Труды Международной Конференции по конструктивной теории функций Варна, 19—25 мая 1970

Proceedings of the International Conference on Constructive Function Theory, Varna, May 19—25, 1970

APPROXIMATIONSPROBLEME BEI DER STOERUNG VON HALBGRUPPENOPERATOREN

W. Köhnen

Zusammenfassung. Es sei X ein Banachraum mit Elementen $f, g, \dots$ und Norm $\|\cdot\|$. $\mathfrak{E}(X)$ sei die Banachalgebra der Endomorphismen von X. In $\mathfrak{E}(X)$ seien zwei bezüglich $t\in(0,\infty)$ stark stetige Halbgruppen von Operatoren $\{T(t;A)\, t>0\}$ und $\{T'(t;A');\, t>0\}$ mit infinitesimalem erzeugendem Operator A bzw. A' definiert.

Es gibt Resultate, in denen für ein $f\in X$ das Verhalten von $\|T(t;A)f-f\|$ für $t\to 0+$ mit dem von $\|T'(t;A')f-f\|$ für $t\to 0+$ und das von $\|\lambda R(\lambda;A)f-f\|$, $\lambda\to\infty$ ($R(\lambda;A)$ ist die Resolvente von A), mit dem von $\|\lambda R(\lambda;A')f-f\|$, $\lambda\to\infty$, verglichen wird. Für ein spezielles aber wichtiges dieser Resultate geben wir einen neuen Beweis. Ferner betrachten wir Verallgemeinerungen dieser Resultate.

1. Einleitung. Es sei X ein komplexer Banachraum mit den Elementen $f, g, \dots$ und der Norm $\|\cdot\|$. Mit $\mathfrak{E}(X)$ bezeichnen wir die Banachalgebra der Endomorphismen von X. Eine Funktion $T(t)$, die für alle positiven reellen Zahlen t definiert ist und ihren Wertebereich in $\mathfrak{E}(X)$ hat, heißt stark stetige einparametrige Halbgruppe von Operatoren, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1) $T(t)$ ist stark stetig für alle $t\in(0,\infty)$;

2) es gilt $T(t+t_2)=T(t_1)T(t_2)$ für alle $t_1, t_2\in(0,\infty)$.

Der infinitesimale Operator A_0 einer stark stetigen Halbgruppe $\{T(t);\, t>0\}$ von Operatoren (i. f. kurz Halbgruppe genannt) ist, wie folgt erklärt: Der Definitionsbereich $D(A_0)$ von A_0 besteht aus allen Elementen $f\in X$, für welche $s\text{-}\lim\limits_{t\to 0+}(T(t)f-f)/t$ existiert. Für diese f setzen wir

$$A_0 f = s\text{-}\lim_{t\to 0+}\,(T(t)f-f)/t.$$

In unserem Vortrag betrachten wir Approximationsprobleme, die sich bei der Störung von Halbgruppenoperatoren ergeben. Wir geben einen Überblick über einen Teil der bekannten Ergebnisse dieser Art und liefern für zwei grundlegende Resultate neue Beweise.

Bezüglich der Stetigkeit der Halbgruppe $\{T(t)\}$ im Punkte $t=0$ treten bei unseren Betrachtungen drei Klassen auf, die Klasse (A), die Klasse (C_0) und die Klasse (H_0). Bevor wir diese definieren führen wir noch zwei Bezeichnungen ein: Es sei $X_0=\bigcup\limits_{t>0}\{T(t)X\}$; $\omega_0=\lim\limits_{t\to\infty}(1/t)\log\|T(t)\|$. ω_0 existiert stets als endliche Zahl und heißt Typ der Halbgruppe $\{T(t)\}$ (siehe [9, S. 306]).

