Труды Международной Конференции
по конструктивной теории функций
Варна, 19—25 мая 1970

Proceedings of the International
Conference on Constructive Function
Theory, Varna, May 19—25, 1970

KONVERGENZ- UND GÜTEAUSSAGEN FÜR DIE APPROXIMATION DURCH FOLGEN LINEARER POSITIVER OPERATOREN

M. W. Müller und H. Walk

*Herrn Professor L. Collatz
zum 60. Geburtstag am 6. Juli 1970*

Zusammenfassung. Es werden Funktionen f, die auf einer Teilmenge Ω der Zahlengeraden R definiert sind und auf einem Intervall $I \subset \Omega$ gewisse Glätteeigenschaften besitzen, durch eine Folge linearer positiver Operatoren L_n approximiert. Anstelle einer globalen Beschränktheitsvoraussetzung über f wird eine lokale Voraussetzung über die L_n-Bilder von $|f|^r$ für ein $r>1$ gemacht. Ein Test der Operatorenfolge $\{L_n\}$ mit den durch $1, t, t^2$ $(t \in \Omega)$ definierten Funktionen e_0, e_1, e_2 liefert eine Aussage über die Güte der Approximation von $L_n f$ an f in inneren Punkten von I. Für Funktionen f, die auf I lokal monoton und in den beiden Randpunkten von I stetig sind, ergibt sich eine Aussage über die Konvergenz der Folge $\{L_n f\}$ gegen f bezüglich der Hausdorff-Metrik für vervollständigte Graphen. Damit wird ein von B. Sendov stammender Satz Korowkinschen Typs verallgemeinert.

1. Approximationsverfahren lassen sich häufig charakterisieren durch eine Folge linearer positiver Operatoren L_n, die der zu approximierenden Funktion f eine Folge von Bildfunktionen $L_n f$ zuordnet. Ist f auf einer nichtleeren Teilmenge Ω der reellen Zahlengeraden $\mathbb{R}$ definiert und besitzt f auf einem endlichen abgeschlossenen Intervall $I \subset \Omega$ eine gewisse Glätteeigenschaft, so liefert ein sich auf I beziehender Test der Operatorenfolge $\{L_n\}$ mit den drei einfachen Funktionen e_0, e_1, e_2 $(e_i(t)=t^i$ für $t \in \Omega$; $i=0, 1, 2)$ eine entsprechende Konvergenz- bzw. Güteaussage für die Approximation von $L_n f$ an f in I. Dabei wurde in früheren Arbeiten vorausgesetzt, daß f in ganz Ω beschränkt ist oder höchstens wie eine Potenz [16], [3] wächst.

In [20] wurde nun eine Konvergenzaussage von P. P. Korowkin ([5], Ch. I) und in [13] eine Güteaussage von R. G. Mamedow ([9], Satz 3) dahingehend verallgemeinert, daß an Stelle der globalen Beschränktheitsvoraussetzung über f eine lokale (nur I oder einzelne Punkte aus I betreffende) Voraussetzung über die L_n-Bilder von $|f|^r$ für ein $r>1$ gemacht wird. Diese Voraussetzung ist in konkreten Fällen leicht nachprüfbar und für beschränkte Funktionen in trivialer Weise erfüllt. Damit lassen sich dann für Folgen linearer positiver Operatoren Konvergenz- und Güteaussagen machen, die sich auf Funktionen mit gewissen Wachstumseigenschaften beziehen. Das Verhalten von f in $\Omega - I$ wirkt sich jeweils nur darin aus, daß die Abbildungsvorschrift L_n das Verhalten von f in ganz Ω berücksichtigt. In der vorliegenden Arbeit werden die in [20] und [13] begonnenen Überlegungen fortgesetzt.

In 2. wird für Funktionen, die auf $I \subset \Omega (I \neq \Omega)$ stetig (bzw. stetigdifferenzierbar) sind, eine Aussage gemacht über die Güte der Approximation in inneren Punkten von I. Sie verwendet den Stetigkeitsmodul der Restriktion von f (bzw. f') auf I. Dabei werden Sätze, die auf R. G. Mamedow ([10], Satz 1) sowie O. Shisha und B. Mond ([19], Theorem 1) (bzw. R. De Vore [2], Theorem 2.1) zurückgehen, verallgemeinert und verschärft. Die Ergebnisse werden angewandt auf die Folge der Operatoren von W. Meyer-König und K. Zeller [11, 1] und die Folge der Gammaoperatoren [7]. Ausserdem werden zahlreiche Verallgemeinerungen und Varianten angegeben. Das erste Resultat in dieser Richtung stammt von T. Popoviciu [15] aus dem Jahre 1935 (bzw. von G. G. Lorentz [6], Theorem 1.6.2. (1953)). Es bezieht sich auf die Folge der Bernstein-Operatoren und den Fall $\Omega = I$, in dem also die Funktionen auf dem ganzen Definitionsbereich stetig und damit beschränkt sind.

Nr. 3 enthält für Funktionen f, die auf $I \subset \Omega$ lokal monoton sind (d. h. die dort nur Unstetigkeitsstellen 1. Art besitzen und deren Funktionswerte jeweils zwischen den links- und rechtsseitigen Grenzwerten liegen) und in den Randpunkten von I stetig sind, eine Aussage über die Konvergenz der Folge $\{L_n f\}$ gegen f in I bezüglich einer Hausdorff-Metrik für vervollständigte Graphen. Damit wird ein Satz vom Korowkinschen Typ, der von Bl. Sendov ([18], Satz 2) angegeben worden ist, verallgemeinert. Ausserdem wird für Funktionen, die auf $I \subset \Omega$ lokal monoton sind, eine Aussage gemacht über die Güte der Approximation in einem abgeschlossenen nur innere Punkte von I enthaltenden Intervall J. Sie bezieht sich auf eine Hausdorff-Metrik für (leicht modifizierte) vervollständigte Graphen und verwendet den Nichtmonotonie-Modul der Restriktion von f auf J (vgl. [8], Theorem 2.13, sowie Bl. Sendov [17]). Auf ein Gegenbeispiel zum Fall $r=1$, entsprechende Untersuchungen für allgemeine Banachsche Funktionenräume und weitere Fragestellungen wird in späteren Arbeiten eingegangen.

