Труды Международной Конференции
по конструктивной теории функций
Варна, 19—25 мая 1970

Proceedings of the International
Conference on Constructive Function
Theory, Varna, May 19—25, 1970

APPROXIMATION DES FONCTIONS HOLOMORPHES SUR CERTAINS FIBRES ET APPROXIMATION DES FONCTIONS HOLOMORPHES VECTORIELLES

S. Dimiev

Résumé. Le but de cet exposé est de montrer qu'on peut utiliser la liaison existante entre l'approximation des fonctions sur les fibrés localement trivials et l'approximation des fonctions vectorielles à valeurs dans un espace localement convexe complet. Dans le cas des fonctions holomorphes, en généralisant les théorèmes classiques de la théorie constructive des fonctions analytiques au cas vectoriel, on obtient des théorèmes d'approximation analogues pour certains espaces fibrés.

1. Rappel aux définitions. Un espace fibré (où plus brièvement un fibré) X de base S est déterminé par la donnée d'une application continue π: $X\to S$, X et S étant deux espaces séparés à base dénombrable. On note (X, π, S) le fibré déterminé par π: $X\to S$ et X_s la fibre $\pi^{-1}(s)$, $s\in S$, au-dessus du point s.

On dit qu'une structure de variété pré-mixte sur X est donnée, si sur chaque fibré X_s est donnée une structure de variété $\mathbb{C}$-analytique [1], ou de classe C^∞. Etant données deux variétées pré-mixtes (X,π, S) et (X',π', S') et encore une application continue $f_1: S\to S'$, alors un morphisme de variétés pré-mixtes au-dessus de f_1 est une application continue f: $X\to X'$, telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X' \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi'} \\ S & \xrightarrow[f_1]{} & S' \end{array}$$

soit commutatif et induise sur chaque fibre une application $\mathbb{C}$-analytique, ou de classe C^∞. Deux variétés pré-mixtes sont dites isomorphes si elles sont isomorphes dans la catégorie des variétés pré-mixtes.

Une variété fibrée mixte localement triviale (X, π, S) est une variété pré-mixte localement triviale, dont l'espace total X est une variété $\mathbb{C}$-analytique ou une variété de classe C^∞, la base S est une variété $\mathbb{C}$-analytique et l'application $\pi: X\to S$ est un morphisme dans la catégorie des variétés $\mathbb{C}$-analytiques ou dans la catégorie des variétés de classe C^∞.

On va considérer ici des variétés mixtes localement triviales dont la base est une surface de Riemann.

2. Approximation de fonctions sur un fibré localement trivial. Soit $F(X, \mathbb{C})$ un espace de fonctions f: $X\to\mathbb{C}$, définies sur le fibré localement trivial (X, π, S) de fibre type F, où F est une variété $\mathbb{C}$-analytique modelée dans l'espace vectoriel complexe E. Localement on peut présenter chaque fonction de $\boldsymbol{F}(X, \mathbb{C})$ comme une fonction de deux variables $f(s, t)$, où $s \in U$, $U \subset S$, U étant un ouvert homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{C}$ et $t \in V$, $V \subset F$, V étant un ouvert homéomorphe à un ouvert de E. Notons $E_{U\times V}$ l'ensemble des fonctions $f(s, t)$ considérées comme fonctions de t, s étant fixé dans U. L'application $U \to E_{U\times V}$, qui à chaque $s \in U$ associe la fonction $t \to f(s, t)$, est déterminée complètement par la donnée de l'espace $\boldsymbol{F}(U\times \boldsymbol{V}, \mathbb{C})$ des présentations sur $U \times V$ des fonctions de $\boldsymbol{F}(X, \mathbb{C})$. Notons $FV(U, E_{U\times V})$ l'espace de fonctions vectorielles $s \to f(s, t)$, $t \in V, f \in \boldsymbol{F}(U\times V, \mathbb{C})$. On reçoit alors l'application

$$\boldsymbol{F}(U\times V, \mathbb{C}) \xrightarrow{\Phi} FV(U, E_{U\times V}),$$

qui à chaque fonction $f \in \boldsymbol{F}(U\times V, \mathbb{C})$ associe une fonction vectorielle $\Phi(f)$ à valeurs dans l'espace $E_{U\times V}$.

Supposons maintenant que $E_{U\times V}$ est un espace localement convexe complet. Si $f_n \to f$, où $f_n, f \in \boldsymbol{F}(U\times V, \mathbb{C})$, dans la topologie de la convergence compacte sur U par rapport aux semi-normes de $E_{U\times V}$, alors $\Phi(f_n) \to \Phi(f)$. Inversement, si $\Phi(f_n) \to \Phi(f)$ dans le sens indiqué, alors $f_n \to f$ dans le même sens.

On voit ainsi que la question d'approximation d'une fonction de $\boldsymbol{F}(U\times V, \mathbb{C})$ peut être traiter à l'aide de $FV(U, E_{U\times V})$; au lieu d'approximer $f(s, t)$ sur $U\times V$ on peut approximer $\Phi(f)$ par des fonctions vectorielles sur U.

Soit K un compact de X. Remarquons qu'à l'aide d'une technique bien connue (partition de l'unité dans le cas C^0, C^∞), on peut toujours s'assurer l'existance de fonctions $\Phi(f_n)$, globalement définies sur le compact $\pi(K)$, telles que $f_n \to f$ dans la topologie uniforme sur K.