Definition 1 ([9, S. 322]). Die Halbgruppe $\{T)t)\}$ ist eine Halbgruppe der Klasse (A), wenn X_0 dicht in X ist und wenn es ein $\omega_1 > \omega_0$ gibt, so daß für jedes λ mit $\mathrm{Re}\lambda > \omega_1$ ein Operator $R(\lambda) \in \mathfrak{E}(X)$ mit den folgenden Eigenschaften existiert:

1) für alle $f \in X_0$ gilt $R(\lambda)f = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) f dt$;

2) für alle λ mit $\mathrm{Re}\lambda > \omega_1$ gilt $\| R(\lambda) \| \leq M$ mit M unabhängig von λ;

3) für alle $f \in X$ gilt $\operatorname*{s-lim}\limits_{\lambda \to \infty} \lambda R(\lambda) f = f$.

Ist $\{T(t)\}$ eine Halbgruppe der Klasse (A), dann besitzt der Operator A_0 eine eindeutige abgeschlossene Erweiterung A. A heißt infinitesimaler erzeugender Operator der Halbgruppe $\{T(t)\}$. Für alle λ mit $\mathrm{Re}\lambda > \omega_1$ existiert die Resolvente $R(\lambda; A)$ von A, und es gilt $R(\lambda) = R(\lambda; A)$.

Definition 2 ([9, S. 321]). Die Halbgruppe $\{T(t)\}$ ist eine Halbgruppe der Klasse (C_0), wenn $\operatorname*{s-lim}\limits_{t \to 0+} T(t) f = f$ für alle $f \in X$ gilt.

Jede Halbgruppe der Klasse (C_0) ist eine Halbgruppe der Klasse (A). Für Halbgruppen der Klasse (C_0) gilt $A_0 = A$.

Definiton 3 ([11]). Eine Halbgruppe $\{T(t)\}$ der Klasse (C_0) ist eine Halbgruppe der Klasse (H_0), wenn es einen Sektor $\Sigma \equiv \{\lambda ; |\arg \lambda| \leqq \theta\}$, $\theta > \pi/2$ gibt, so daß $\Sigma \subseteqq \varrho(A)$ ($\varrho(A)$ ist die Resolventenmenge von A) und

$$\| (\lambda I - A)^{-1} \| = \| R(\lambda ; A) \| \leqq \frac{M}{1 + |\lambda|}$$

für alle $\lambda \in \Sigma$ gilt.

Eine Reihe von Autoren, vor allem P. L. Butzer und H. Berens haben nun für die Klasse (C_0) das Verhalten der Größe $\| T(t) f - f \|$ beim Grenzübergang $t \to 0+$ in Abhängigkeit von den strukturellen Eigenschaften von f untersucht. Diese Untersuchungen sind sowohl mit Mitteln der klassischen Funktionalanalysis als auch im Rahmen der Theorie der intermediären Räume in der von J. Peetre [16] entwickelten Form durchgeführt worden. Grundlegend waren dabei die Arbeiten von P. L. Butzer (s. [3], [4], [5] sowie P. L. Butzer und H. Berens [6] und die dort zitierte Literatur). Ein in dieser Hinsicht zentrales Resultat ist in dem folgenden Satz A niedergelegt. Dabei verstehen wir unter $\widetilde{D}(\widetilde{A})^X$ die relative Vervollständigung von $D(A)$ bezüglich X. $\widetilde{D}(\widetilde{A})^X$ ist definiert als die Menge aller $f \in X$, die in der X-Abschließung einer beliebigen in der Norm von $D(A)$ ($\| f \|_{D(A)} = \| f \| + \| Af \|$) beschränkten Kugel liegen.

Satz A. Ist $\{T(t); t > 0\}$ eine Halbgruppe der Klasse (C_0), so gilt:

a) aus $\| T(t) f - f \| = O(t)$, $t \to 0+$, folgt $T(t) f = f$ für alle $t > 0$;

b) für ein $f \in X$ sind die folgenden Aussagen untereinander äquivalent:

i) $\| T(t) f - f \| = O(t)$, $t \to 0+$;

ii) $f \in \widetilde{D}(\widetilde{A})^X$;

iii) $f \in D(A)$, falls zusätzlich X reflexiv ist.