2. Im folgenden sei Ω eine nichtleere (beschränkte oder unbeschränkte) Teilmenge der reellen Zahlengeraden R und $I =: [a, b] \subset \Omega (I \neq \Omega)$ ein abgeschlossenes endliches und nichtausgeartetes Intervall. Mit $C(\Omega, I)$ bzw. $C^1(\Omega, I)$ werden die linearen Räume der auf Ω definierten und auf I stetigen bzw. stetig-differenzierbaren reellwertigen Funktionen f bezeichnet. $D_b(\Omega')$ sei der lineare Raum der auf $\Omega' \subset \Omega$ definierten und beschränkten reellwertigen Funktionen. Die Funktion ψ_x wird für festes $x \in I$ erklärt durch $\psi_x(t) := (t-x)^2$, $t \in \Omega$. Mit φ_I wird die charakteristische Funktion des Intervalls I bezeichnet, und es wird $k_I := e_0 - \varphi_I$ gesetzt. Als Maß für die „Glätte" der zu approximierenden Funktion f aus $C(\Omega, I)$ bzw. $C^1(\Omega, I)$ dient der I-Stetigkeitsmodul $\omega_I(f, .)$, eine für $\delta > 0$ durch

$$(2.1) \qquad \omega_I(f, \delta) := \sup\{|f(t_1) - f(t_2)| : t_1, t_2 \in I, |t_1 - t_2| \leq \delta\}$$

erklärte — von f und von I abhängige — reellwertige Funktion. Sie hat für festes f und für festes I die Eigenschaft

$$(2.2) \qquad \omega_I(f, \delta) \downarrow \quad \text{für} \quad \delta \downarrow 0+,$$

und für ein reelles $\mu > 0$ gilt

$$(2.3) \qquad \omega_I(f, \mu\delta) \le (1+]\mu[)\omega_I(f, \delta),$$

wo $]\mu[$ die grösste ganze Zahl ist, die kleiner als μ ist.

Satz 1. Es sei $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge linearer positiver Operatoren, die einen linearen Teilraum A aus $C(\Omega, I)$, welcher e_0, e_1, e_2 und mit jedem f auch $\varphi_I |f|$ enthält, abbilden in den Raum $D_b(I)$. An der festen inneren Stelle $x \in$ gelte für $n \to \infty$

$$(0) \qquad (L_n e_0)(x) = 1,$$

$$(1) \qquad (L_n e_1)(x) = x + \alpha_{n1}(x) \quad \text{mit} \quad \alpha_{n1}(x) \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty,$$

$$(2) \qquad (L_n e_2)(x) = x^2 + \alpha_{n2}(x) \quad \text{mit} \quad \alpha_{n2}(x) \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Gibt es zu der Funktion $f \in A$ eine reelle Zahl $r > 1$ mit $|f|^r$ aus A und

$$(3) \qquad E_f(x) := \sup_n (L_n |f|^r)(x) < \infty$$

(wobei n gegebenenfalls erst von einem endlichen Index n_0 ab läuft), so gilt für $\delta > 0$ und $n \ge n_0$

$$(2.4) \qquad |(L_n f)(x) - f(x)| \le K(\delta, n, x)\omega_I(f, \delta)$$
$$+ [E_f(x)]^{1/r} m_x^{-2/s} [R_n(x)]^{1/s} + m_x^{-2} |f(x)| R_n(x),$$

wo $R_n(x) := (L_n \psi_x)(x) = \alpha_{n2}(x) - 2x\alpha_{n1}(x)$ $(\to 0$ für $n \to \infty)$, $K(\delta, n, x) := 1 + \min(\delta^{-1}[R_n(x)]^{1/2}, \delta^{-2}R_n(x))$ (unabhängig von f), $m_x := \min(|a-x|, |b-x|)$ und $s = r(r-1)^{-1}$ ist.

Ein lokaler Test der Operatorenfolge $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit den drei einfachen Funktionen e_0, e_1, e_2 liefert also grob gesagt eine quantitative Information über die Geschwindigkeit, mit welcher lokal (d. h. an einer festen Stelle $x \in I$) eine Funktion aus dem Raum $C(\Omega, I)$, die eine gewisse Wachstumseigenschaft besitzt, durch die Folge ihrer L_n-Bilder approximiert wird. Man beachte, daß das Stetigkeitsintervall I zwar die Stelle x in seinem Inneren enthalten muß, sonst aber beliebig klein sein darf.

In den Anwendungen des Satzes versucht man $\delta = \delta(n)$ — unabhängig von x — so zu wählen, daß es für $n \to \infty$ von möglichst hoher Ordnung monoton gegen Null strebt und dabei gleichzeitig $\lim\limits_{n \to \infty} K(\delta, n, x) =: K(x) < \infty$ mit $K(x) \neq 0$ gilt.

Man wird ausserdem versuchen, die reelle Zahl r (>1) in (3) größtmöglich zu wählen, um zu erreichen, daß der mittlere Summand in (2.4) — wegen s (>1) nahe bei Eins — für $n \to \infty$ mit möglichst großer Ordnung gegen Null strebt.

Korollar 1. Die Voraussetzungen von Satz 1 seien erfüllt. Hat der Wert $R_n(x)$ speziell eine Darstellung der Form $R_n(x) = c(x)n^{-k} + o(n^{-k})$ $(k > 0$, $0 < c(x) < \infty$, $n \to \infty)$ — was in den Anwendungen praktisch immer erfüllt ist —, gehört ferner die Einschränkung von f auf I der Lipschitzklasse $\mathrm{Lip}_M \alpha$, $0 < \alpha \le 1$, an — was bekanntlich äquivalent ist mit $\omega_I(f, \delta) \le M\delta^{\alpha}$ für $\delta > 0$ — und ist (3) für $r = 2(2-\alpha)^{-1}$ erfüllt, so ist auf Grund von (2.4) die Ordnung der lokalen Approximation von $\{L_n f\}$ an f in inneren Punkten von I mindestens gleich $n^{-k\alpha/2}$.

