetilde{b})$ eingeführt. Die Ungleichungen (5.1) lauten dann

$$
\begin{aligned}
& ah_{1b} - \widetilde{a}h_{1\widetilde{b}} \geqq 0, \\
(6.5) \qquad & -ah_{2b} + \widetilde{a}h_{2\widetilde{b}} > 0, \\
& ah_{3b} - \widetilde{a}h_{3\widetilde{b}} \geqq 0.
\end{aligned}
$$

Durch Linearkombination von je zwei übereinander stehenden Ungleichungen eliminiert man den Parameter a und erhält

$$(6.6) \qquad \widetilde{a}\Phi_{12} > 0, \quad \widetilde{a}\Phi_{23} > 0$$

mit den Abkürzungen $\Phi_{12} = h_{2\widetilde{b}}h_{1b} - h_{1\widetilde{b}}h_{2b}$, $\Phi_{23} = h_{2\widetilde{b}}h_{3b} - h_{3\widetilde{b}} - h_{2b}$. Wenn man nun

$$(6.7) \qquad \operatorname{sgn}\Phi_{12} = -\operatorname{sgn}\Phi_{23}$$

zeigen kann, so sind die Ungleichungen (6.6) unverträglich und es liegt eine H_1-Menge vor. Nun ist aber

$$\operatorname{sgn} \Phi_{12} = \operatorname{sgn}\left\{\frac{h_{1b}}{h_{1\widetilde{b}}} - \frac{h_{2b}}{h_{2\widetilde{b}}}\right\} = \operatorname{sgn}(Q_1 - Q_2),$$

$$\operatorname{sgn} \Phi_{23} = \operatorname{sgn}(Q_3 - Q_2).$$

Wegen der Monotonievoraussetzung ist entweder $Q_1 < Q_2 < Q_3$ oder $Q_1 > Q_2 > Q_3$ und in beiden Fällen ist (6.7) erfüllt.

Die Monotonieeigenschaft wird in praktischen Fällen oft dadurch nachgewiesen, daß man zeigt, daß

$$(6.8) \qquad Q' = \frac{dQ(x, b, \widetilde{b})}{dx}$$

im offenen Intervall $(I_x) = \{x_0 < x < x_1\}$ ein festes (positives oder negatives) Vorzeichen hat.

Das gelingt oft, indem man Q' bis auf einen positiven Faktor in der Form $\varphi(\beta) - \varphi(\widetilde{\beta})$ mit $\beta = bx$, $\widetilde{\beta} = \widetilde{b}x$ setzt, wobei $\varphi(z)$ eine in $x_0/b < z \leqq x_1/b$ streng monotone

T a b e l l e

Klasse w	$Q(x, b, \widetilde{b})$	Q'	$\varphi(z)$	I_x	I_b
$a\,.\,e^{bx}$	$e^{(b-\widetilde{b})x}$			$\langle x_0, x_1\rangle$ bel.	$\langle b_0, b_1\rangle$ bel.
$a\,.\cos bx$	$\frac{\cos bx}{\cos \widetilde{b}x}$	$\frac{\cos bx}{x\,.\cos \widetilde{b}x}[-\varphi(\widetilde{\beta}) + \varphi(\beta)]$	$-z\,.\tan z\; bx$	$\langle 0, \alpha\rangle$	$\left(0, \frac{\pi}{2\alpha}\right)$
$a\,.\sin bx$	$\frac{\sin bx}{\sin \widetilde{b}x}$	$\frac{\sin bx}{x\,.\sin \widetilde{b}x}[\varphi(\beta) - \varphi(\widetilde{\beta})]$	$z\,.\operatorname{ctg.} z\; bx$	$\langle 0, \alpha\rangle$ $\alpha > 0$	$\left(0, \frac{\pi}{2\alpha}\right)$
$a(x+b)^k$ (k fest)	$\left(\frac{x+b}{x+\widetilde{b}}\right)^k = \left(1 + \frac{b-\widetilde{b}}{x+\widetilde{b}}\right)^k$			$\langle 0, \alpha\rangle$	$(0, \infty)$

Funktion von z ist. Die Tabelle bringt verschiedene Beispiele, wobei in Fällen, in denen man die Monotonie unmittelbar erkennt, Spalten mit Q', $\varphi(z)$ usw. leer gelassen sind (Siehe Tabelle 1).