Teil a) dieses Satzes wurde zusammen mit der Äquivalenz (i) $\longleftrightarrow$ (iii) von Teil b) bereits im Jahre 1956 von P. L. Butzer [3] bewiesen. Die Äquivalenz (i) $\longleftrightarrow$ (ii) in Teil b) stammt von H. Berens [2].

2. Störungsprobleme und Approximation. Wie eingangs erwähnt, soll hier gefragt werden, wie sich das Approximationsverhalten von Halbgruppenoperatoren bei Störungen ändert. Insbesondere kann man das Approximationsverhalten zweier auf dem gleichen Banachraum X definierten Halbgruppen $\{T(t);\ t>0\}$ und $\{T'(t);\ t>0\}$ miteinander vergleichen. In [7] ist als Spezialfall eines allgemeineren Theorems der folgende Satz bewiesen worden:

Satz 1. Es seien $\{T(t);\ t>0\}$ bzw. $\{T'(t);\ t>0\}$ zwei Halbgruppen der Klasse (C_0) definiert auf demselben Banachraum X mit infinitesimalem erzeugendem Operator A bzw. A'. Gilt $D(A)=D(A')$, dann sind für ein $f\in X$ für $0<\alpha<1$ die folgenden Aussagen äquivalent:

i) $\|T(t)f-f\|=O(t^{\alpha})$;

ii) $\|T'(t)f-f\|=O(t^{\alpha}),\ t\to 0+$.

Für den Spezialfall, daß sowohl $\{T(t);\ t>0\}$ als auch $\{T'(t);\ t>0\}$ eine Halbgruppe der Klasse (H_0) ist, geben wir hier einen Beweis dieses Satzes an, bei dem wir — anders als in [7] — nicht die Theorie der intermediären Räume benutzen.

Wir setzen $P=A-A'$. Dann erhalten wir für alle $g\in D(A)=D(A')$

$$\frac{d}{du}(T'(t-u)T(u)g)=T'(t-u)AT(u)g-A'T'(t-u)T(u)g=T'(t-u)PT(u)g.$$

Mit dem Satz vom abgeschlossenen Graphen folgt, daß P bezüglich A und bezüglich A' relativ beschränkt ist, d. h. es existieren Konstanten M_1 und M_2, so daß

$$\|Pg\|\leqq M_1(\|g\|+\|Ag\|) \tag{1}$$

und

$$\|Pg\|\leqq M_2(\|g\|+\|A'g\|) \tag{2}$$

für alle $g\in D(A)=D(A')$ gilt. Aus (1) folgt

$$\|PR(\lambda;A)f\|\leqq M_1(\|R(\lambda;A)f\|+\|AR(\lambda;A)f\|) \tag{3}$$

für alle $f\in X$ und alle λ der Resolventenmenge $\varrho(A)$ von A. Mit dem Satz vom abgeschlossenen Graphen ergibt sich hieraus, daß der Operator $PR(\lambda;A)$ zu $\mathfrak{E}(X)$ gehört. Folglich ergibt sich mit Hilfe der für alle $g\in D(A)$ gültigen Gleichung

$$PT(t)g=PT(t)R(\lambda;A)(\lambda I-A)g=PR(\lambda;A)T(t)(\lambda I-A)g,$$

daß $PT(t)g$ stetig in der Norm von X für alle $g\in D(A)$ ist. Also erhalten wir für alle $g\in D(A)$

$$T(t)g-T'(t)g=\int_0^t T'(t-u)PT(u)g\,du. \tag{4}$$

Wegen (1) folgt hieraus

$$\|T(t)g-T'(t)g\|\leqq \sup_{0\leqq u\leqq t}\|T'(u)\|M_1\{\int_0^t\|T(u)g\|du+\int_0^t\|AT(u)g\|du\}.$$