Beweis des Satzes. Für festes $n \in \mathrm{N}$ ergibt sich auf Grund der Linearität und Positivität von L_n, sowie (0) zunächst

$$|(L_n f)(x)-f(x)| = |(L_n f)(x)-f(x)(L_n e_0)(x)|$$
$$\leq (L_n \varphi_I |f(\cdot)-f(x)|)(x)+(L_n k_I |f(\cdot)-f(x)|)(x).$$

Es sei nun $\delta>0$ beliebig gegeben und k eine Indikatorfunktion mit $k(t)=0$ für $|t-x|<\delta$ und $k(t)=1$ für $|t-x|\geq\delta$. In [12, Satz 10. 1] wurde gezeigt, daß

$$(L_n\varphi_1 |f(\cdot)-f(x)|)(x)\leq(1+\delta^{-1}[R_n(x)]^{1/2})\omega_I(f, \delta)$$

ist mit $R_n(x):=(L_n\psi_x)(x)=\alpha_{n2}(x)-2x\alpha_{n1}(x)$ (letzteres wegen (1) und (2)). Andererseits implizieren die Definition des I-Stetigkeitsmoduls und dessen Eigenschaft (2.3) für $t \in \Omega$

$$\varphi_I(t) |f(t)-f(x)| \leq\omega_I(f, |t-x|)=\omega_I(f, \delta^{-1}|t-x| \delta)$$
$$=\left\{e_0(t)+\left]\frac{|t-x|}{\delta}\right[\right\}\omega_I(f, \delta),$$

und beachten wir noch, daß

$$\left]\frac{|t-x|}{\delta}\right[\leq\frac{|t-x|}{\delta}K(t)\leq\frac{(t-x)^2}{\delta^2}K(t)\leq\frac{1}{\delta^2}\psi_x(t)$$

ist, so erhalten wir durch Anwendung des Operators I_n die Abschätzung

$$(L_n\varphi_1 |f(\cdot)-f(x)|)(x)=(1+\delta^{-2}R_n(x))\omega_I(f, \delta),$$

aus der zusammen mit dem obigen Ergebnis der Summand $K(\delta, n, x)\omega_I(f, \delta)$ in (2.4) folgt.

Wegen $m_x:=\min(|a-x|, |b-x|)>0$ (da x innerer Punkt von I ist) gilt $k_I\leq m_x^{-2}\psi_x$, und wegen $k_I, k_I |f|, |f|^r$ aus $C(\Omega, I)$ erhält man durch Anwendung der Hölderschen Ungleichung für lineare positive Funktionale in Verbindung mit (3)

$$(L_n k_I |f|)(x)\leq[(L_n |f|^r)(x)]^{1/r}[(L_n k_I)(x)]^{1/s}\leq E_f^{1/r}(x)[(L_n k_I)(x)]^{1/s}, \quad r^{-1}+s^{-1}=1.$$

Bei Beachtung dieser beiden Tatsachen folgt dann auf Grund von

$$k_I |f(\cdot)-f(x)| \leq k_I |f|+|f(x)| k_I,$$

sowie der Linearität und Positivität von L_n

$$(L_n k_I |f(\cdot)-f(x)|)(x)\leq E_f^{1/r}(x)[(L_n k_I)(x)]^{1/s}+|f(x)| (L_n k_I)(x)$$
$$\leq E_f^{1/r}(x)m_x^{-2/s}R_n^{1/s}(x)+m_x^{-2} |f(x)| R_n(x).$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Es folgen nun eine Reihe von Bemerkungen, welche Ausdehnungen und Varianten des Satzes betreffen.

Bemerkung 1. a) Um den Beweis des Satzes nicht unnötig zu komplizieren, wurde vorausgesetzt, daß die Operatoren L_n die Identität e_0 invariant lassen. Es macht jedoch keine wesentlichen Schwierigkeiten, (0) zu ersetzen durch

(0') $(L_n e_0)(x)=1+\alpha_{n0}(x)$ mit $\alpha_{n0}(x)\to 0$ für $n\to\infty$.

b) Für ein beschränktes $f\in A$ ist die Forderung (3) des Satzes auf Grund von (0) automatisch erfüllt. Setzt man $M:=\sup_{t\in\Omega}|f(t)|$ $(<\infty)$, so folgt für $t\in\Omega$ und $\delta>0$

$$|f(t)-f(x)|\leq\omega_I\left(f,\frac{|t-x|}{\delta}\delta\right)+\frac{2M}{m_x^2}\psi_x(t),$$

womit sich (2.4) hier vereinfacht zu

(2.5) $|(L_n f)(x)-f(x)|\leq K(\delta,n,x)\,\omega^I(f,\delta)+2Mm_x^{-2}R_n(x),\ n\in\mathbb{N}.$

c) In der bisherigen Literatur wurde ausschließlich der Fall $\Omega=I$ behandelt. Hierbei ergibt sich eine weitere entscheidende Vereinfachung von (2.4). An die Stelle des Raumes $C(\Omega,I)$ und des I-Stetigkeitsmoduls treten dann der Raum $C(I)$ und der gewöhnliche Stetigkeitsmodul $\omega(f,\cdot)$, die Stelle α darf Randpunkt von I sein, (3) fällt weg und (2.4) geht über in

(2.6) $|(L_n f)(x)-f(x)|\leq K(\delta,n,x)\,\omega(f,\delta),\quad \delta>0,\ n\in\mathbb{N}.$

B e m e r k u n g 2. a) Der Satz läßt sich ohne Schwierigkeit auf den Fall übertragen, daß Ω eine nichtleere (beschränkte oder unbeschränkte) Teilmenge des m-dimensionalen euklidischen Raumes R^m, $m\geq 2$, und I eine abgeschlossene endliche konvexe Teilmenge von Ω ist. Der I-Stetigkeitsmodul wird hier für $\delta=(\delta_1,\ldots,\delta_m)>0$ erklärt durch

$$\omega_I(f;\delta_1,\ldots,\delta_m):=\sup\{|f(t')-f(t'')|:t=(t'_1,\ldots,t'_m)\in I,$$

$$t''=(t''_1,\ldots,t''_m)\in I,\ |t'_i-t''_i|\leq\delta_i,\ i=1,2,\ldots,m\},$$

und die Testfunktionen e_0, e_1, e_2 sind zu ersetzen durch e_0, $e_1^{(1)},\ldots,e_1^{(m)}$, e_2 mit $e_0(t)=1$, $e_1^{(i)}(t)=t_i$, $e_2(t)=t_1^2+\cdots+t_m^2$ für $t=(t_1,\ldots,t_m)\in\Omega$. Für $|\delta|=(\delta_1^2+\cdots+\delta_m^2)^{1/2}\to 0+$ ist $\omega_I(f;\delta_1,\ldots,\delta_m)\downarrow$, und wie in [16] zeigt man, daß für $\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_m)>0$ gilt

$$\omega_I(f;\mu_1\delta_1,\ldots,\mu_m\delta_m)\leq(1+\max]\mu_i[)\,\omega_I(f;\delta_1,\ldots,\delta_m).$$

b) Es ist möglich, den Satz auf einen metrischen Raum (Abstandsfunktion d auf $\Omega\times\Omega$) mit einer kompakten Teilmenge I zu übertragen, wenn man den I-Stetigkeitsmodul für $\delta>0$ erklärt als $\sup\{|f(t')-f(t'')|:t',t''\in I,$ $d(t',t'')\leq\delta\}$ und als Testfunktionen e_0 mit $e_0(t)=1$ und ψ_x mit $\psi_x(t)=d^2(t,x)$ (für $t\in\Omega$) verwendet. Man beachte hierbei, daß zwar die Monotonieeigenschaft von $\omega_I(f,\cdot)$ auf Grund der Definition gesichert ist, daß aber die Herleitung der wichtigen Eigenschaft (2.3) eine Zusatzvoraussetzung über I erforderlich macht, etwa folgender Art: Sind x und y aus I beliebig gewählt mit einem positiven Abstand $d(x,y)$, und stellt man die reelle Zahl $d(x,y)$ auf irgendeine Weise als Summe zweier positiver reeller Zahlen a und b dar, so existiert stets ein Punkt $z\in I$ mit $d(x,z)=a$ und $d(z,y)=b$.

