*Труды Международной Конференции по конструктивной теории функций Варна, 19—25 мая 1970*

*Proceedings of the International Conference on Constructive Function Theory, Varna, May 19—25, 1970*

# ÜBER DIFFERENZIERTE INTERPOLATIONSPOLYNOME

**P. O. Runck**

***Zusammenfassung.*** Es werden Approximationseigenschaften von Lagrangeschen $L_n(f; x)$ und Hermiteschen $H_n(f; x)$ Polynomen und deren Ableitungen betrachtet. Es gilt die Abschätzung $|L_n(f, x)-f(x)| \leqq c_1 M \sum_{\nu=0}^{n} |l_\nu(x)| (1-x_\nu^2)^{(k+\alpha)/2} n^{-(k+\alpha)/2} + c_2 M n^{-k-\alpha}$ unter den Bedingungen $f^{(k)} \in \mathrm{Lip}\, M^\alpha$, $|x_\nu - x_{\nu-1}| \geqq c_3 n^{-1}(1-x_\nu^2)^{1/2}$ Ähnliche Abschätzungen gelten für $|H_n(f, x)-f(x)|$, $|f^{(m)}(x)-L_n^{(m)}(f, x)|$, $m<n$. Wenn die Interpolationsknoten Nullstellen Jakobischer Polynome $P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)$ sind werden einige bekannte Resultate verbessert. Z. B. ist die gleichmäßige Konvergenz von $L_n^{(m)}(f, x)$ gegen $f^{(m)}(x)$ bewiesen, wenn $f^{([2m+\alpha+1/2])}$ zur Klasse $\mathrm{Lip}\{\alpha+1/2-[\alpha+1/2]\}$, $m \geqq 1$ gehört.

Gegeben sei eine Folge von Lagrangeschen bzw. Hermiteschen Interpolationspolynomen $(L_n)_{n=1}^{\infty}$ bzw. $(H_n)_{n=1}^{\infty}$ mit

$$L_n(f, x)=\sum_{\nu=0}^{n} l_\nu(x) f(x_\nu), \tag{1}$$

$$H_n(f, x)=\sum_{\nu=0}^{n} (h_\nu(x) f(x_\nu)+\mathfrak{H}_\nu(x) f'(x_\nu)), \tag{2}$$

$x$, $x_\nu = x_{\nu n} \in [-1, 1]$, $x_\nu$ paarweise disjunkt.

Die Approximationseigenschaften der Interpolationspolynome $L_n$ erhält man üblicherweise mit Hilfe

i) der sogenannten Lebesguefunktion

$$\Lambda_n(x)=\sum_{\nu=0}^{n} |l_\nu(x)|;$$

ii) von $E_n(f)$, der besten Approximation für $f$ durch Polynome vom Grad $\leqq n$, deren Größe durch die Jacksonsätze in Abhängigkeit von den Struktureigenschaften bestimmt wird.

Durch

$$|f(x)-L_n(f, x)| \leqq (\Lambda_n(x)+1) E_n(f) \tag{3}$$

ergibt sich ein obere Schranke für die Abweichung.

Für die Interpolationspolynome von Hermite gelten die entsprechenden Bemerkungen. Jedoch benötigt man hier Jacksonsätze für simultane Approximation. Bedeutet $E_n^{[1]}(f')$ die Abweichung des differenzierten bestapproximierenden Polynoms für $f$ in bezug auf $f'$, so ergibt sich hier

$$(4)\qquad |f(x)-H_n(x)|\leq\left(\sum_{\nu=0}^{n}|h_\nu(x)|+1\right)E_{2n}(f)+\left(\sum_{\nu=0}^{n}|\mathfrak{H}_\nu(x)|\right)E_{2n}^{[1]}(f').$$

Analoge Beziehungen gelten für $m$-mal differenzierte Lagrange bzw. Hermitepolynome $L_n^{(m)}(f, x)$ bzw. $H_n^{(m)}(f, x)$. So ergibt sich z. B. für $n\geq m$

$$(5)\qquad |f^{(m)}(x)-L^{(m)}(f, x)|\leq\left(\sum_{\nu=0}^{n}|l_\nu^{(m)}(x)|\right)E_n(f)+E_n^{(m)}(f^{(m)}).$$