Da $\{T(t)\}$ eine Halbgruppe der Klasse (H_0) ist, gilt $T(v)f\in D(A)$ für jedes $f\in X$ und jedes $v>0$. Dies ergibt

$$\| T(t)T(v)f - T'(t)T(v)f \| \leq K_t M_1 \| T(v) \| \{ \int_0^t \| T(u)f \| du + \int_0^t \| AT(u)f \| dv \},$$

woraus für $v \to 0+$ die Abschätzung

$$\| T(t)f - T'(t)f \| \leq K_t M_1 \sup_{0 \leq u \leq t} \| T(u)f \| t + \int_0^t \| AT(u)f \| du \}$$

folgt.

Da aus $\| T(t)f - f \| = O(t^\alpha)$ mit Resultaten von H. Berens [1] die Aussage $\| AT(t)f \| = O(t^{\alpha-1})$, $t \to 0+$, folgt, ist der Beweis von (i) nach (ii) erbracht. Die Umkehrung ergibt sich ganz analog. Für den Fall $\alpha = 1$ läßt sich Satz 1 ohne Spezialisierung auf Halbgruppen der Klasse (H_0) ebenfalls ohne die Theorie der intermediären Räume beweisen.

Geht man nämlich von Gleichung (4) aus, so erhält man für alle $f \in X$ und alle $\lambda \in \varrho(A)$

$$T(t)\lambda R(\lambda; A)f - T'(t)\lambda R(\lambda; A)f = \int_0^t T'(t-u)PT(u)\lambda R(\lambda; A)f du.$$

Mit Hilfe von (3) ergibt sich hieraus:

$$\| T(t)\lambda R(\lambda; A)f - T'(t)\lambda R(\lambda; A)f \|$$
$$\leq \int_0^t \| T'(t-u) \| M_1(\| T(u)\lambda R(\lambda; A)f \| + \| T(u)A\lambda R(\lambda; A)f \|)du.$$

Lassen wir nun $\lambda \to \infty$ streben und benutzen wir die Tatsache, daß aus $\| T(t)f - f \| = O(t)$, $t \to 0+$, die Aussage $\| \lambda R(\lambda; A)f - f \| = O(1/\lambda)$, $\lambda \to \infty$, folgt [6, S. 133]), dann erhalten wir $\| T(t)f - T'(t)f \| = O(t)$, $t \to 0+$.

Eine weitere Frage ist, ob Satz 1 gültig bleibt, wenn man dort die Klasse (C_0) durch die schwächere Klasse (A) ersetzt. Wir beleuchten dabei nur den wichtigen Spezialfall $\alpha = 1$. Unter Benutzung von Approximationsaussagen für die Resolvente von A läßt sich zunächst zeigen [13], daß Satz A gültig bleibt, wenn $\{T(t); t > 0\}$ nur eine Halbgruppe der Klasse (A) ist. Daraus erhält man dann das folgende Resultat.

Satz 2. Es seien $\{T(t); t > 0\}$ bzw. $\{T'(t); t > 0\}$ zwei Halbgruppen der Klasse (A), definiert auf demselben Banachraum X, mit infinitesimalem erzeugendem Operator A bzw. A'. Gilt $D(A) = D(A')$, dann sind für ein $f \in X$ die folgenden Aussagen äquivalent:

i) $\| \mathrm{T}(t)f - f \| = O(t)$;

ii) $\| T'(t)f - f \| = O(t)$, $t \to 0+$.

Ein weiteres Problem im Rahmen der Störungs- und Approximationstheorie von Halbgruppenoperatoren wird durch die folgende Frage gestellt. Inwieweit kann man aus einer Halbgruppe oder einer ganzen Schar von Halbgruppen Operatoren bilden, die im starken Sinne gegen die Identität streben, und dabei dasselbe Approximationsverhalten aufweisen wie die Halbgruppen, aus denen sie entstanden sind? Dabei werde i. a. nicht gefordert, daß diese Operatoren eine Halbgruppe bilden. Dieses Problem kann hier nicht in seiner vollen Allgemeinheit behandelt werden. Wir wollen aber über einen besonders wichtigen Spezialfall sprechen.