B e m e r k u n g 3. Die rein lokale Aussage des Satzes lässt sich erweitern zu einer Aussage, die gleichmässig für alle Punkte eines in I enthaltenen abgeschlossenen Intervalls J mit $\mathrm{dist}(\Omega-I,J)>0$ (einschliesslich dessen

Randpunkten) gilt, wenn man die Konvergenz für $n\to\infty$ in (0'), (1) und (2) jeweils auf die sup-Norm über J bezieht — was wegen $\alpha_{ni}\in D_b(\Omega)$, $i=0,1,2$ möglich ist —, und wenn man (3) ersetzt durch $\sup\limits_{x\in J}\sup\limits_n (L_n|f|^r)(x)<\infty$. Die Bemerkungen 1 und 2 gelten auch in diesem Fall wieder sinngemäß. So ergibt sich insbesondere im Fall $\Omega=I$ — bei Gültigkeit der Beziehungen (0), (1), (2) und Konvergenz für $n\to\infty$ in der sup-Norm $\|\cdot\|$ über I die Abschätzung

$$\|L_nf-f\|\leq\|K(\delta,n,\cdot)\|\,\omega(f,\delta),\quad \delta>0;\ n\in\mathbb{N}, \tag{2.7}$$

welche bei Anwendung auf konkrete Folgen linearer positiver Operatoren (Bernstein-Operatoren, Operatoren von Meyer-König und Zeller, Operatoren von Szász — Mirakyan, Gammaoperatoren) durchwegs bessere Resultate liefert, als eine entsprechende Abschätzung, die von O. Shisha und B. Mond [19, Theorem 1] angegeben wurde.

Der Satz 1 wird nun auf zwei spezielle Folgen linearer positiver Operatoren angewandt.

Beispiel 1. Operatoren von Meyer-König und Zeller. Es sei A_R der lineare Raum der auf $\Omega=[0,1)$ definierten komplexwertigen Funktionen f, die dort der Wachstumsbedingung $|f(t)|\leq Pe^{p/(1-t)}$ ($P>0$, $p>0$ reelle Konstanten) genügen. Der n-te Operator M_n, $n=1,2,\ldots$ von W. Meyer-König und K. Zeller [11] — in der von E. W. Cheney und A. Sharma [1] angegebenen Modifikation — ordnet einer auf Ω definierten komplexwertigen Funktion f formal die n-te Bernsteinsche Potenzreihe

$$(M_nf)(x)=(1-x)^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+n}{k}x^kf\left(\frac{k}{k+n}\right),\quad x\in\Omega,$$

zu. Im folgenden sei x mit $0<x<1$ ein beliebiger aber fester Punkt und I ein abgeschlossenes Intervall mit $\operatorname{dist}(R-\Omega,I)>0$, welches x in seinem Inneren enthält. Das M_n-Bild einer Funktion $f\in A_R$ existiert auf $[0,x]$ von einem gewissen Index $m=m(f)\in\mathbb{N}$ ab (vgl. [11]), und die Bedingung (3) ist bei beliebig grossem r (>1) erfüllt. Letzteres sieht man folgendermaßen ein. Mit f ist auch die Funktion g, die durch $g(t):=P^re^{pr/(1-t)}$, $t\in\Omega$, definiert ist, aus A_R, und es gilt $(M_n|f|^r)(x)\leq(M_ng)(x)$ für $n\geq m$ (wobei m von g abhängt). Auf Grund eines Monotoniesatzes von E. W. Cheney und A. Sharma [1] folgt aus der Konvexität von g, daß $M_ng\downarrow$ ist (für $n\geq m$). Es gilt somit

$$E_f(x):=\sup_n(M_n|f|^r)(x)\leq(M_mg)(x)=P^re^{pr}(1-x)^{m+1}(1-xe^{pr/m})^{-m-1}<\infty.$$

In [8] wurde gezeigt, daß

$$R_n(x)=\frac{x(1-x)^2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right),\quad n\to\infty,$$

ist — und damit die in Korollar 1 vorausgesetzte Darstellung hat. Gemäß der Bemerkung im Anschluß an die Formulierung von Satz 1 ist es am günstigsten $\delta=\delta(n)=n^{-1/2}$ zu wählen, woraus dann $K(\delta,n,x)=1+x(1-x)^2+o(1)$ folgt. Für jede Wahl von x mit $0<x<1$ und alle n ist insbesondere immer $K(\delta,n,x)\leq 31/27$, da nach einem Ergebnis von H. van Iperen [4] $\sup\{nR_n(x):n\in\mathbb{N},\ 0\leq x\leq 1\}=4/27$ ist. Nach diesen Vorbereitungen können wir nun für jede Funktion $f\in C([0,1),I)\cap A_R$ aus (2.4) eine obere Schranke für die lokale Ordnung der Approximation von M_nf an f bestimmen. Ähnliche Überlegungen sind im Falle $f \in C((0,1], I) \cap A_L$ anzustellen, wo A_L der lineare Raum der auf $(0, 1]$ definierten komplexwertigen Funktionen f ist, die dort der Wachstumsbeschränkung $|f(t)| \leqq Qt^{-q}$ ($Q > 0$, $q > 0$ reelle Kostanten) genügen ($f(0)$ endlich).

