Труды Международной Конференции по конструктивной теории функций Варна, 19—25 мая 1970

Proceedings of the International Conference on Constructive Function Theory, Varna, May 19—25, 1970

INTERVALLES D'INTERPOLATION RELATIFS AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

D. Ripianu

Résumé. Dans cette note on détermine différentes classes d'équations différentielles dont l'ensemble des solutions est interpolatoire sur un intervalle donné $[a, b]$, $a<b$.

1. On désignera pour abréger par $I_n[a, b]$ la propriété d'une équation différentielle d'admettre l'intervalle $[a, b]$ comme intervalle d'interpolation pour l'ensemble de ses solutions.

On se servira de la méthode de Ch. de la Vallée-Poussin [1] mais on obtiendra des résultats moins généraux que ceux qu'il a obtenus au cas $n=2$, du fait que pour réduire une équation donnée d'ordre n à une équation ayant la propriété $I_n[a, b]$ il faut imposer $n-1$ conditions (à la place d'une condition au cas $n=2$ envisagé par Ch. de la Vallée-Poussin) aux coefficients de l'équation donnée.

On supposera donc $n \geqq 3$ et on se servira d'un

Lemme. L'équation

$$y^{(n)}(x)+A(x)\,y^{(n-1)}(x)=0, \quad A \in C[a, b], \tag{1}$$

jouit de la propriété $I_n[a, b]$.

D é m o n s t r a t i o n. On déduit de (1) $y^{(n-1)}(x)=C\exp\left(-\int_a^x A(s)\,ds\right)$ (C constante). Si donc une intégrale $y_0(x)$ de (1) avait n zéros dans $[a, b]$, alors $y_0^{(n-1)}(x)$ y aurait une racine au moins, donc $C=0$, $y_0^{(n-1)}(x)\equiv 0$ et $y_0(x)\equiv 0$ (comme polynome de degré au plus $n-2$ qui possède n zéros). En vertu d'un résultat bien connu, l'équation (1) jouit donc de la propriété $I_n[a, b]$.

2. On désignera par $\varrho(x)$ une fonction de la classe $C^{(n)}[a, b]$ et on écrira

$$\varphi(x)=\varrho'(x), \quad (e^{\varrho(x)})^{(s)}=P_s(x)e^{\varrho(x)};$$

$$P_{s+1}(n)=P_s'(x)+\varphi(x)\,P_s(x), \qquad s=0, 1, \ldots; \; P_0(x)\equiv 1; \tag{2}$$

$$A_s(x)=\sum_{\sigma=0}^{s} C_{n-\sigma}^{s-\sigma}\, a_s(x)\, P_{s-\sigma}(x), \quad s=\overline{1, n}; \; a_0(x)\equiv 1)$$

(au cas $s=n$ il faut remplacer C_0^0 par 1), relativement à l'équation

$$y^{(n)}(x)+a_1(x)y^{(n-1)}(x)+\cdots+a_s(x)y^{(n-s)}(x)+\cdots+a_n(x)y(a)=0, \tag{3}$$

$$a_s(x)\in C[a, b],\ s=\overline{1, n}.$$

Théorème 1. S'il existe une fonction $\varphi(x)\in C^{(n-1)}[a, b]$ telle que l'on ait en (2)

$$A_s(x)\equiv 0, \quad s=\overline{2, n}, \tag{4}$$

alors l'équation (3) jouit de la propriété $I_n[a, b]$.

Démonstration. On fera le changement

$$y=u(x)e^{\varrho(x)} \tag{5}$$

u étant la nouvelle fonction inconnue et $\varrho(x)$ une fonction à déterminer. L'équation (3) s'écrit alors

$$u^{(n)}(x)+A_1(x)u^{(n-1)}(x)+\cdots+A_s(x)u^{(n-s)}(x)+\cdots+A_n(x)u(x)=0, \tag{6}$$

avec $A_s(x)$ donnés par (2). Si la fonction $\varrho(x)$ est telle qu'on ait les relations (4), l'équation (6) prend la forme (1). Selon le lemme, toute solution de (6) qui possèderait n zéros dans $[a, b]$ est identiquement nulle. Toute solution y de l'équation (3) qui aurait n zéros les transmettrait donc, grâce à (5), à la solution u respective de l'équation (6) (qui a pris la forme (1)), donc serait identiquement nulle, ce qui démontre le théorème. On en déduit immédiatement le