T u r a n und E r d ö s [3] haben im Falle der Lagrangeinterpolation 1955 gezeigt daß man mit Hilfe der Lebesguefunktionen und dem Jacksonsatz nur hinreichende Bedingungen für das Approximationsverhalten erhalten kann, und daß anstelle von (3) für Approximationsaussagen feinere Beziehungen gelten. Es ergeben sich komplizierte Bedingungen, in denen außer den Grundpolynomen $l_\nu(x)$ die Abstände der Interpolationsknoten eingehen (vgl. [6]). Sind die Interpolationsknoten in einem gewissen Sinn gleichmäßig verteilt, so gelten einfachere Beziehungen, die sich nicht so sehr von (3), (4), (5) unterscheiden. Ein solcher Fall ist gegeben, wenn als Interpolationsknoten die Nullstellen der Jacobipolynome $P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)$, $\alpha, \beta>-1$, gewählt werden.
Anstelle von (3) gilt ([6])

$$(6)\qquad |L_n(f, x)-f(x)|\leq c_1M\sum_{\nu=0}^{n}|l_\nu(x)|\left(\frac{\sqrt{1-x_\nu^2}}{n}\right)^{k+\alpha}+c_2M\left(\frac{1}{n}\right)^{k+\alpha}$$

falls

$$(7)\qquad \begin{aligned} &\text{i)}\quad f^{(k)}\in \mathrm{Lip}_M\alpha,\qquad k=0, 1, \ldots, 0<\alpha\leqq 1\,,\\ &\text{ii)}\quad |x_\alpha-x_{\nu-1}|\geqq\frac{c_3}{n}\sqrt{1-x_\nu^2}\end{aligned}$$

($c_i$ positive Konstanten) erfüllt ist.

Anstelle von (4) bzw. (5) erhält man unter der Voraussetzung (7), mit $k\geqq 1$ bzw. $m$ Ausdrücke mit den Summanden $|h(x)|(\sqrt{1-x_\nu^2}/n)^{k+\alpha}$, $|\mathfrak{H}_\nu(x)|(\sqrt{1-x_\nu^2}/n)^{k-1+\alpha}$ bzw. $|l_k^{(m)}(x)|(\sqrt{1-x_\nu^2}/n)^{k+\alpha}$.

B e m e r k u n g. Es sind (6) und (7) notwendige und hinreichende Beziehungen. Zum Beweis der Hinlänglichkeit wird der Approximationssatz der (simultanen) Approximation mit der von T i m a n angegebenen Verbesserung des Jacksonsatzes an den Intervallenden [8] herangezogen.

In den Arbeiten [1], [2] von B a d k o v, auf die mich freundlicherweise Herr Prof. Stečkin aufmerksam machte, wird bei der Untersuchung des Konvergenzverhaltens der Partialsummen der Fourier — Jacobi-Reihen einer Funktion auch die Verbesserung des Jacksonsatzes als Hilfsmittel herangezogen.

Die Frage, die sich sofort stellt, ist folgende: Erhält man im Falle, daß die Interpolationsknoten gleich den Nullstellen der Jacobipolynome $P^{(\alpha\beta)}_{(n+1)}(x)$ sind, mittels des feineren Abschätzungsverfahrens Verbesserungen im Vergleich zur üblichen Methode?

Herr L. Neckermann und ich haben in [4], [5] diese Frage für $m$-mal differenzierte ($m \geqq 0$) Interpolationspolynome von Lagrange und Hermite untersucht. (Die Ergebnisse vermöge von (3) für $m=0$ finden sich z. B. bei Szegö [7].) Dabei zeigte es sich, daß für die Interpolationspolynome von Lagrange und Hermite ($m=0$) keine Verbesserungen zu erhalten sind. Jedoch ergeben sich im Fall der $m$-mal differenzierten Interpolationspolynome von Lagrange für $-1<\alpha, \beta<-1/2$ bzw. von Hermite für $-1<\alpha, \beta<0$ Verbesserungen.

