Труды Международной Конференции по конструктивной теории функции Варна, 19—25 мая 1970

Proceedings of the International Conference on Constructive Function Theory, Varna, May 19—25, 1970

ÜBER OPTIMALE APPROXIMATIONSOPERATOREN

E. Görlich

Zusammenfassung. Es werden Approximationsoperatoren auf dem Raum $C_{2\pi}$ betrachtet, die vom Faltungstyp

$$(1)\qquad I_n(f;x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}p_n(x-t)f(t)dt,\ n=1,2,\ldots$$

sind, mit einem normierten, geraden und polynomialen Kern

$$(2)\qquad p_n(x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\varrho_{k,n}\cos kx.$$

Die optimale Approximationsgeschwindigkeit von $I_n(f;x)$ gegen $f(x)$ in der $C_{2\pi}$-Norm ist gegeben durch das Saturationsverhalten von $I_n(f;x)$, das sich im wesentlichen aus der Grenzwertbeziehung

$$(3)\qquad \lim_{n\to\infty}[(1-\varrho_{k,n})/(1-\varrho_{1,n})]=\psi(k),\quad k=0,1,2,\ldots;\quad \psi(k)\geqq 0;\quad \psi(0)=0$$

ablesen läßt. Betrachtet man eine Teilklasse von Approximationsverfahren (1), (2), für die ein Saturationssatz beispielsweise mit der Ordnung $1-\varrho_{1,n}=O(n^{-2})$ gültig ist,* so soll in diesem Vortrag untersucht werden, welche Aussagen für solch eine Klasse über die Gestalt der Funktion $\psi(k)$ gemacht werden können, eventuell unter zusätzlichen Einschränkungen, etwa für den Fall $p_n(x)\geqq 0$.

Um an ein Problem anknüpfen zu können, das in [7], [8] gestellt wurde, benötigen wir folgende Bezeichnungen:

D e f i n i t i o n. Das Verfahren (1) mit nichtnegativem Kern (2) heißt optimal, falls $1-\varrho_{1,n}=O(n^{-2})$ und quasi-optimal, falls eine Funktion $f_0(x)\neq\text{const}$ in $C_{2\pi}$ existiert derart, daß

$$\|f_0(x)-I_n(f;x)\|_{C_{2\pi}}=O(n^{-2}).$$

Bezeichnen wir mit (M), (S) die folgenden Eigenschaften des Kerns (2):

$$(\mathrm{M})\qquad M(p_n;4)=o(M(p_n;2)),$$

wobei die Momente durch $M(p;\sigma)=I_n(t^\sigma;0)$, $\sigma=1, 2$, definiert sind, bzw.

* Im folgenden sind O- und o-Beziehungen stets für $n\to\infty$ zu verstehen.

(S) $I_n(f;x)$ ist saturiert in $C_{2\pi}$ mit der Ordnung $O(n^{-2})$ und der Saturationsklasse $\{f\in C_{2\pi};\ f'\in \mathrm{Lip}\ 1\}$, so lautet das genannte Problem:

a) Gelten stets die Implikationen: optimales Verfahren (1) $\Rightarrow$ (M) $\Rightarrow$ (S)? Oder, in allgemeinerer Form:

b) Folgt für quasi-optimale Verfahren (1) stets (S)?

Lösungen dieser Probleme wurden inzwischen von R. DeVore [4], [5] gegeben; und zwar ist für optimale Verfahren stets (S) erfüllt, jedoch (M) im allgemeinen nicht. Die Antwort auf Frage b) ist ebenfalls positiv mit einer gewissen Einschränkung gegenüber der in (S) angegebenen Saturationsklasse, siehe [4]. In [4] wurde ferner ein Beispiel eines Approximationsoperators der Form (1), (2) gegeben, der quasioptimal, aber nicht optimal ist, sowie in [5] ein weiteres neues optimales Verfahren mit dem Kern

$$p_n(t)=\frac{n^2}{n^2+1}\left\{K_n(t)+\frac{1}{2n^2}\left[K_n(t+\pi),\ +K_n(t-\pi)\right]\right\} \tag{4}$$

wobei $K_n(t)=\frac{3}{2n(2n^2+1)}\left\{\sin\frac{nt}{2}\,/\,\sin\frac{t}{2}\right\}^4$ der Jackson-Kern von der Ordnung $2n-2$ ist.