Théorème 2. L'équation (3) où $a_s(x)$, $s=\overline{2, n}$ sont fournis par les $n-1$ relations (2)

$$A_s(x)\equiv 0, \quad s=\overline{2, n}, \tag{7}$$

et $a_1(x)$ et $\varphi(x)$ sont des fonctions prises arbitrairement, respectivement dans $C[a, b]$ et $C^{(n-1)}[a, b]$, jouit de la propriété $I_n[a, b]$.

On peut d'ailleurs remplacer les conditions du théorème 1, qui introduisent une fonction arbitraire $\varphi(x)$, par des conditions portant sur les coefficients $a_s(x)$, $s=\overline{1, n}$, de (3) et leurs dérivées, en présentant le

Théorème 3. L'équation (3), dont les coefficients

$$a_1(x)\in C^{(n)}[a, b],\ a_2(x)\in C^{(n)}[a, b],\ a_3(x)\in C^{(n-1)}[a, b],\ a_s(x)\in C[a, b],\ s=\overline{4, n},$$

vérifient les $n-2$ relations

$$A_2(x)\equiv 0,\ A_s(x)\equiv 0,\ s=\overline{4, n} \tag{8a}$$

où

$$\varphi(x)=\varphi_0(x)=\frac{-(n-2)\,a_1(x)\,a_2(x)-n(n-2)\,a_2'(x)+3na_3(x)}{(n-2)\left[n(n-1)\,a_1'(x)+(n-1)\,a_1^2(x)-2na_n(x)\right]} \tag{8b}$$

avec $n(n-1)\,a_1'(x)+(n-1)\,a_1^2(x)-2na_n(x)\neq 0$ pour tout $x\in[a, b]$, jouit de la propriété $I_n[a, b]$.

Démonstration. Les relations (2) donnent

$$A_2=C_n^2P_2+C_{n-1}^1a_1P_1+a_2;\ A_3=C_n^3P_3+C_{n-1}^2a_1P_2+C_{n-2}^1a_2P_1+a_3.$$

On en tire, en faisant $A_{02}=0$, $A_3=0$ et en remplaçant P_1, P_2, P_3 par leurs valeurs données par (2)

$$C_n^2(\varphi'+\varphi^2)+(n-1)\,a_1\varphi+a_2=0, \tag{9}$$

$$C_n^3(\varphi''+3\varphi\varphi'+\varphi^3)+C_{n-1}^2 a_1(\varphi'+\varphi^2)+C_{n-2}^1 a_2\varphi+a_3=0. \tag{10}$$

Si l'on dérive les deux termes de la relation (9), puis si l'on remplace dans (10) φ'' par sa valeur tirée de la relation ainsi obtenue, on obtient une relation qui devient, si l'on y remplace $\varphi'+\varphi^2$ par sa valeur tirée de (9), une équation du premier degré en l'inconnue φ qui donne la valeur (8b) de φ_0. Les relations (8b) et (9) sont évidemment équivalentes aux relations (9) et (10), vu que si dans la relation (10) on remplace φ_0'' par sa valeur déduite de la relation obtenue en dérivant les deux termes de (9) et l'expression $\varphi_0'+\varphi_0^2$ par sa valeur tirée toujours (9), cette relation (10) acquiert la forme (8), donc est satisfaite. La relation (12) et les relations $A_s(x)=0$, $s=\overline{4, n}$, avec φ_0 à la place de φ assurent donc en vertu du théorème 1 l'existence de la propriété $I_n[a, b]$.