Man erhält ([4]) z. B. folgende Konvergenzaussage für die Nullstellen von $P^{(\alpha,\beta)}_{n+1}(x)$ als Interpolationsknoten in $[-1, 1]$ und für die hierzu gehörigen $m$-mal differenzierten Lagrangepolynome $L^{(m)}_n(f, x)$: gleichmäßige Konvergenz von $L^{(m)}_n(f, x)$ nach $f^{(m)}(x)$ liegt vor, falls

$$f^{([2m+\alpha+1/2])} \in \mathrm{Lip}\,(\alpha+1/2-[\alpha+1/2]), \quad m \geqq 1.$$

Zu untersuchen sind hier Summen der Form $\sum\limits_{\nu=0}^{n} |D^m l_\nu(x)| \left(\frac{\sqrt{1-x_\nu^2}}{n}\right)^\gamma$ bzw. im Falle der Hermitepolynome entsprechende Ausdrücke mit $h_\nu(x)$, $\mathfrak{H}_\nu(x)$ anstelle von $l_\nu(x)$. Um hierfür Abschätzungen erhalten zu können, benötigt man geeignete Darstellungen der $m$-ten Ableitungen der Lagrangeschen bzw. Hermiteschen Grundpolynome.

So ergibt sich z. B.

für $l_\nu(x) = \dfrac{\omega_n(x)}{(x-x_\nu)\omega'_n(x_\nu)}, \quad x \neq x_\nu; \quad l_\nu(x_\nu) = 1.$

$$\omega_n(x) = \prod_{\mu=0}^{n} (x-x_\mu)$$

mit kleinen Werten für $|x-x_\nu|$:

$$D^m l_\nu(x_\nu) = \frac{D^{m+1}\omega_n(x_\nu)}{(m+1)\,\omega'_n(x_\nu)},$$

$$D^m l_\nu(x) = \frac{1}{\omega'_n(x_\nu)}\,\delta^m D^{m+1}\omega_n(\bar{x}), \quad \bar{x} := x_\nu + \delta(x-x_\nu), \ |\delta| \leqq 1.$$

Im Falle der Hermitepolynome sind vor allem geeignete Darstellungen von $D^m((l_\nu(x))^2)$ bzw. $D^m((l_\nu(x))^2(x-x_\nu))$ zu suchen. Dann stimmt $(l_\nu(x))^2$ bis auf einen linearen Faktor mit $h_\nu(x)$ überein.

## LITERATUR


1. Б. М. Бадков. О приближении функций суммами Фурье-Якоби. *Доклады АН СССР* **167** (1966), 731—834.
2. В. М. Бадков. Оценки функций Лебега и остатка ряда Фурье-Якоби. *Сибирский матем. журиал,* **9** (1968), 1263—1283.

3. P. Erdös, P. Turán. On the Role of the Lebesgue Functions in the Theory of Lagrange Interpolation. *Acta Acad. Sci. Hungaricae*, **6** (1955), 47—65.
4. L. Neckermann, P. O. Runck. Über Approximationseigenschaften differenzierter Lagrangescher Interpolationspolynome mit Jacobischen Abszissen. *Numer. Math.*, **12** (1968), 159—169.
5. L. Neckermann, P. O. Runck. Über Approximationseigenschaften differenzierter Hermitescher Interpolationspolynome mit Jacobischen Abszissen. (Ersch. in *Num. Math.*).
6. P. O. Runck. Über Konvergenzfragen von Folgen linearer Operatoren in Banachräumen, Funktionalanalysis, Approximationstheorien. Numerische Mathematik. *ISNM*, **7**. Basel, 1967, 208—212.
7, G. Szegö. Orthogonal Polynomials. New York, 1959.
8. A. F. Timan. Theory of Approximation of Functions of a Real Variable. Oxford, 1963

*Math. Institut der Hochschule*
*A-4045 Linz-Auhof Österreich*

*Eingegangen am 20. September 1970*