Beispiel 2. Gammaoperatoren. Es sei A_L der lineare Raum der auf $\Omega = (0, \infty)$ definierten komplexwertigen Funktionen f, die dort der Wachstumsbedingung $|f(t)| \leqq Pe^{p/t}$ ($P > 0$, $p > 0$ reelle Konstanten) genügen und L-meßbar sind. Der n-te Gammaoperator G_n ($n = 1, 2, \ldots$) [7] ordnet einer auf Ω definierten komplexwertigen Funktion f, die auf Ω L-messbar und beschränkt ist, formal das Integral

$$(G_n f)(x) = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^\infty e^{-xu} u^n f\left(\frac{n}{u}\right) du, \quad x \in \Omega,$$

zu. Im folgenden sei wieder x mit $x > 0$ ein beliebiger aber fester Punkt und I ein abgeschlossenes echt in Ω enthaltenes Intervall, welches x in seinem Inneren enthält. Das G_n-Bild einer Funktion $f \in A_L$ an der Stelle x existiert für alle $n \geqq 1 +]p/x[$, und für beliebiges r (> 1) folgt ähnlich wie in Beispiel 1 auf Grund eines Monotoniesatzes (vgl. [7, Satz 4.3])

$$E_f(x) := \sup_n (G_n |f|^r)(x) \leqq (G_m g)(x) < \infty,$$

wo g definiert ist durch $g(t) := P^r e^{pr/t}$, $t \in \Omega$, und $m = 1 +]pr/x[$ ist. Man zeigt ferner leicht, daß $R_n(x) = x^2(n-1)^{-1}$ ist, woraus dann durch die Wahl $\delta = \delta(n) = (n-1)^{-1/2}$ folgt $K(\delta, n, x) = 1 + x$. Durch Einsetzen der oben gewonnenen Ausdrücke für $E_f(x)$, $R_n(x)$ und $K(\delta, n, x)$ in (2.4) kann man nun für jede Funktion $f \in C((0, \infty), I) \cap A_L$ und $n \geqq m$ eine obere Schranke für die Güte der lokalen Approximation von $G_n f$ an f bestimmen. Ebenso verfährt man im Falle $f \in C([0, \infty), I) \cap A_R$, wo A_R der lineare Raum der auf $\Omega = [0, \infty)$ definierten komplexwertigen Funktionen ist, die dort der Wachstumsbedingung $|f(t)| \leqq Q(1 + t^q)$ ($Q > 0$, $q > 0$ reelle Konstanten) genügen und L-meßbar sind.

Wir betrachten nun Elemente des Raumes $C^1(\Omega, I)$ — also Funktionen mit einer höheren Glätteeigenschaft als bisher — und formulieren hierzu den entsprechenden Satz über die Güte der Approximation durch Folgen linearer positiver Operatoren.

Satz 2. Es sei $\{L_n\}_{n=1}^\infty$ eine Folge linearer positiver Operatoren, die einen linearen Teilraum A aus $C^1(\Omega, I)$, welcher e_0, e_1, e_2 und mit jedem f auch ${}_{\varphi_I}|f|$ enthält, abbilden in den Raum $D_b(I)$. Sind an der festen inneren Stelle $x \in I$ die Voraussetzungen (0), (1), (2), (3) erfüllt, und ist $\omega_I(f', \cdot)$ der für $\delta > 0$ erklärte I-Stetigkeitsmodul von f', so gilt für $n \geqq n_0$

$$(2.8) \qquad |(L_n f)(x) - f(x)| \leqq \left\{[R_n(x)]^{1/2} + \frac{1}{\delta} R_n(x)\right\} \omega_I(f', \delta) + m_x^{-2} |f(x)|\, |P_n(x)|$$
$$+ |f'(x)| \cdot |\alpha_{n1}(x)| + m_x^{-2/s} [E_f(x)]^{1/r} [R_n(x)]^{1/s} + \tfrac{1}{\delta} |f'(x)| [R_n'(x)]$$

(Hierbei sind $R_n(x)$, m_x und s wie in Satz 1 erklärt.)

Wir überlassen den Beweis dem Leser. Die im Anschluß an Satz 1 gemachten Überlegungen und Bemerkungen 1, 2, 3 gelten auch hier.

Im Falle, daß I zu einem Punkt x_0 ausartet, gelten die folgenden Varianten der Sätze 1 und 2.

Zusatz. Die Folge $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ linearer positiver Operatoren bilde einen linearen e_0, e_1, e_2 enthaltenden Teilraum A auf Ω definierter reellwertiger Funktionen in einem Raum von Funktionen ab, deren Definitionsbereich einen Punkt $x_0 \in \Omega$ im Innern enthält. Für eine Folge $\{\varphi_n\}$ positiver Zahlen mit $\varphi_n \to \infty$, $n \to \infty$, gelte

$$(0'', 1'', 2'') \qquad (L_n e_i)(x_0) = x_0^i + O(\varphi_n^{-1}) \text{ für } i = 0, 1, 2.$$

a) Genügt f in x_0 einer lokalen Lipschitz-Hölder-Bedingung der Ordnung α mit $0 < \alpha \leq 1$, d. h. ist

$$(2.9) \qquad \overline{\lim_{t \to x_0}} \frac{|f(t) - f(x_0)|}{|t - x_0|^\alpha} < \infty,$$

und ist $|f|^{2/(2-\alpha)} \in A$ mit

$$(3a) \qquad \overline{\lim_n} (L_n |f|^{2/(2-\alpha)})(x_0) < \infty,$$

dann gilt

$$(2.10) \qquad (L_n f)(x_0) - f(x_0) = O(\varphi_n^{-\alpha/2}).$$

b) Ist f in einer Umgebung von x_0 differenzierbar und genügt f' in x_0 einer Lipschitz-Hölder-Bedingung der Ordnung α mit $0 < \alpha < 1$, ist ferner $|f|^{2/(1-\alpha)} \in A$ mit

$$(3b) \qquad \overline{\lim_n} (L_n |f|^{2/(1-\alpha)})(x_0) < \infty,$$

dann gilt

$$(2.11) \qquad (L_n f)(x_0) - f(x_0) = O(\varphi_n^{-(\alpha+1)/2}).$$

3. Wie in 2. sei Ω eine nichtleere Teilmenge der reellen Zahlengeraden R, $I := [a, b] \subset \Omega (I \neq \Omega)$ ein abgeschlossenes endliches und nicht ausgeartetes Intervall (im nachstehenden Satz 3 ist auch $I = \Omega$ zulässig) und $D_b(\Omega')$ der lineare Raum der auf $\Omega' \subset \Omega$ definierten beschränkten reellwertigen Funktionen.