Gegeben sei das Anfangswertproblem für die zeitabhängige homogene Evolutionsgleichung

$$\frac{d}{dt}u(t)=A(t)u(t)\,;\ u(0)=f,\ f\in X;\ 0<t\leqq T,\ T>0, \tag{5}$$

im Banachraum X. Unter der Voraussetzung, daß $A(t)$ für jedes $t\in[0,T]$ der infinitesimale erzeugende Operator einer Halbgruppe der Klasse (H_0) mit einer von t unabhängigen Konstanten M ist, $D(A(t))$ unabhängig von t ist und $A(t)A(0)^{-1}$ hölderstetig in der gleichmäßigen Operatortopologie auf $[0,T]$ ist, existiert eine eindeutige starke Lösung des Problems (5). D. h., es gibt eine eindeutig bestimmte Funktion $u(t;f)$ mit Werten in X, die stark stetig auf $[0,T]$ und stark stetig differenzierbar auf $[0,T]$ ist und die (5) erfüllt. Diese Lösung läßt sich nach einer Methode von P. E. Sobolevskij [17] und H. Tanabe [19], [20], [21] in der Form

$$u(t\,;f)\equiv U(t,0)f=T(t\,;A(0))f+S(t,0)f$$

schreiben. Dabei ist $U(t,s)$, $0\leqq s\leqq t\leqq T$, der zum Problem (5) gehörende Evolutionsoperator (für eine allgemeine Definition dieses Begriffes siehe [8, S. 233]) und $S(t,s)$ für alle $0\leqq s\leqq t\leqq T$ ein gewisser linearer Operator. $\{T(t\,;A(0))\,;\,t>0\}$ bezeichnet die von $A(0)$ erzeugte Halbgruppe. $U(t,0)$ kann als Störung von $T(t;A(0))$ mit $S(t,0)$ als Störglied interpretiert werden. Man kann nun zeigen, daß die Operatoren $U(t,0)$ beim Grenzübergang $t\to 0+$ im wesentlichen dasselbe Verhalten aufweisen wie die Halbgruppe $T(t\,;A(0))$. Diesbezüglich erwähnen wir als Spezialfall eines mit Hilfe der Theorie der intermediären Räume gewonnenen allgemeinen Ergebnisses aus [12]:

Satz. 3. Für ein $f\in X$ sind für $0<\alpha\leqq 1$ die folgenden Aussagen äquivalent:

i) $\|U(t,0)f-f\|=O(t^{\alpha})$;

ii) $\|T(t;A(0))f-f\|\neq O(t^{\alpha}),\ t\to 0+$.

Wir können nun weiter Ergebnisse über die Approximation der Lösung einer gestörten Evolutionsgleichung durch ihren Anfangswert angeben.

Betrachten wir das Problem

$$\frac{d}{du}u(t)=(A(t)+B(t))u(t)\,;\ u(0)=f,\ f\in X\,;\ 0<t\leqq T,\ T>0, \tag{6}$$

so ist bekannt ([21] und [18]), daß unter den gleichen Voraussetzungen an $A(t)$ wie oben und unter den folgenden Bedingungen an $B(t)$ das Problem (6) eine eindeutige starke Lösung $V(t,0)f$ besitzt. Für jedes $t\in[0,T]$ ist $B(t)$ ein linearer Operator in X mit der Eigenschaft, daß es positive Konstanten β und γ mit $\beta+\gamma<1$ gibt, so daß die Operatoren $B(t)(-A(t))^{-\beta}$ und $(-A(t))^{\gamma}B(t)(-A(t))^{-\beta-\gamma}$ zu $\mathfrak{E}(X)$ gehören und stark stetig auf $[0,T]$ sind. $V(t,0)$ läßt sich durch eine sukzessive Approximationsmethode aus $U(t,0)$ gewinnen. $V(t,0)$ kann damit auch als Ergebnis einer Störung der Halbgruppe $\{T(t\,;A(0))\}$ angesehen werden. Als Spezialfall eines allgemeinen Ergebnisses aus [12] zitieren wir:

