Труды Международной Конференции
по конструктивной теории функций
Варна, 19—25 мая, 1970

Proceedings of the International
Conference on Constructive Function
Theory, Varna, May 19—25, 1970

ÜBER DIE LAGUERRE'SCHEN GANZEN FUNKTIONEN

L. G. Iliev

Zusammenfassung. Es bezeichne T_1 bzw. T_2 die Klasse der Funktionen, welche Polynome mit nichtpositiven, bzw. reellen Nullstellen, oder in jedem endlichen Bereich Grenzen solcher Polynome sind. T_2 enthält T_1.

Die Folgen $\{Q_n\}$, $\{R_n\}$ und $\{S_n\}$ von (1) genügen den Turán'schen Ungleichungen für beliebige reelle Werte von $x_1, x_2, \ldots, x_s$.

Bei $s=2$ wird eine einfache Begründung der Theorie mancher spezieller Funktionen gegeben.

Turán [1] hat für die Legendreschen Polynome $\{P_n(x)\}$ die bekannten Ungleichungen

$$P_n^2(x)-P_{n-1}(x)P_{n+1}(x)\geqq 0, \quad -1\leqq x\leqq 1, \quad n=1, 2, \ldots$$

bewiesen, welche weiter untersucht und verallgemeinert worden sind.

Es bezeichne T_1 bzw. T_2 die Klasse der Funktionen, welche Polynome mit nichtpositiven bzw. reellen Nullstellen, oder in jedem endlichen Bereich Grenzen solcher Polynome sind. Es ist $T_1\subset T_2$.

Es sei

$$f_k(z)\in T_2, \quad k=1, 2, \ldots, s,$$

und

$$Q(z)=\prod_{k=1}^{s} f_k(x_k+z)=\sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x_1, x_2, \ldots, x_s)\frac{z^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty} Q_n\frac{z^n}{n!},$$

(1) $$R(z)=\prod_{k=1}^{s} f_k(x_k z)=\sum_{n=0}^{\infty} R_n(x_1, x_2, \ldots, x_s)\frac{z^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty} R_n\frac{z^n}{n!},$$

$$S(z)=\prod_{k=1}^{p} f_k(x_k+z)\prod_{k=p+1}^{s} f_k(x_k z)=\sum_{k=0}^{\infty} S_n(x_1, x_2, \ldots, x_s)\frac{z^n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty} S_n\frac{z^n}{n!}.$$

Wenn man die Ergebnisse von Laguerre [2], Jensen [3] und Pólya und Schur [4] über die Folgen erster und zweiter Art und über die ganzen Funktionen vom Typ I und Typ II im Betracht nimmt, so bekommt man:

Satz 1. Die Folgen $\{Q_n\}$, $\{R_n\}$ und $\{S_n\}$ genügen der Turán'schen Ungleichungen für beliebige reelle Werte von $x_1, x_2, \ldots, x_s$.

1. Wie bekannt [5] gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)\frac{z^n}{n!}=e^{xz}\cos(z\sqrt{1-x^2}),\quad -1\leq x\leq 1; \tag{2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\frac{z^n}{n!}=e^{xz}J_0(z\sqrt{1-x^2}),\quad -1\leq x\leq 1; \tag{3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_n^{(\lambda)}(x)\,z^n}{P_n^{(\lambda)}(1)\,n!}=2^{\lambda-\frac{1}{2}}\,\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)e^{xz}(z\sqrt{1-x^2})^{\frac{1}{2}-\lambda}J_{\lambda-\frac{1}{2}}(z\sqrt{1-x^2}), \tag{4}$$
$$-1\leq x\leq 1;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n^{(\alpha)}(x)}{\Gamma(n+\alpha+1)}z^n=e^z(xz)^{-\frac{\alpha}{2}}J_\alpha(2\sqrt{xz}),\quad -\infty<x<\infty; \tag{5}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{z^n}{n!}=e^{2xz}e^{-z^2},\quad -\infty<x<\infty, \tag{6}$$

wo bei der Normierung

$$\frac{P_n^{(\lambda)}(x)}{P_n^{(\lambda)}(1)}=P_{n,\lambda}(x),\qquad \frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}L_n^{(\alpha)}(x)=L_{n,\alpha}(x), \tag{7}$$

$T_n(x)$, $P_n(x)$, $P_{n,\lambda}(x)$, $L_{n,\alpha}(x)$ und $H_n(x)$ entsprechend die Tschebyscheffschen, Legendreschen, ultrasphärischen, Laguerreschen und Hermiteschen Polynome bedeuten.