Dieses Verfahren erfüllt somit die Eigenschaft (S) und außerdem (3) mit

$$\psi(k)=\frac{3}{2}k^2+\begin{cases} 2, & k \text{ ungerade,}\\ 0, & k \text{ gerade,}\end{cases} \tag{5}$$

woraus wegen [7, Satz 1] bereits folgt, daß die erste Implikation unter a) nicht richtig ist. Ein Beispiel eines optimalen Verfahrens, bei dem $\psi(k)$ von der Form (5) ist und zusätzlich ein additiver Term $|k|$ auftritt, scheint bisher nicht bekannt zu sein.*

Für die Lösung des Problems a) wurde in [4] das folgende Zemma aufgestellt:

Lemma. Ist $p_n(x)\geqq 0$ und von der Form (2), so gilt für $n=1,2,\ldots$ und $1\leqq k\leqq n$ stets

$$1-\varrho_{kn}\geqq C_0k^2/n^2,$$

wobei C_0 eine absolute Konstante ist.

Dies wird in [4] aus einer Ungleichung von Curtis [3]

$$E_n(|\sin kx|)\geqq\frac{k}{8\pi n},\quad k\geqq 1;\quad n=1,2,\ldots,$$

gefolgert. Wir geben hier einen einfacheren Beweis des Lemmas mit Hilfe eines bekannten Resultats von Egervàry und Szàsz [6] und Szegö [13]

Beweis. Nach [6], [13] gilt unter den Voraussetzungen des Lemmas

$$|\varrho_{k,n}|\leqq\cos\frac{\pi}{\left[\frac{n}{k}\right]+2}. \tag{6}$$

Verwendet man den Mittelwertsatz in der Form $\cos t=1-(t^2/2)\cos\vartheta t$, $0<\vartheta<1$, so folgt

* Für nicht-optimale Verfahren mit nichtnegativem Kern (2) ist dies dagegen leicht zu erreichen; z. B. ergibt die Kombination $\varrho_{k,n}=\{(1-k/n)+(n!)^2/(n-k)!\,(n+k)!\}/2,\ 0\leqq k\leqq n$, aus den Konvergenzfaktoren von Fejér und de La Vallée Poussin die Konvergenzfaktoren eines neuen Verfahrens, das die ψ-Funktion $(k^2+|k|)/2$ besitzt.

$$1-\varrho_{k,n} \geq 1-\cos\frac{\pi}{\left[\frac{n}{k}\right]+2} \geq \frac{1}{2}\left\{\frac{\pi}{\left[\frac{n}{k}\right]+2}\right\}^2 \cos\frac{\vartheta\pi}{\left[\frac{n}{k}\right]+2},$$

und weiter wegen $[n/k] \leqq n/k$ und $\vartheta\pi/([n/k]+2) \leqq \pi/3$:

$$1-\varrho_{k,n} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{\pi k}{n+2k}\right)^2 \cos\frac{\pi}{3} \geq \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 \frac{k^2}{n^2}.$$

Damit ergibt sich für C_0 der gegenüber [4] ($C_0=1/128\pi^2$) verbesserte Wert $C_0=(\pi/6)^2$, und das Lemma ist bewiesen.

Ist außerdem (3) erfüllt und ist das Verfahren optimal, d. h. existiert eine Konstante $c_S>0$ mit

(7) $$\lim_{n\to\infty} n^2(1-\varrho_{1,n})=c_S,$$

so folgt aus (6) weiter $c_S\psi(k) \geq \frac{\pi^2}{2} k^2$. Die hier auftretende Konstante $\pi^2/2$ ist bestmöglich für optimale Kerne der Form (2), da nach [7, Satz 4] dann wegen $\psi(k)=k^2$ folgt, daß $2c_S$ gleich der Nikolskiĭ-Konstante c_N des Verfahrens für die Klasse $\{f\in C_{2\pi};\ f'\in \mathrm{Lip}_2^* 2\}$ ist und für diese Kerne $c_N \geqq \pi^2$ gilt.*

Berücksichtigt man weiter, daß für jeden nichtnegativen Kern (2) gilt $(1-\varrho_{k,n})/(1-\varrho_{1,n}) \leqq (\pi/2)^2 k^2$, so ergibt sich das folgende Lemma als Antwort auf die eingangs gestellte Frage nach generellen Merkmalen der Funktion $\psi(k)$ für eine bestimmte Klasse von Kernen:

Lemma. Für jeden nichtnegativen Kern der Form (2), der (3) und (7) mit $c_S>0$ erfüllt, also optimal ist, gilt

