Труды Международной Конференции по конструктивной теории функций Варна, 19—25 мая 1970

Proceedings of the International Conference on Constructive Function Theory, Varna, May 19—25, 1970

ÜBER DIE BESTE APPROXIMATION VON L_p-FUNKTIONEN DURCH SPLINES

K. Scherer*

Zusammenfassung. Die klassischen Sätze von Jackson und Bernstein über die beste Approximation von periodischen stetigen Funktionen durch trigonometrische Polynome sowie damit zusammenhängende Sätze von Zamansky und Stečkin [1] werden auf die beste Approximation von Lebesgue-integrierbaren Funktionen durch Splines übertragen.

Dadurch werden Ergebnisse von Birkhoff, de Boor, Nitsche u. a. erweitert.

Ziel dieser Arbeit ist die Übertragung der Ergebnisse von [11] über die beste Approximation von stetigen Funktionen durch Splines auf den Fall von Lebesgue-integrierbaren Funktionen. Im einzelnen bezeichne $L_p[a, b]$, $1 \leqq p \leqq \infty$, den Banachraum der auf $[a, b]$ meßbaren, zur p-ten Potenz Lebesgue-integrierbaren Funktionen f mit der Norm

$$\|f\|_p = \left\{ \int_a^b |f(x)|^p dx \right\}^{1/p}, \quad 1 \leqq p < \infty, \text{ und } \|f\|_\infty = \text{wes.} \sup_{a \leqq x \leqq b} |f(x)|.$$

Ferner sei für $r = 0, 1, 2, \ldots$

$$L_p^{(r)}[a, b] = \{f \in L_p[a, b] : f^{(k)} \text{ abs. stetig, } 0 \leqq k \leqq r-1,\ f^{(r)} \in L_p[a, b]\}.$$

mit der Norm $\|f\|_p^{(r)} = \|f\|_p + \|f^{(r)}\|_p$.

Zur Approximation verwenden wir für $0 < |t| \leqq (b-a)/2$ die Spline-Klasse

$$S_t^r = \{s \in L_\infty^{(r-1)}[a, b] : s(x) \in \Pi_{r-1},\ x \in (x_{i-1}, x_i);\ i = 1, \ldots, n\}.$$

Dabei bezeichne Π_r die Klasse der algebraischen Polynome höchstens r-ten Grades. Die Knoten x_i sind für $t > 0$ durch $x_i = a + it$ und für $t < 0$ durch $x_{n-i} = b + it$ mit $0 \leqq i \leqq n$ definiert, wobei in beiden Fällen $n = n(t)$ so gewählt ist, daß $t/2 \leqq b - x_{n-1} < 3t/2$ bzw. $t/2 \leqq x_1 - a < 3t/2$ gilt und $x_n = b$ bzw. $x_0 = a$ gesetzt werden kann. Dies bedeutet, daß wir eine Art von ins Kontinuierliche erweiterten äquidistanten Unterteilungen von $[a, b]$ betrachten, denn speziell für $|t| = (b-a)/n$ bilden die $\{x_i\}_0^n$ eine n-fach äquidistante Un-

* Die Untersuchungen wurden im Rahmen eines Stipendiums der Görres-Gesellschaft durchgeführt. Der Autor dankt außerdem Herrn Professor Dr. Butzer für seine Unterstützung.

terteilung von $[a, b]$. Setzt man noch $S_t^r = \Pi_{r-1}$ für $|t| > (b-a)/2$, so kann für alle $t \neq 0$ als beste Approximation von $f \in L_p[a, b]$ in der L_p-Norm gesetzt werden

$$E_t^r(f; L_p) = \inf_{s \in S_t^r} \| f - s \|_p.$$

Für das Weitere benötigen wir nun folgende Aussagen, wobei wir uns auf $1 \leqq p < \infty$ beschränken, da der Fall $p = \infty$ durch [11] $(0 < |t| < (b-a)/2)$ erfaßt ist.

$$S_{2t}^r \subset S_t^r, \tag{1}$$

$$\exists \overset{*}{s}_{r,t}(f; L_p) \in S_t^r : E_t^r(f; L_p) = \| f - \overset{*}{s}_{r,t}(f; L_p) \|_p, \tag{2}$$

$$\lim_{t \to 0} E_t^r(f; L_p) = 0, \tag{3}$$

$$E_t^r(f; L_p) \leqq C_k |t|^k \| f^{(k)} \|_p, \quad 0 < k \leqq r; \ f \in L_p^{(k)}[a, b], \tag{4}$$

$$\| s^{(k)} \|_p \leqq D_k |t|^{-k} \| s \|_p, \quad 0 < k \leqq r-1 ; \ s \in S_t^r. \tag{5}$$

Die Eigenschaft (1) folgt unmittelbar aus der Definition von S_t^r, während (2) durch die endliche Dimension von S_t^r gesichert ist.