Da in den gekennzeichneten Intervallen $e^{xz}\cos(z\sqrt{1-x^2})\in T_2$,

$e^{xz}J_0(z\sqrt{1-x^2})\in T_2$, $(z\sqrt{1-x^2})^{\frac{1}{2}-\lambda}J_{\lambda-\frac{1}{2}}(z\sqrt{1-x^2})\in T_2$ wenn $\lambda>-1/2$

$e^z(-\sqrt{xz})^{-\alpha}J_\alpha(-2\sqrt{xz})\in T_1$ wenn $\alpha>-1$, $e^{2xz}e^{-z^2}\in T_2$ gilt, so bekommt man den Satz [6]:

Satz 2. Unter den Einschränkungen in (2), (3), (4), (5) und (6) genügen $\{P_n(x)\}$, $\{T_n(x)\}$, $\{P_{n,\lambda}(x)\}$, $\{H_n(x)\}$ und $\{L_{n,\alpha}(-x)\}$, sowie für jede nichtnegative ganze Zahl r und jedes positive bzw. reelle x die Ableitungen $\left\{\frac{d^r}{dx^r}L_{n,\alpha}(-x)\right\}$ bzw. $\left\{\frac{d^r}{dx^r}H_n(x)\right\}$ den Turán'schen Ungleichungen.

Der letzte Teil der Behauptungen in Satz 2 folgt aus der Tatsache, daß die Ableitungen von (5) und (6) in bezug auf x, als Funktionen von z betrachtet, zu den Klassen T_1 bzw. T_2 gehören.

Ähnlich sind Ergebnisse für die Ableitungen der anderen oben betrachteten Polynomenfolgen zu erhalten.

Verschiedene neue sowie bekannte Ergebnisse sind leicht zu bekommen. Das Ergebnis von Laguerre $[f^{(k)}(x)]^2-f^{(k-1)}(x)f^{(k+1)}(x)\geq 0$, $-\infty<x<+\infty$, $f(x)\in T_2$ sowie Verallgemeinerungen folgen, z. B. aus der Tatsache: wenn

$f(z) \in T_2$, bzw. $f(z) \in T_1$ so ist $f(x+z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} z^k \in T_2$ für alle reelen Werte von x, bzw. $f(z+x) \in T_2$ für alle positive x.

2. Für $s=2$ bekommt man auch [7] eine einfache Begründung der Theorie mancher spezieller Funktionen.

Es sei

$$f_1(z) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{1!} z + \frac{\alpha_2}{2!} z^2 + \cdots,$$

$$f_2(z) = \beta_0 + \frac{\beta_1}{1!} z + \frac{\beta_2}{2!} z^2 + \cdots,$$

also

$$R_n(x_1, x_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \alpha_{n-k} \beta_k x_1^{n-k} x_2^k, \quad n=1, 2, \ldots,$$

$$S_n(x_1, x_2) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \beta_k x_2^k f_1^{n-k}(x_1), \quad n=1, 2, \ldots$$

Man setze

$$\widetilde{S}_n(x_1, x_2) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \beta_k x^{n-k} f_1^{(k)}(x_1), \quad n=1, 2, \ldots$$

Ist $f_1(x) \in T_1$ und $f_2(x) \in T_2$, so bekommt man:

Satz 3. Die Polynome $R_n(1, x)$, $R_n(x, 1)$, $R_n(1-x, 1+x)$, $R_n(x, \sqrt{1-x^2})$ wenn $f_2(z) = f_2(-z)$ und $R_n(x, \sqrt{1-x^2})/\sqrt{1-x^2}$ wenn $f_2(z) = -f_2(-z)$ haben nur reelle Nullstellen.

Satz 4. Die einzigen orthogonalen Polynomensysteme unter den Polynomenfolgen $\{R_n(1, x)\}$ sind die Folgen $\{L_n, \alpha(x)\}$, $\alpha > -1$, von Laguerreschen Polynomen.

Satz 5. Unter allen Systeme $\{R_n(x, 1)\}$ bilden nur die Hermitschen Polynome $\{H_n(x)\}$ ein Orthogonalsystem.