7. Anwendungen auf Differentialgleichungen. B e i s p i e l I. Nichtlineare Randwertaufgabe bei einer gewöhnlichen Differentialgleichung.

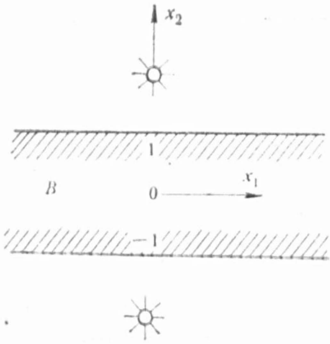

Abb. 6

(7.1) $$-u''(x)+[u(x)]^2=0, \quad u(\pm 1)=1.$$

Für den Operator $Tv=\{-v''+v^2,\ v(\pm 1)-1\}$ gilt im Bereich der Funktionen $v(x)\geqq 0$ und mit der Annahme der Existenz einer Lösung u von (7.1) die Monotonie (C o l l a t z [3]):

Aus $Tv\leqq\Theta\leqq Tw$ folgt $v\leqq u\leqq w$. Für die Funktionen $w=1+a_1(1-x^2)+a_2(x^2-x^4)$ rechnet man aus

$$Tw=\{2a_1+2a_2(-1+6x^2)+[1+a_1(1-x^2) + a_2(x^2-x^4)]^2,\ 0\}.$$

Nun sind die Parameter a_1 und a_2 so zu bestimmen, daß $Tw\geqq\Theta$, bzw. $Tw\leqq\Theta$ ausfällt. Es liegt also eine nichtlineare einseitige Polynom-Approximation vor. Arbeitet man zunächst nur mit a_1 (also $a_2=0$), so erhält man (Abb. 6)

$$Tw\geqq\Theta \text{ für } a_1\geqq -2+\sqrt{3},$$

$$Tw\leqq\Theta \text{ für } -1\leqq a_1\leqq -\frac{1}{2}.$$

Etwas genauere Werte erhält man bei Hinzunahme von a_2 (ich danke den Herren Budde und Zimmermann für die Durchführung der Rechnung auf einem Computer):

	$-\delta\leqq Tw\leqq 0$	$0\leqq Tw\leqq\delta$
a_1	−.2921	−.2805
a_2	−.0416	−.0402
δ	.0390	.0369

Speziell erhält man $0.70788\leqq u(\Theta)\leqq 0.71945$.

B e i s p i e l II. Randwertaufgabe

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=0 \text{ in } B: -\infty<x_1<\infty,\ |x_2|<1$$

mit den Randbedingungen

$$u(x_1\pm 1)=\varphi(x_1)=\frac{1}{1+x_1^2} \text{ für } -\infty<x_1>\infty,$$

$$\lim_{x_1\to\pm\infty} u(x_1 x_2)=0.$$

(Physikalische Deutung: Ein unendlich langer Plattenstreifen wird durch zwei an beiden Seiten symmetrisch angeordnete Wärmequellen erwärmt, Abb. 6).

Als Näherungslösung wird verwendet

$$w(x_1, x_2) = \mathrm{Re}\left(\frac{a}{c+z^2}\right) = a\frac{c+x_1^2-x_2^2}{(c+x_1^2-x_2^2)^2+4x_1^2x_2^2} \text{ mit } z = x_1 + ix_2.$$

Mit $x_1^2 = x$ kommt man auf folgende E.T.A: Es ist $f(x) = \frac{1}{1+x}$ im Intervall $0 < x < \infty$ (mit der Abkürzung $b = c - 1$) zu approximieren durch

$$w(x) = a[(b+x)/((b+x)^2+4x)].$$

Diese (wiederum von den Herren Budde und Zimmermann dankenswerterweise ausgeführte Rechnung) ergab die Werte der Tabelle 2.