(8) $$\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 c_S k^2 \geqq c_S\psi(k) \geqq \frac{\pi^2}{2} k^2, k=0,1,2\ldots$$

Zum Schluß eine Bemerkung zur Situation im nicht-optimalen Fall: Ist der Kern lediglich gerade, normiert und polynomial, d. h. von der Form (2) so bleiben selbstverständlich die obigen Aussagen i. a. nicht richtig. Deshal ist die Frage nach der Gestalt der ψ-Funktion jetzt nur sinnvoll unter deb Voraussetzung, daß (3) gilt und daß das Verfahren saturiert ist mit der Ordrnung $O(1-\varrho_{1,n})$ und der Klasse $\{f\in C_{2\pi};\ \psi(k)f^\wedge(k)=g^\wedge(k);\ g\in L_{2\pi}^\infty\}$, wobei $f^\wedge(k)$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$, die komplexen Fourierkoeffizienten von f sind. Macht man weiter die Einschränkung, daß $1-\varrho_{1,n}=O(n^{-\tau})$ und $\psi(k)=|k|^\varkappa$ für zwei Zahlen $\varkappa, \tau>0$ sein soll, so reduziert sich die Frage nach der Gestalt von $\psi(k)$ auf die Frage nach einer Beziehung zwischen $\varkappa$ und τ. Die Antwort ist, daß stets

(9) $$\varkappa \geqq \tau$$

sein muß. Dies ist eine triviale Folgerung aus einem Satz von S. B. Stečkin [11], der in der Formulierung von G. Sunouchi [12] (vgl. auch [1, S. 389]) lautet: Unter den genannten Voraussetzungen an das Verfahren sind die Bedingungen $E_n[f]=O(n^{-\alpha})$ für ein $\alpha\in(0,2)$ und $\|f(x)-I_n(f;x)\|_{C_{2\pi}}=O(n^{-\alpha\tau/\varkappa})$ äquivalent. Daraus folgt unmittelbar (9), da die Approximation

---

* Übrigens wird die minimale Nikolskiĭ-Konstante $c_N=\pi^2$ nicht nur von dem Verfahren von Fejér-Korovkin, sondern auch von dem Kern von Bohman — Zheng Wei-Xing angenommen (siehe [7, S. 37]), so daß die Bestimmung eines Verfahrens mit kleinstem c_N bezüglich $f'\in \mathrm{Lip}_2^* 2$ nicht eindeutig ist

von f durch $I_n(f;\,x)$ nicht besser als die beste trigonometrische Approximation sein kann.

Zu dieser Klasse von Approximationsverfahren gehören insbesondere die von E. L. Stark [9], [10] behandelten Verfahren, deren Kerne eine vor-

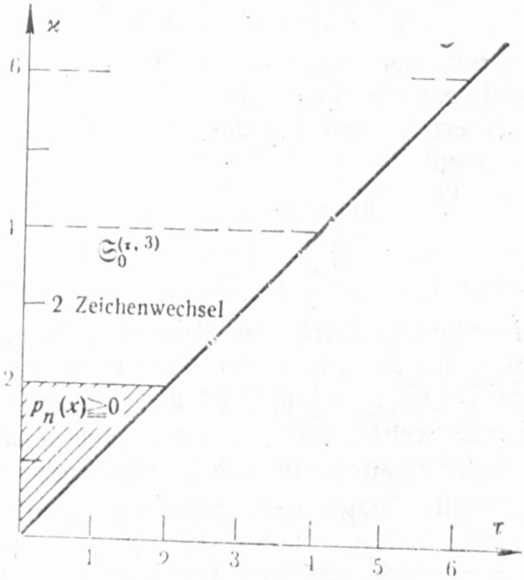

Abb. 1

geschriebene gerade Anzahl von Vorzeichenwechseln in $[-\pi, \pi]$ besitzen. Nach P. L. Butzer, R. J. Nessel und K. Scherer [2] gilt z. B. bei zwei Zeichenwechseln in Analogie zu dem bekannten Ergebnis von P. P. Korovkin für positive polynomiale Verfahren, daß die Saturationsordnung bestenfalls $O(n^{-4})$ sein kann. Ob dann stets auch für die ψ-Funktion $\psi(k)=c_S\,|k|^{\varkappa}$ die Aussage $\varkappa\leq 4$ gültig ist, scheint nicht bekannt zu sein. Jedenfalls ergibt die von E. L. Stark [10] betrachtete Klasse $\mathfrak{S}_0^{(\tau,3)}$ von polynomialen Verfahren mit zwei Zeichenwechseln in der Tat nur ψ-Funktionen der Form $\sum_j c_j\,|k|^{\varkappa_j}$ mit $0<\varkappa_j\leq 4$.