Satz 6. Die einzigen orthogonalen Systeme unter den Systemen $\{R_n(x, \sqrt{1-x^2})\}$, $f_2(z) = f_2(-z)$, sind die ultrasphärischen Polynomen $\{P_n, \lambda(x)\}$, $\lambda > -1/2$.

Satz 7. Aus $f_1(z) \in T_2$, $f_2(z) \in T_2$ folgt $S_n(x, 1) \in T_2$, $\widetilde{S}_n(x, 1) \in T_2$.

Satz 8. Aus $f_1(z) \in T_2$, $f_2(z) \in T_1$ folgt $S_n(x, x) \in T_2$, $\widetilde{S}_n(x, x) \in T_2$.

Satz 9. Für $n > 0$ und beliebige reele $x \neq 0$ folgt

$$J_n^2(x) - J_{n-1}(x) J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x) J_n(x) x^{-1} \geq 0, \tag{8}$$

worin $J_n(x)$ die entsprechende Besselsche Funktion ist.

Es bezeichne $P(T_2)$ die Gesamtheit der Funktionen $f(z) \in T_2$, die sich in der Form

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, e^{itz}\, dt, \quad f^{(k)}(z) = i^k \int_{-\infty}^{\infty} t^k \varphi(t)\, e^{itz}\, dt, \quad k=1, 2, \ldots, \tag{9}$$

darstellen lassen.

Es sei

$$P_n(z)=\alpha_0 z^n+\binom{n}{1}\alpha_1 z^{n-1}+\cdots+\alpha_n;\ P_n(x_1, x_2)=x_1^n P_n\left(\frac{x_2}{x_1}\right), \quad n=1, 2, \ldots,$$

$$P_n^*(z)=\beta_0 z^n+\binom{n}{1}\beta_1 z^{n-1}+\cdots+\beta_n;$$

$$P_n^*(x_1, x_n)=x_1^n P_n^*\left(\frac{x_2}{x_1}\right), \quad n=1, 2, \ldots$$

Man bekommt:

Satz 10. Ist $f_1(z)\in T_2$, $f_2(z)\in P(T_2)$, $f_2(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\, e^{itz}\, dt$, so ist

$$R_n(x_1, x_2)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(t) P_n(x_1, itx_2)\, dt, \quad n=1, 2, \ldots .$$

Satz 11. Ist $f_1(z)\in P(T_2)$, $f_1(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\, e^{itz}\, dt$, $f_2(z)\in T_2$, so ist

$$S_n(x_1, x_2)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\, e^{itx_1} P_n^*(x_2, it)\, dt, \quad n=1, 2, \ldots,$$

$$\widetilde{S}_n(x_1, x_2)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\, e^{itx_1} P_n^*(it, x_2)\, dt, \quad n=1, 2, \ldots$$

3. Die Klasse $P(T_2)$ von ganzen Funktionen, die sich in der Form (9) bringen, ist in einer Reihe von Veröffentlichungen betrachtet.

Anlaß zu diesem Problem, wie G. Pólya [8] bemerkte, gab der Umstand, daß es B. Riemann gelungen war, die von ihm in die Primzahltheorie eingeführte Funktion ξ durch ein Integral von der Form (9) darzustellen. Die Fragestellung selbst wurde von J. L. W. V. Jensen [3] erwähnt. Die ersten allgemeinen Ergebnisse in dieser Richtung erhielt G. Pólya, der feststellen konnte, daß die Funktionen

$$U(z)=\int\limits_0^1\varphi(t)\cos tz\, dt \tag{10}$$

und

$$V(z)=\int\limits_0^1\varphi(t)\sin tz\, dt \tag{11}$$

lauter reele Nullstellen besitzen, unter der einzigen Bedingung, daß $\varphi(t)$ eine im Intervall $(0, 1)$ positive und wachsende Funktion ist; diese Nullstellen sind einfach, falls $\varphi(t)$ strikt zunimmt.

Es sei erwähnt, daß viele Funktionen in der theoretischen Physik sich in der Form (10) oder (11) bringen lassen.