Satz 4. Für ein $f \in X$ sind für $0<\alpha\leq 1$ die folgenden Aussagen äquivalent:

i) $\| V(t, 0)f-f \| = O(t^{\alpha})$;

ii) $\| T(t; A(0))f-f \| = O(t^{\alpha}),\ t\to 0+$.

Es bereitet keine Schwierigkeiten, zu zeigen, daß auch für die Lösungen der entsprechenden inhomogenen Probleme, das Approximationsverhalten gegen die Identität im wesentlichen dasselbe ist wie das der Halbgruppe $\{T(t; A(0))\}$.

An einem speziellen Beispiel wollen wir nun die Tragweite unserer Ergebnisse illustrieren. Es sei X der Raum $C_{2\pi}$, der komplexwertigen, stetigen 2π-periodischen Funktionen, die auf der reellen Achse definiert sind, versehen mit der gewöhnlichen Supremumnorm. Auf $C_{2\pi}$ sei das singuläre periodische Integral von Weierstrass

$$[W(t)f](x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \theta_3(x-u; t)f(u)du;\ f(u)\in C_{2\pi};\ t>0$$

gegeben. Für geeignet gewähltes festes $\omega>0$ ist $e^{-\omega t}W(t)$ eine Halbgruppe der Klasse (H_0) und $[W(t)f](x)$ ist eindeutige periodische klassische Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x, t)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x, t),\ -\infty<x<\infty,\ 0<t\leq T,\ T>0, \qquad (7)$$

$$u(x, 0)=f(x).$$

Ein bekannter Approximationssatz [6, S. 235—236] besagt nun, daß $\| W(t)f-f \| = O(t),\ t\to 0+$, genau dann gilt, wenn f und f' absolut stetig auf $[0,2\pi]$ sind und f'' zu $L_{2\pi}^{\infty}$ gehört. Nehmen wir nun an, daß für jedes $t\in[0, T]$ die Funktionen $a_i(x, t)$, $i=1, 2, 3$, Elemente von $C_{2\pi}$ sind, daß $a_1(x, t)>\delta>0$ mit $\delta\neq\delta(x, t)$ gilt und daß die Funktionen $a_i(\cdot, t)$ und $F(\cdot, t)$ hölderstetig in der Norm auf $[0, T]$ sind, dann besitzt das Anfangswertproblem

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a_1(x, t)\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}+a_2(x, t)\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}+a_3(x, t)u(x, t)+F(x, t), \qquad (8)$$

$$u(x, 0)=f(x),\ -\infty<x<\infty,\ 0<t\leq T,$$

für jedes $f(x)\in C_{2\pi}$ eine eindeutige klassische Lösung $u(x, t)$. Als Anwendung der Sätze 1 und 3 erhalten wir als Erweiterung der Approximationsergebnisse für das singuläre periodische Integral von Weierstrass das folgende Resultat für die Lösung $u(x, t)$ von (8).

Satz 5. Die folgenden Aussagen sind äquivalent für ein $f\in C_{2\pi}$:

i) $\sup_x |u(x, t)-f(x)| = O(t),\ t\to 0+$;

ii) f und f' sind absolut stetig auf $[0, 2\pi]$ und $f''\in L_{2\pi}^{\infty}$.

Satz 4 war also bisher nur in dem Spezialfall des Problems (7) beweisbar.