Remarques. 1°. Etant donné que $A_s(x)$ comprend $\varphi(x)$ et ses dérivées jusqu'à l'ordre $s-1$, $s=\overline{2, n}$, il faut supposer $\varphi \in C^{(n-1)}[a, b]$, donc $\varrho \in C^{(n)}[a, b]$ pour que l'équation (6) ait des coefficients continus. D'ailleurs, les relations (7) donnent successivement $a_s(x)$, $s=\overline{2, n}$, sous la forme de polynomes du premier degré en a_1 dont les coefficients sont des polynomes en $\varphi(x)$, $\varphi'(x), \ldots, \varphi^{(s-1)}(x)$, la condition $\varphi \in C^{(n-1)}[a, b]$ assure la continuité dans $[a, b]$ des coefficients de l'équation (3) dans le théorème 2.

2°. La relation (8) $A_s(x)=d$, $s=2$ ou $s=\overline{4, n}$ fait intervenir $\varphi_0(x)$ $\varphi_0'(x), \ldots, \varphi_0^{(s-1)}(n)$, elle comprend $a_1(x)$, $a_1'(x)$, $a_1''(x)$, $a_2(x)$, $a_2'(x)$, $a_2''(x)$ $a_3(x)$ et $a_3'(x)$ au cas $s=2$ (relation (9)) et $a_1(x)$, $a_1'(x), \ldots, a_1^{(s)}(x)$, $a_2(x)$, $a_2'(x), \ldots, a_2^{(s)}(x)$, $a_3(x)$, $a_3'(x), \ldots, a_3^{(s-1)}(x)$, $a_4(x), \ldots, a_s(x)$ au cas $s \geqq 4$ Pour que les relations (8) concernent des fonctions continues, il faut donc que $a_1(x) \in C^{(n)}[a, b]$, $a_2(x) \in C^{(n)}[a, b]$, $a_3(x) \in C^{(n-1)}[a, b]$ et $a_s(x) \in C[a, b]$, $s=\overline{4, n}$, ce qui d'ailleurs, avec l'hypothèse du théorème 3, assure l'appartenance de $\varphi_0(x)$ de (8) à la classe $C^{(n-1)}[a, b]$.

A titre de cas particuliers, on présentera les propositions suivantes, obtenues en faisant dans les théorèmes 2 et 3, $n=3$ et en écrivant $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ à la place de $a_1(x)$, $a_2(x)$, $a_3(x)$.

Théorème 4. L'équation

$$y^{(3)}(x)+A(x)y^{(2)}(x)-[3\varphi'(x)+3\varphi^2(x)+2A(x)\,\varphi(x)]\,y'(x)$$
$$+[A(x)[-\varphi'(x)+\varphi^2(x)]-\varphi''(x)+3\varphi^3(x)]\,y(x)=0$$

où $A(x) \in C[a, b]$ et $\varphi(x) \in C^{(2)}[a, b]$ possède la propriété $I_3[a, b]$.

Théorème 5. L'équation $y^{(3)}(x)+A(x)\,y^{(2)}(x)+B(x)\,y'(x)+C(x)\,y(x)=0$ dont les coefficients $A(x) \in C^{(2)}[a, b]$, $B(x) \in C^{(2)}[a, b]$, $C(x) \in C^{(1)}[a, b]$ vérifient les relations suivantes:

$$A^2(x)-3B(x)+3A'(x)\neq 0 \text{ pour tout } x \in [a, b],$$

$$6[A^2(x)-3B(x)+3A'(x)]\,C'(x)+[4A^3(x)-18A(x)B(x)-18A''(x)]\,C(x)$$
$$+27C^2(x)+2A''(x)[A(x)B(x)+3B''(x)]-2B''(x)[A^2(x)-3B(x)$$

$$+3A'(x)]-6B^2(x)A''(x)+6A(x)B(x)B'(x)+4B^3(x)+27A^2(x)B(x)A'(x)$$
$$-2A^3(x)B'(x)-A^2(x)B^2(x)+2B(x)A'^2(x)-2A(x)A'(x)B'(x)$$
$$-3B'^2(x)\equiv 0$$

jouit de la propriété $I_3[a, b]$.

BIBLIOGRAPHIE

1. Ch. de la Vallée-Poussin. Sur l'équation différentielle linéaire du second ordre. *J. de math. pures et appl.* **8** (1929), 125–144.

4 Str. N. Jorga
Cluj Romania

Reçu le 8 juillet 1970