$H(\Omega, I)$ sei der Raum der auf Ω definierten reellwertigen Funktionen, die auf I lokal monoton sind (d. h. die in I nur Unstetigkeitsstellen 1. Art besitzen und deren dortige Funktionswerte zwischen den links- und rechtsseitigen Grenzwerten liegen [17, 18]). $H'(\Omega, I)$ sei der Raum der Funktionen $\in H(\Omega, I)$, die in a und b stetig sind. Der vervollständigte Graph $\bar{F}_I$ einer Funktion $f \in D_b(I)$, insbesondere der Restriktion einer Funktion $f \in H(\Omega, I)$ auf I, ist definiert durch

$$(3.1) \quad \bar{F}_I := \{(x, y) \in R \times R : x \in I, f(x-0) \leq y \leq f(x+0) \text{ oder } f(x+0) \leq y \leq f(x-0)\};$$

der Hausdorff-Abstand $r_I(f_1, f_2)$ zweier (auf I erklärter) Funktionen f_1, f_2 der angegebenen Art ist als ein Hausdorff-Abstand der vervollständigten Graphen $\bar{F}_{1I}$, $\bar{F}_{2I}$ definiert durch ([14], [17], [18]).

$$(3.2) \qquad r_I(f_1, f_2) := \max\{\max_{U \in \bar{F}_{1I}} \min_{V \in \bar{F}_{2I}} \varrho(U, V), \max_{U \in \bar{F}_{2I}} \min_{V \in \bar{F}_{1I}} \varrho(U, V)\}$$

mit

$$\varrho(U, V) = \max\{|x_U - x_V|, |y_U - y_V|\}, U(x_U, y_U), V(x_V, y_V) \in R \times R.$$

Der folgende Satz macht auf Grund eines Tests der Operatorenfolge $\{L_n\}$ mit den Funktionen e_0, e_1, e_2 eine lokale — ein Intervall $I \subset \Omega$ betreffende — Konvergenzaussage für die L_n-Bilder einer Funktion $f \in H'(\Omega, I)$. Die Verallgemeinerung gegenüber dem Ergebnis von Sendov ([18], Theorem 2) besteht darin, daß I echt in A enthalten sein kann und f außerhalb I nicht beschränkt zu sein braucht. Auch der in [20] angegebene Satz wird im wesentlichen erfaßt.

Satz 3. Es sei $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge linearer positiver Operatoren, die einen linearen Teilraum $A \subset H'(\Omega, I)$, der e_0, e_1, e_2 und mit jedem f auch $\varphi_{\widehat{I}} f$ ($\widehat{I}$ Intervall mit $I \subset \widehat{I} \subset \Omega$) enthält, abbilden in den Raum $D_b(I)$. Es gelte (0''', 1''', 2''')

$$r_I(L_n e_i, e_i) \to 0, \quad n \to \infty, \quad \text{für} \quad i = 0, 1, 2,$$

d. h. (wegen der Stetigkeit von e_i)

$$(L_n e_i)(x) \to x^i, \quad n \to \infty,$$

gleichmäßig für $x \in I$.

Gibt es zu der Funktion $f \in A$ eine reelle Zahl $r > 1$ mit $|f|^r \in A$ und

$$\text{(3''')} \qquad \overline{\lim_n} \sup_{x \in A} (L_n |f|^r)(x) < \infty,$$

dann gilt

$$\text{(3.3)} \qquad r_I(L_n f, f) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Beim Beweis des Satzes verwenden wir den folgenden

Hilfssatz 1. Für zwei Funktionen $f, g \in D_b(I)$ gilt

$$\text{(3.4)} \qquad r_I(f, g) \leq \sup_{t \in I} |f(t) - g(t)|.$$

Man erhält diesen Hilfssatz unmittelbar, indem man Lemma 1.2 in [14] für

$$\delta = \sup_{t \in I} |f(t) - g(t)| + \varepsilon$$

anwendet und dabei $\varepsilon \downarrow 0$ gehen läßt.

B e w e i s v o n S a t z 3. Es genügt, den Fall zu behandeln, daß zu $I = [a, b]$ ein Intervall $\widehat{I} = [\widehat{a}, \widehat{b}] \subset \Omega$ existiert mit $-\infty < \widehat{a} < a < b < \widehat{b} < \infty$, in dem f (wegen der Stetigkeit in a und b) beschränkt ist. Mit $\widetilde{g}$ sei im folgenden eine auf Ω definierte Funktion bezeichnet, die aus einer auf I oder Ω definierten Funktion g dadurch entsteht, daß

$$\widetilde{g}(t) := \begin{cases} g(t) & \text{für} \quad t \in I, \\ g(a) & \text{für} \quad t < a, \\ g(b) & \text{für} \quad t > b \end{cases}$$

gesetzt wird. Mit den Bezeichnungen $\overline{f} = f - \widetilde{f}$, $k_{\widehat{I}} = e_0 - \varphi_{\widehat{I}}$ erhalten wir auf Grund der Dreiecksungleichung und des Hilfssatzes 1 die Beziehungen

$$r_I(L_n f, f) = r_I[L_n(\varphi_{\widehat{I}} \widetilde{f}) + L_n(\varphi_{\widehat{I}} \overline{f}) + L_n(k_{\widehat{I}} f), f]$$

$$\leq r_I[L_n(\varphi_{\widehat{I}} \widetilde{f}) + L_n(\varphi_{\widehat{I}} \overline{f}) + L_n(k_{\widehat{I}} f), L_n(\varphi_{\widehat{I}} \widetilde{f})] + r_I[L_n(\varphi_{\widehat{I}} \widetilde{f}), f]$$

$$\leq r_I[L_n(\varphi_{\widetilde{I}}\widetilde{f}), f] + \sup_{x \in I} |L_n(\varphi_{\widetilde{I}}\overline{f})(x)| + \sup_{x \in I} |L_n(k_{\widetilde{I}}f)(x)|$$

$$=: B_{1n} + B_{2n} + B_{3n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wir zeigen, daß $\{B_{1n}\}$, $\{B_{2n}\}$, $\{B_{3n}\}$ Nullfolgen sind.

Beim Nachweis für $\{B_{1n}\}$ führen wir eine modifizierte Folge $\{L_n^*\}$ linearer positiver Operatoren ein, um einen von Sendov stammenden Satz Korowkinschen Typs für die Hausdorff-Metrik verwenden zu können. L_n^* sei auf dem linearen Raum in I definierter Funktionen g, der durch die (in gleicher Weise bezeichneten) Restriktionen von e_0, e_1, e_2 und f auf I aufgespannt wird, definiert durch

$$(L_n^*g)(x) := (L_n(\varphi_{\widetilde{I}}\widetilde{g}))(x), \quad x \in I, \ n \in \mathbb{N}.$$

Aus den Voraussetzungen des Satzes ergibt sich nach Korowkin ([5], Theorem 3) $(L_n^*e_i)(x) \to x^i$, $n \to \infty$, gleichmäßig für $x \in I$ $(i=0, 1, 2)$. Daraus erhalten wir nach Sendov ([18], Theorem 2) $r_1(L_n^*f, f) \to 0$, $n \to \infty$, d. h. $B_{1n} \to 0$, $n \to \infty$. Die Beziehung $B_{2n} \to 0$, $n \to \infty$, ergibt sich leicht nach [5], Theorem 3.