Zum Schluß sei erwähnt, daß ähnliche Approximationsaussagen wie in Satz 2 auch für die Lösungen der inhomogenen jedoch zeitunabhängigen Evolutionsgleichung erhalten werden können, die von S. J. Jakubow [10] konstruiert worden sind. A ist in den Existenz- und Eindeutigkeitssätzen in [10] Erzeuger einer Halbgruppe der Klasse (A) mit der zusätzlichen Bedingung, daß $\int_0^1 \| T(t) \| dt < \infty$ oder $\int_0^1 \| T(t)f \| dt$ für jedes $f \in X$ gilt.

LITERATUR

1. H. Berens. Approximationssätze für Halbgruppenoperatoren in intermediären Räumen. *Schr. Math. Inst. Univ. Münster*, **32** (1964) (Dissertation, Aachen).
2. H. Berens. Interpolationsmethoden zur Behandlung von Approximationsprozessen auf Banachräumen. (Lecture Notes in Mathematics No. 64). Berlin, 1968.
3. P. L. Butzer. Sur la théorie des demi-groupes et classes de saturation de certaines integrales singulières. *C. R. Acad. Sci Paris*, **243** (1956), 1473—1475.
4. P. L. Butzer. Über den Grad der Approximation des Identitätsoperators durch Halbgruppen von linearen Operatoren und Anwendungen auf die Theorie der singulären Integrale. *Math. Ann.*, **133** (1957), 410—425.
5. P. L. Butzer. Zur Frage der Saturationsklassen singulärer Integraloperatoren. *Math. Zeitschr.*, **70** (1958), 93—112.
6. P. L. Butzer, H. Berens. Semi-groups of operators and approximation. Grundl. d. math. Wiss., Bd. 145, Berlin, 1967.
7. P. L. Butzer, W. Köhnen. Approximation invariance of semigroup operators under perturbation. *J. Approx. Theory*, **2** (1969), 389—393.
8. R. W. Carroll. Abstract methods in partial differential equations. New York, 1969.
9. E. Hille, R. S. Phillips. Functional analysis and semi-groups. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 31, Providence, 1957.
10. S. J. Jakubov. Die Lösbarkeit des Cauchy Problems für Differentialgleichungen im Banachraum (Russisch). Trud. Inst. math. i. mech. Baku (1967), 187—206.
11. T. Kato. Semi-groups and temporally inhomogeneous evolution equations. Equazioni differenziali astratte. (Centro Internazionale matematico estivo) Varenna, 1963.
12. W. Köhnen. Das Anfangswertverhalten von Evolutionsgleichungen in Banachräumen. Teil I. Approximationssätze für Evolutionsoperatoren. *Tôhoku Math. J.* **22** (1970), 566—596.
13. W. Köhnen. Saturation theorems for semi-group operators of class (A) (To appear).
14. С. Г. Крейн. Линейные дифференциальные уравнения в Банаховом пространстве. Москва, 1967.
15. J. L. Lions, J. Peetre. Sur une classe d'espaces d'interpolation. *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.*, **19** (1964), 5—68.
16. J. Peetre. A Theory of Interpolation of Normed Spaces. *Notes Universidade de Brasilia*, 1963.
17. П. Е. Собалевский. Об уравнениях параболического типа в Банаховом пространстве. *Труды Моск. матем. общ.*, **10** (1961), 297—350.
18. М. Э. Соломяк. Применение теории полугрупп к исследованию дифференциальных уравнений в пространствах Банаха. *Доклады АН СССР*, **122** (1958), 766—769.
19. H. Tanabe. A class of the equations of evolution in a Banach space. *Osaka Math. J.*, **11** (1959), 121—145.
20. H. Tanabe. Remarks on the equations of evolution in a Banach space. *Osaka Math J.*, **12** (1960), 145—166.
21. H. Tanabe. On the equations of evolution in a Banach space. *Osaka Math. J.*, **12** (1960), 363—376.

Lehrstuhl A für Mathematik
Technische Hochschule Aachen
51 Aachen BRD

Eingegangen am 13 Juli 1970