Zur Veranschaulichung der Situation im Falle $1-\varrho_{1,n}=O(n^{-\tau})$, $\psi(k)=|k|^{\varkappa}$ mag die obige Abd. 1 dienen. Dort bezeichnet das schraffierte Dreieck die möglichen Werte für $\varkappa$ und τ im Falle nichtnegativer Kerne der Form (2). Wegen (9) können auch alle anderen Kerne der Form (2), für die ein Saturationssatz gilt, nur $(\varkappa, \tau)$-Werte auf oder oberhalb der Geraden $\varkappa=\tau$ besitzen. Es bleibt die Frage offen, ob oder gegebenenfalls unter welchen Einschränkungen für Verfahren mit zwei Zeichenwechseln eine Ungleichung der Form (8) richtig ist, d. h. ob Konstanten c_1, c_2, $c_3>0$ existieren, so daß

$$c_1 k^4 \geq c_2\psi(k) \geq c_3 k^4$$

gilt, und ob analog zu (8) eine Beziehung zwischen c_3 und der kleinsten Nikolskiĭ-Konstante für die Klasse $\{f\in C_{2\pi};\ f''\in \mathrm{Lip}^*2\}$ besteht. Wie in [10, S. 64] bemerkt wurde, ist in diesem Zusammenhang das Problem von

Bequtung, den Kern mit zwei Zeichenwechseln explizit zu bestimmen, der die kleinste Nikolskiĭ-Konstante annimmt.

Für zahlreiche Hinweise und wertvolle Diskussionen möchte ich abschließend den Herren Prof. Dr. P. L. Butzer und Dr. E. L. Stark danken.

LITERATUR

1. P. L. Butzer, E. Görlich. Saturationsklassen und asymptotische Eigenschaften trigonometrischer singulärer Integrale. Festschrift z. Gedächtnisfeier f. K. Weierstrass, Köln, 1965.
2. P. L. Butzer, R. J. Nessel, K. Scherer. Trigonometric convolution operators with kernels having alternating signs and their degree of convergence. *Jahresber. Dtsch. Math. Ver.*, **70** (1967), 86—99.
3. Ph. C. Curtis, Jr. The degree of approximation by positive convolution operators. *Mich. Math. J.*, **12** (1965), 155—160.
4. R. DeVore. Saturation of positive convolution operators. *J. Approx. Theory*, **3**(1970), 410—429.
5. R. DeVore. On a saturation theorem of Tureckii. (im Druck).
6. E. V. Egerváry, O. Szász. Einige Extremalprobleme im Bereiche der trigonometrischen Polynome. *Math. Z.*, **27** (1928), 641—652.
7. E. Görlich, E. L. Stark. Über beste Konstanten und asymptotische Entwicklungen positiver Faltungsintegrale und deren Zusammenhang mit dem Saturationsproblem. *Jahresber. Dtsch. Math. Ver.*, **72** (1970), 18—61.
8. E. Görlich, E., L. Stark. A unified approach to three problems on approximation by positive linear operators. In: Proceedings of the Conference on Constructive Theory of Functions, Budapest, 1969. (im Druck).
9. E. L. Stark. On approximation improvement for trigonometric singular integrals by means of finite oscillation kernels with separated zeros. In: Proc. Internat. Conf. Constructive Function Theory, Varna, 1970. Sofia, 1972. p. 337—344.
10. E. L. Stark. Über trigonometrische singuläre Faltungsintegrale mit Kernen endlicher Oszillation. Dissertation, Aachen 1970, 85 S.
11. С. Б. Стечкин. О приближении периодических функций суммами Фейера. *Труды Матем. ин-та АН СССР*, **62** (1961), 48—60.
12. G. Sunouchi. Saturation in the theory of best approximation. In: On approximation theory (Proc. Oberwolfach Conference), ISNM, vol. 5. Basel, 1964. p. 72—88.
13. G. Szegö. Koeffizientenabschätzungen bei ebenen und räumlichen Entwicklungen. *Math. Ann.*, **96** (1927), 601—632.

Lehrstuhl A für Mathematik
Technische Hochschule Aachen
51 Aachen BRD

Eingegangen am 6. Juli 1970