Der Nachweis, daß $\{B_{3n}\}$ eine Nullfolge ist, geschieht folgendermaßen. Mit $\delta^* := \min(|a-\widehat{a}|, |b-\widehat{b}|)$ sei k_x^* auf Ω definiert durch $k_x^*(t) = 0$ für $t \in (x-\delta^*, x+\delta^*) \cap \Omega$, $k_x^*(t) = 1$ sonst.

Aus der für ein beliebiges $x \in I$ geltenden Beziehung

$$k_{\widetilde{I}}|f| \leq k_x^* |f| \leq \delta^{*-2/s} \psi_x^{1/s} |f|, \quad s = r(r-1)^{-1},$$

erhalten wir gemäß einer allgemeinen Hölderschen Ungleichung für lineare positive Funktionale

$$|(L_n(k_{\widetilde{I}}f))(x)| \leq \delta^{*-2/s} [(L_n\psi_x)(x)]^{1/s} [(L_n |f|^r)(x)]^{1/r}, \ x \in I.$$

Mit den Voraussetzungen des Satzes ergibt sich daraus das gewünschte Resultat.*

Satz 3 läßt sich in naheliegender Weise auf die in den Beispielen 1 und 2 angegebenen Operatorenfolgen anwenden. Die Bemerkung 3 zu Satz 1 betraf u. a. die Güte der Approximation in $I \subset \Omega$ stetiger Funktionen bezüglich einer sup-Norm über ein abgeschlossenes nur innere Punkte von I enthalten des Intervall J. Dabei wurde der I-Stetigkeitsmodul der zu approximierenden Funktion verwendet (für eine leichte Variante läßt sich auch der J-Stetigkeitsmodul benützen). Der nachstehende Satz 4 behandelt nun die Approximation in $I \subset \Omega$ lokal monotoner Funktionen f in der Hausdorff-Metrik über J, wobei ein J-Nichtmonotonie-Modul $\mu_J(f, \cdot)$ verwendet wird. Dieser ist — in Übertragung des Begriffs des Nichtmonotonie-Moduls ([14], [17], [18]) auf die Restriktion von f bezüglich $J=[a', b']$ — als eine von f und J abhängige Funktion für $\delta > 0$ durch

$$\text{(3.5)} \qquad \mu_J(f, \delta) := \sup\{\sup_{t_1 \leq t \leq t_2} [|f(t_1) - f(t)| + |f(t_2) - f(t)|] - |f(t_1) - f(t_2)|] : t_1, t_2 \in J, |t_1 - t_2| \leq \delta\}$$

erklärt.

---

* Der Beweis läßt sich auf den Fall übertragen, daß statt den Hausdorff-Abstandes der von Korowkin in seinem Tagungsbeitrag eingeführte allgemeinere Abstandsbegrif vorliegt.

Bei zwei Funktionen $f, g \in D_b(\Omega)$, die am Rande des nur innere Punkte von Ω enthaltenden abgeschlossenen Intervalls J eine große Steigung besitzen, kann der unerwünschte Fall $r_J(f, g) > r_\Omega(f, g)$ auftreten. Um dies auszuschließen, wird für eine Funktion $f \in D_b(J)$, insbesondere für die Restriktion einer Funktion $f \in H(\Omega, I)$ auf J, ein modifizierter vervollständigter Graph

$$(3.1^*) \qquad \overline{F}_J^* := \overline{F}_J \cup \{(a', y) : -\infty < y < \infty\} \cup \{(b', y) : -\infty < y < \infty\}$$

eingeführt und der modifizierte Hausdorff-Abstand $r_J^*(f_1, f_2)$ zweier (auf J erklärter) Funktionen f_1, f_2 der angegebenen Art als ein Hausdorff-Abstand der modifizierten vervollständigten Graphen $\overline{F}_{1J}^*, \overline{F}_{2J}^*$ durch

$$(3.2^*) \qquad r_J^*(f_1, f_2) := \max\{\max_{U \in \overline{F}_{1J}^*} \min_{V \in \overline{F}_{2J}^*} \varrho(U, V), \max_{U \in \overline{F}_{2J}^*} \min_{V \in \overline{F}_{1J}^*} \varrho(U, V)\}$$

definiert und im folgenden verwendet.

Satz 4. Es sei $\{L_n\}_{n=1}^\infty$ eine Folge linearer positiver Operatoren, die einen linearen Teilraum $A \subset H(\Omega, I)$, der e_0, e_1, e_2 und mit jedem f auch $\varphi_I f$ enthält, abbilden in den Raum $C(\Omega, I)$. $J := [a', b']$ sei ein Intervall $\subset I$ mit $m_J := \min(|a - a'|, |b - b'|) > 0$. Es gelte

$$(0^{IV}) \qquad (L_n e_0)(x) = 1 \text{ für } x \in J,\ n \in \mathbb{N}.$$

Gibt es zu der Funktion $f \in A$ eine reelle Zahl $r > 1$ mit $|f|^r \in A$ und

$$(3^{IV}) \qquad E_{fJ} := \sup_n \max_{x \in J} (L_n |f|^r)(x) < \infty$$

(wobei n gegebenenfalls erst von einem endlichen Index n_0 ab läuft), so gilt für $\delta > 0$ und $n \geqq n_0$ die Beziehung

$$(3.6) \quad r_J^*(L_n f, f) \leqq \max\left\{\delta,\ 8 \sup_{t \in I} |f(t)|\, \delta^{-2} R_{nJ} + \frac{1}{2}\mu_J(f, 2\delta)\right\} + m_J^{-2/s} E_{fJ}^{1/r} R_{nJ}^{1/s}$$

mit $R_{nJ} := \max_{x \in J} (L_n \psi_x)(x)$, $s = r(r-1)^{-1}$.

B e m e r k u n g 3. Im Falle $\Omega = I$ fällt in der behaupteten Ungleichung der letzte — E_{fJ} enthaltende — Summand weg; hier ist auch $J = I$ zulässig. Man vergleiche dazu die beiden nachstehend zitierten Arbeiten.

Dem Beweis des Satzes 4 wird ein Hilfssatz vorangestellt, der sich leicht aus dem Beweis des Satzes 2.13 in [8] (vgl. auch [17]) ergibt.