Wenn $\varphi(t)$ eine im Intervall $(0, \infty)$ abnehmende, im Intervall $(-\infty, \infty)$ gerade Funktion ist, werden die bisherigen Ergebnisse auf einzelne Beispiele zurückgeführt. So haben die ganzen Funktionen

$$\int_{-1}^{1} (1-t^{2q})^p \cos tz\, dt \tag{12}$$

und

$$\int_{0}^{\infty} e^{-z^{2q}} \cos tz\, dt \tag{13}$$

(worin $q>1$ eine ganze Zahl und $p>-1$ eine beliebige Zahl bedeuten) nur reelle und einfache Nullstellen [8].

Im vorliegenden zeigt man zuerst Klassen abnehmender Funktionen $\varphi(t)$, für welche die entsprechenden Funktionen (10) lauter reelle Nullstellen besitzen.

So bekommt man zuerst

Satz 12. Es sei q eine ganze positive Zahl. Ist die im Intervall $(0, 1)$ definierte nichtnegative Funktion $f_0(t)$ eine derartige, daß die ganze Funktion

$$\int_{0}^{1} f_0(t) \cos tz\, dt \tag{14}$$

lauter reelle Nullstellen (bzw. nur reelle und einfache Nullstellen) hat, so setzt man

$$x = 1 - t^{2q}, \quad \varphi_0(x) = f_0(t),\ f_1(t) = \varphi_1(x) = \int_{0}^{x} \varphi_0(x)\, dx. \tag{15}$$

Dann besitzt die ganze Funktion

$$\int_{0}^{1} f_1(t) \cos tz\, dt \tag{16}$$

lauter reelle Nullstellen (bzw. nur reelle und einfache Nullstellen). Aus diesem erhält man die

F o l g e r u n g. Ist die nichtnegative Funktion $\varphi_0(x)$ im Intervall $(0, 1)$ abnehmend (bzw. strikt abnehmend) und setzt man

$$f_n(t) = \varphi_n(x) = \int_{0}^{x} \varphi_{n-1}(x)\, dx,\ f_0(t) = \varphi_0(x),\ x = 1 - t^{2q} \tag{17}$$

so hat die Funktion

$$(18) \qquad \int_0^1 f_n(t) \cos tz \, dt$$

lauter reelle (bzw. nur reelle und einfache) Nullstellen, und zwar für alle ganzen positiven Werte von n und q.

Der Beweis von Satz 12 ist sehr einfach. Es ist

$$(19) \qquad \frac{d^{2q-1}}{dz^{2q-1}} \int_0^1 f_0(t) \cos tz \, dt = (-1)^{q-1} \int_0^1 \varphi_0(x) t^{2q-1} \sin tz \, dt$$

$$= \frac{(-1)^q}{2q} \int_0^1 \varphi_0(x) \sin tz \, dt = \frac{(-1)^q}{2q} \int_0^1 \sin tz \, d\varphi_1(x)$$

$$= \frac{(-1)^q}{2q} \sin tz \, . \, \varphi_1(x) \Big|_0^1 + \frac{(-1)^q}{2q} z \int_0^1 \varphi_1(x) \cos tz \, dt = \frac{(-1)^{q+1}}{2q} \int_0^1 f_1(t) \cos tz \, dt.$$

Da die Funktion (14) eine Ordnung $\varrho \leqq 1$ hat, so ist nach den bekannten Sätzen die Behauptung wahr.

Es sei weiter $E(a)$ die Gesamtheit der Funktionen $f(t)$, die im Intervall $(0, a)$, $a > 0$, nichtnegativ, R-integrierbar sind und der Bedingung genügen, daß die ganze Funktion

$$(20) \qquad F(z) = \int_0^a f(t) \cos tz \, dt$$

nur reelle Nullstellen besitzt.

Es sei $x = x(t)$ ein reelles, gerades Polynom von t oder auch eine reelle gerade ganze Funktion, so daß: $a)$ $x(a) = 0$, $b)$ $x'(it) \in T_2$.

Man bekommt, daß in jedem der Intervalle $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ die Funktion $x(t)$ entweder streng wachsend oder streng abnehmend ist. Dabei besitzt $x(t)$ nur zwei reelle und einfache Nullstellen und zwar $t_1 = a$ und $t_2 = -a$.

Es sei $A(a)$ die Klasse der reellen, geraden Funktionen $x(t)$, die den Bedingungen a) und b) genügen.