Tabelle 2

	E. T. A. von oben	E. T. A. von unten
a b	2.26080 2.13041	1 1
Extremwert von ε	$\varepsilon_{\max} = 0.0612$	$\varepsilon_{\min} = -0.322$
Extrema von ε bei	$x=0$ $x=0.4694$ $x=5.6690$	$x=0$ $x=0.3599$ $x=\infty$

Da hier w die Form (6.3) hat, ist die Theorie von Nummer 6 anwendbar. Die elementare Durchrechnung zeigt, daß die dort eingeführte Funktion $Q(x, b, \tilde{b})$ im Bereich $b, \tilde{b} \geqq 2$ für $0 < x < \infty$ stets streng monoton ist. Man hat also im Bereich $b \geqq 2$ die beste Tschebyscheff-Approximation von oben gefunden. Die Bedingung $b \geqq 2$ ist bei der Approximation von unten verletzt. Man sieht aber aus dem asymptotischen Verhalten für $x \to \infty$, daß man bei der Approximation von unten keinen größeren Wert als $b = 1$ verwenden kann. Man hat also auch in diesem Falle das Bestmögliche erreicht.

LITERATUR

1. J. Abadie. Nonlinear and integer programming. Proc. Congress, Ile de Bendor, 1970.
2. E. Bredendiek. Simultanapproximation. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **33** (1969), 307—330
3. L. Collatz. Aufgaben monotoner Art. *Arch. Math.*, **3** (1952), 366—376.
4. L. Collatz. Funktionalanalysis und Numerische Mathematik. Berlin, 1964.
5. L. Collatz. Tschebyscheffsche Approximation, Randwertaufgaben und Optimierungsaufgaben. *Wiss. Z. d. Hochschule für Architektur und Bauwesen, Weimar*, 12, (1965), 504—509.
6. L. Collatz. Nichtlineare Approximation bei Randwertaufgaben. *Wiss. Z. d. Hochschule für Architektur und Bauwesen*. Weimar, 1969.
7. L. Collatz. Application of nonlinear optimization to approximation problems. Proc. Congress, Ile de Bendor, 1970.
8. G. Freud. On a class of orthogonal polynomials. Proc. internat. Conf. Constructive Function Theory. Varna, 1970. Sofia, 1972. p. 177—182.

9. А. Н. Колмогоров. Замечание по поводу многочленов П. Л. Чебышева наименее уклоняющихся от заданной функций. *Успехи мат. наук*, **3** (1948), 1(23), 216—221.
10. G. Marzaglia. One-sided approximations by linear combinations of functions. Approximation Theory. (Internat. Symp. Univ. Lancaster, July 1969). London, 1970, p. 233—242.
11. G. Meinardus. Approximation von Funktionen und ihre numerische Behandlung Berlin, 1964.
12. T. Popoviciu. Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur (VI). *Revue math. de l'Union Interbalkanique*, **2** (1939), 31—40.
13. R. M. Redheffer. An Extension of Certain Maximum Principles. *Mh. Math. Phys.*, **66** (1962), 32—42.
14. W. Sippel. Einseitige Tschebyscheff-Approximation. Diss. Erlangen, erscheint demnächst.
15. L. L. Schumaker, G. D. Taylor. On approximation by polynomials having restricted ranges. *SIAM J. Numer. Anal*, **6** (1969), 31—36.
16. G. D. Taylor. Approximation by functions having restricted ranges III. *J. Math. Anal. Appl.*, **27** (1969), 241—248.
17. С. А. Чаплыгин, Д. И. Панов. *Известия АН СССР*, 1934.
18. L. Collatz, W. Wetterling. Optimierungsaufgaben. Berlin, 1966.

Eulenkrugstrasse 84
2 Hamburg 67 BRD

Eingegangen am 8. Juli 1970