Hilfssatz 2. Es sei $\{L_n\}$ eine Folge linearer positiver Operatoren wie in Satz 4, $f \in H(\Omega, I) \cap D_b(\Omega)$ und δ eine beliebige positive Zahl. Dann gilt mit $M = \sup_{t \in \Omega} |f(t)|$ die Beziehung

$$(3.7) \qquad r_J^*(L_n f, f) \leqq \max\left\{\delta,\ 8M\delta^{-2} R_{nJ} + \frac{1}{2}\mu_J(f, 2\delta)\right\} \text{ für } n = 1, 2, \ldots.$$

B e w e i s. Wir setzen $L_n f := g_n$ und $R_n(x) := (L_n \psi_x)(x)$. Es genügt, die beiden folgenden Behauptungen nachzuweisen.

a) Zu einem Punkt $Z_1(x_1, y_1) \in \overline{G}_{nJ}^*$ existiert ein Punkt $Z_2(x_2, y_2) \in \overline{F}_J^*$ so, daß $|x_1 - x_2| < \delta$, $|y_1 - y_2| \leqq 2M\delta^{-2} R_n(x_1)$ gilt.

b) Zu einem Punkt $Z_1(x_1, y_1) \in \overline{F}_J^*$ existiert ein Punkt $Z_2(x_2, y_2) \in \overline{G}_{nJ}^*$ so, daß $|x_1 - x_2| < \delta$, $|y_1 - y_2| \leq \frac{1}{2} \mu_J(f, 2\delta) + 8M\delta^{-2} R_n(x_2)$ gilt.

Für $\mathrm{dist}(x_1, \Omega - J) \geq \delta$ ergeben sich diese Aussagen nach dem Beweis von Lemma 2.11 bzw. dem ersten Teil des Beweises von Lemma 2.12 in [8]. Für $\mathrm{dist}(x_1, \Omega - J) < \delta$ sind sie trivial.

Es folgt nun der

Beweis von Satz 4. Mit der Dreiecksungleichung und einer auf modifizierte vervollständigte Graphen bezogenen Variante von Hilfssatz 1 erhalten wir

$$r_J^*(L_n f, f) \leq r_J^*[L_n(\varphi_I f) + L_n(k_I f), L_n(\varphi_I f)] + r_J^*[L_n(\varphi_I f), f]$$
$$\leq r_J^*[L_n(\varphi_I f), \varphi_I f] + \max_{x \in J} |(L_n(k_I f))(x)|.$$

Der erste Summand der rechten Seite wird nach Hilfssatz 2 unter Beachtung von

$$\sup_{t \in \Omega} |\varphi_I(t) f(t)| = \sup_{t \in I} |f(t)|$$

durch

$$\max \left\{ \delta, 8 \sup_{t \in I} |f(t)| \delta^{-2} R_{nJ} + \frac{1}{2} \mu_J(f; 2\delta) \right\}$$

abgeschätzt und der zweite Summand gemäß Abschnitt 2 durch

$$\overline{m}_J^{-2/s} E_{fJ}^{1/r} R_{nJ}^{1/s}.$$

Eine Anwendung des Satzes 4 besteht darin, daß man $\delta = \delta(n)$ im Unterschied zu den Anwendungen des Satzes 1 so wählt, daß $\delta(n) \sim \delta(n)^{-2} R_{nJ}$, also $\delta(n) \sim R_{nJ}^{1/3}$ gilt; außerdem achtet man wie früher darauf, die reelle Zahl $r (> 1)$ in (3^{IV}) größtmöglich zu wählen. Im Falle der oben erklärten Operatoren M_n von Meyer-König und Zeller und der Gamma-Operatoren G_n bedeutet dies, $\delta_n = n^{-1/3}$ bzw. $(n-1)^{-1/3'}$ zu verwenden; r darf dabei beliebig groß sein. Eine Verbesserung der angegebenen Approximationsordnung ist möglich, wenn die Fälle $\mu(\delta) \geq \delta$ oder $\mu(\delta) \leq \delta$ $(\delta > 0)$ vorliegen und mit n variierende Testfunktionen (vgl. [17]).

LITERATUR

1. E. W. Cheney, A. Sharma. Bernstein power series. *Canad. J. Math.*, **16** (1964), 241—252.
2. R. de Vore. Optimal convergence of positive linear operators (im Druck).
3. П. В. Ермаков. Об условиях сходимости линейных положительных операторов на неограниченных множествах. В сб., Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций. Баку, 1965, 146—151.
4. H. van Iperen. Some estimates concerning Meyer-König and Zeller operators (in Vorbereitung).
5. P. P. Korowkin. Linear operators and approximation theory. Delhi, 1960.
6. G. G. Lorentz. Bernstein polynomials. Toronto, 1953.
7. A. Lupaş, M. W. Müller. Approximationseigenschaften der Gammaoperatoren. *Math. Z.*, **98** (1967), 208—226.

8. A. Lupaş, M. W. Müller. Approximation properties of the Meyer-König and Zeller operators. *Aequationes Mathematicae*, **5** (1970), 19—37.
9. Р. Г. Мамедов. Асимптотическое значение приближения дифференцируемых функций линейными положительными операторами. *Доклады АН СССР*, **128** (1959), 471—474.
10. Р. Г. Мамедов. О порядке приближения функций линейными положительными операторами. *Доклады АН СССР*, **128** (1959), 674—676.
11. W. Meyer-König, K. Zeller. Bernsteinsche Potenzreihen. *Studia Math.*, **19** (1960), 89—94.
12. M. W. Müller. Die Folge der Gammaoperatoren. Dissertation, Stuttgart, 1967.
13. M. W. Müller. On asymptotic approximation theorems for sequences of linear positive operators. Approximation Theory. (Internat. Symp. Univ. Lankaster, July 1969). London, 1970, p. 315—320.
14. B. Penkov, Bl. Sendov. Hausdorffsche Metrik und Approximation. *Numer. Math.*, **9** (1966), 214—226.
15. T. Popoviciu. Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur. *Mathematica*, **10** (1935), 49—54.
16. F. Schurer. On linear positive operators in approximation theory. Thesis Techn. Univ. Delft, 1965, 78.
17. Бл. Сендов. Об одной оценке приближения функции многочленами С. Н. Бернштейна. *Mathematica*, **7** (30) (1965), 145—154.
18. Бл. Сендов. О теоремах П. П. Коровкина для сходимости последовательностей линейных положительных операторов. *Доклады АН СССР*, **117** (1967), 518—520.
19. O. Shisha, B. Mond. The degree of convergence of linear positive operators. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **60** (1968), 1196—1200.
20. H. Walk. Approximation durch Folgen linearer positiver Operatoren. *Arch. Math.*, **20** (1969), 398—404.

Mathematisches Institut A der Universität Stuttgart
Herdweg 23 7 Stuttgart BRD

Eingegangen am 20 Mai 1970