3. Formes vectorielles des théorèmes de Bischop et de Mergelyan. Soit S une surface de Riemann et $\boldsymbol{A}(S, E)$ l'espace des applications analytiques φ: $S \to E$, où E est un espace localement convexe complet. L'espace $\boldsymbol{A}(S, E)$ est aussi un espace localement convexe complet. Soit $\boldsymbol{A}'(S, E)$ un sous-espace de $\boldsymbol{A}(S, E)$.

Soit K un compact de S. Notons $\boldsymbol{A}'(K, E)$ l'espace des applications φ: $K \to E$, qui sont des limites uniformes sur K d'éléments de $\boldsymbol{A}'(S, E)$.

On va considérer des sous-espaces $\boldsymbol{A}'(S, E)$ de $\boldsymbol{A}(S, E)$ satisfaisant aux conditions suivants:

(i) $\boldsymbol{A}'(S, E)$ sépare les points de S et contient toutes les applications constantes.

(ii) Si $s \in S$, alors il existe une application $f \in \boldsymbol{A}'(S, E)$, telle que l'application linéaire $f'(s)$: $T_s \to E$ soit un monomorphisme de T_s dans E. (T_s est le plan tangeant de S dans le point s).

(iii) Notons $S(K, \boldsymbol{A}'(S, E))$ l'ensemble des points s de S, tels que $p(\varphi(s)) \leq \max_{s \in K} p(\varphi(s))$ pour chaque semi-norme p de E et pour chaque application $\varphi \in \boldsymbol{A}'(S, E)$. Alors on va supposer que $\boldsymbol{S}(K, \boldsymbol{A}'(S, E)) = K$.

On peut prouver que si l'espace $\boldsymbol{A}'(S, E)$ vérifie aux conditions (i), (ii) et (iii), alors $\boldsymbol{A}'(K, E)$ contient la restriction sur K de toute application analytique φ: $W \to E$, où W est un voisinage dans S de K.

Théorème. Toute application continue $\varphi \in \boldsymbol{C}(K, E)$, qui est analytique dans l'intérieur $\overset{\circ}{K}$ de K appartient à $\boldsymbol{A}'(K, E)$ [2].

Dans le cas du plan $\mathbb{C}$ et de l'espace $\boldsymbol{P}(\mathbb{C}, E)$ d'applications polynomiales $P\colon \mathbb{C} \to E (S=\mathbb{C},\ A'(\mathbb{C}, E)=\boldsymbol{P}(\mathbb{C}, E))$ on a que $A'(K, E)=\boldsymbol{P}(K, E)$. L'application $\boldsymbol{P}\colon \mathbb{C} \to E$ est dite polynomiale, si $P(z)=a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$, où $a_i \in E$, $i=0, 1, \ldots, n$, $z \in \mathbb{C}$.

Dans le cas particulier d'un compact $K, \mathring{K} \neq \emptyset$, à complément $\mathbb{C} \setminus K$ connexe, on reçoit une forme vectorielle du théorème de Mergelyan [3].

Théorème. Soit f une application de K dans E, continue sur K et analytique sur l'intérieur $\mathring{K}$ de K. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une application polynomialle $P\colon \mathbb{C} \to E$, telle que pour sa restriction sur K on a $p(f(z) - P(z)) < \varepsilon$ pour chaque semi-norme de l'espace E.

La démonstration du théorème énoncé est longue, mais elle suit de tout près la démonstration dans le cas scalaire.

4. Applications. On va montrer quelques applications du théorème énoncé dans 3.

4.1. Approximation sur les fibres holomorphes. Plus généralement on va considérer des variétés fibrées mixtes localement triviales, dont la base est une surface de Riemann. On en déduit de 2. et 3. un théorème d'approximation de fonctions continues, respectivement C^∞-différentiables, sur tout compact $K \subset X$, $\mathring{K} \neq \emptyset$, dépendant analytiquement de S sur la projection $\pi(\mathring{K})$ de $\mathring{K}$ dans la base S.

4.2. Approximation de distributions à un paramètre analytique. On va considérer maintenant des fibrés vectoriels localement triviales (X, π, S) dont la base S est une surface de Riemann et le fibré standard F est l'espace (D) des fonctions numériques indéfiniment dérivables à support compact sur une variété indéfiniment différentiable M. Une forme linéaire T sur (D), dépendant analytiquement d'un parametre $\lambda \in S$ peut être présentée localement comme une distribution $T_\lambda(\varphi)$, $\varphi \in (D)$, dépendant d'un paramètre λ, qui change dans un ouvert de $\mathbb{C}$ [4], [5].

Le théorème d'approximation de 3 s'applique dans ce cas et on reçoit qu'on peut approximer sur un compact de S, à l'intérieur non-vide, les distributions T_λ par des distributions polynomiales par rapport au paramètre λ.

4.3. Autres applications. Une autre application de la forme vectorielle du théorème de Mergelyan est donnée dans [6]. Elle est liée avec la théorie des algèbres fonctionelles.

RÉFÉRENCES

1. A. Douady. Variétés et espaces mixtes. Séminaire H. Cartan.
2. E. Bischop. Subalgebras of functions on a Riemann surface. *Pacific J. Math.*, 8 (1958), 29—50.
3. С. Н. Мергелян, Равномерное приближение функции комплексного переменного. *Успехи матем. наук*, 7 (1952), 2(48), 31—122.
4. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. Обобщенные функции, т. 1. М., 1959.
5. L. Schwartz. Théorie des distributions. Paris, 1966.
6. E. Briem, K. B. Laursen, N. W. Pedersen. Mergelyan's theorem for vector-valued functions with an application to slice algebras. Aarhus Universitet. December 1968. Preprint Series 1968/69, No. 18.

Institut de mathématique
Académie bulgare des Sciences
Sofia Bulgarie

Reçu le 17 juin 1970