Gemäß den erwähnten Eigenschaften hat jede Funktion $x(t) \in A(a)$ eine im Intervall $[0, a]$ inverse Funktion $t = t(x)$.

Es sei $f_0(t) \in E(a)$, $x(t) \in A(a)$ und $t = t(x)$ die inverse Funktion von $x(t)$ im $[0, a]$.

Man setze

$$(21) \qquad \varphi_0(x) = f_0(t), \; f_1(t) = \varphi_1(x) = \int_0^x \varphi_0(v) \, dv$$

und bezeichne der Kürze wegen,

$$(22) \qquad f_1(t) = Z(t_0, x).$$

Es gilt

Satz 13. Wenn $f_0(t) \in E(a)$, $x(t) \in A(a)$ und $f_1(t) = Z(f_0, x)$, so ist $f_1(t) \in E(a)$.

Der Beweis ist ebenso einfach, wie bei Satz 12. Ist nämlich $f_0(t) \in E(a)$, so besitzt die ganze Funktion

$$f_0(z) = \int_0^a f_0(t) \cos tz \, dt$$

nur reelle Nullstellen. Man setze $f_0(-t) = f_0(t)$ für $0 \leq t \leq a$. Dann ist

$$F_0(z) = \frac{1}{2} \int_0^a f_0(t) \, e^{itz} \, dt.$$

Gemäß der Bedingung b) und einen Ergebnis von Pólya hat auch die ganze Funktion

$$\int_{-a}^{a} f_0(t) \, e^{itz} \, dt = 2i \int_0^a f_0(t) \, x'(t) \sin tz \, dt$$

lauter reelle Nullstellen.

Es ist

$$\int_0^a f_0(t) \, x'(t) \sin tz \, dt = \int_{t=0}^{t=a} \varphi_0(x) \sin tz \, dx = \int_{t=0}^{t=a} \sin tz \, d\varphi_1(x)$$

$$= \varphi_1(x) \sin tz \Big|_{t=0}^{t=a} - z \int_0^a \varphi_1(x) \cos tz \, dz = -z \int_0^a f_1(t) \cos tz \, dt$$

da $\varphi_1[x(a)] = \varphi_1(0) = 0$. Der Satz ist bewiesen.

F o l g e r u n g. Wenn $x(t) \in A(a)$, $x(0) > 0$ und $\lambda > -1$ besteht, so hat die ganze Funktion

$$\int_0^a x^\lambda \cos tz \, dt \tag{23}$$

nur reelle Nullstellen.

Das Resultat von Pólya bezüglich der Funktion (12) bekommt man bei $x = 1 - t^{2q}$.

Allgemeiner erhält man

Satz 14. Wenn $f(t)$ eine nichtnegative, gerade Funktion bezeichnet, so daß $f'(it) \in T_2$, so besitzt die ganze Funkiion

$$\int_0^\infty e^{-f(t)} \cos tz \, dt \tag{24}$$

nur reelle Nullstellen.

Die Funktion $f(t)=a \operatorname{ch} t=\frac{a}{2}(e^t+e^{-t})$, $a>0$, genügt den Bedingungen von Satz 14. So bekommt man aus diesem Satz das Ergebnis von Pólya, nach dem die ganze Funktion

$$\int_0^\infty e^{-a \operatorname{ch} t} \cos tz\, dt \tag{25}$$

lauter reelle Nullstellen besitzt.

LITERATUR

1. G. Szegö. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **54** (1948), 401—405.
2. E. Laguerre. Oeuvres. I, 31—35, 199—206.
3. J. L. W. V. Jensen. *Acta Math.*, **36** (1912), 181—195.
4. G. Pólya, I. Schur. *J. reine u. angew. Math.*, **144** (1914), 89–113.
5. G. Szegö. Orthogonal Polynomials. New York, 1959.
6. L. Ilieff. *C. R. Acad. Bulg. Sci.* **17**, (1964) No. 8.
7. L. Ilieff, *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, **17** (1964) No 9; **18** (1965) No. 1; **18** (1965) No. 4; **19**, (1966) No. 2; **19** (1966) No. 7.
8. G. Pólya. *J. reine u. angew. Math.*, **158** (1927), 6—18.

Mathematisches Institut mit Rechenzentrum
Bulgarische Akademie der Wissenschaften
Sofia Bulgarien

Eingegangen am 20. Juni 1970