Dagegen sind die Aussagen (3)—(5) noch zu verifizieren. Aussage (3), ein Analogon zum Weierstraß-Satz, beweisen wir — einer Anregung von L. L. Schumaker folgend — durch eine Modifikation der „variationsvermindernden Spline-Approximation“ von Schoenberg [12] in dem Sinne, wie die Kantorovitch-Polynome die Bernstein-Polynome auf $L_p[a, b]$, $1 \leqq p < \infty$, ersetzen (vergl. Lorentz [7]). Dazu seien zunächst einige Voraussetzungen und Eigenschaften dieser Approximationsmethode angegeben (vergl. Marsden [8]):

Für $r \geqq 2$ setzt man

$$x_{1-r} = \ldots = x_{-1} = a, \ x_{n+1} = \ldots = x_{n+r-1} = b,$$

$$\xi_j = (x_{j+1} + \ldots + x_{j+r-1})/(r-1), \ 1-r \leqq j \leqq n-1,$$

$$N_j(x) = M_j(x)\,(x_{j+r} - x_j)/r, \ 1-r \leqq j \leqq n-1,$$

wobei die $M_j(x)$ die B-Splines von Curry und Schoenberg [5] bezeichnen. Es gelten die Eigenschaften $(a \leqq x \leqq b)$:

$$\xi_{1-r} = a, \ \xi_{n-1} = b ; \ \xi_{j+1} - \xi_j = (x_{j+r} - x_{j+1})/(r-1); \tag{6}$$

$$N_j(x) \geqq 0 ; \ N_j(x) = 0, \ x \bar{\in} (x_j, x_{j+r}); \tag{7}$$

$$\sum_{j=1-r}^{n-1} N_j(x) = 1 ; \sum_{j=1-r}^{n-1} \xi_j N_j(x) = x; \tag{8}$$

$$\int_a^b |N_j(x)|^p dx \leqq (x_{j+r} - x_j), \quad 1 \leqq p < \infty. \tag{9}$$

Wir definieren als Analogon zu den Kantorovitch-Polynomen

$$K_t^r(f;x)=\sum_{j=1-r}^{n-2}\frac{N_j(x)}{\xi_{j+1}-\xi_j}\int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}}f(y)dy\in S_t^r.$$

Satz 1. Für $r\geqq 2$, $1\leqq p<\infty$ gilt

$$\lim_{t\to 0}\|K_t^r(f;x)-f(x)\|_p=0,\quad f\in L_p[a,b].$$

Beweis. Wir zeigen die gleichmäßige Beschränktheit der linearen Operatoren $K_t^r(f;x)$. Dazu schreiben wir

$$K_t^r(f;x)=\int_a^b\chi_t(x,y)f(y)dy,$$

wobei $\chi_t(x,y)$ für festes x nach (6) als Treppenfunktion

$$\chi_t(x,y)=\frac{N_j(x)}{\xi_{j+1}-\xi_j},\quad y\in[\xi_j,\xi_{j+1}],\ 1-r\leqq i\leqq n-2,$$

geschrieben werden kann. Es folgt nach Anwendung der Hölder-Ungleichung mit $1/p+1/q=1$:

$$\|K_t^r(f;x)\|_p\leqq\left\|\int_a^b[x_t(x,y)]^{(1/p+1/q)}|f(y)|dy\right\|_p$$

$$\leqq\left\|\left\{\int_a^b\chi_t(x,y)|f(y)|^p dy\right\}^{1/p}\left\{\int_a^b\chi_t(x,y)dy\right\}^{1/q}\right\|_p$$

$$\leqq\left[\sup_x\int_a^b\chi_t(x,y)dy\right]^{1/q}\left\{\int_a^b dx\int_a^b\chi_t(x,y)|f(y)|^p dy\right\}^{1/p}$$

$$\leqq\left[\sup_x\int_a^b\chi_t(x,y)dy\right]^{1/q}\left[\sup_y\int_a^b\chi_t(x,y)dx\right]^{1/p}\|f\|_p.$$

Da aber nach (7), (8)

$$\sup_x\int_a^b\chi_t(x,y)dy=\sup_x\sum_{j=1-r}^{n-2}\frac{N_j(x)}{\xi_{j+1}-\xi_j}\int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}}dy=\sup_x\sum_{j=1-r}^{n-2}N_j(x)\leqq 1$$

und nach (6), (9)

$$\sup_y\int_a^b\chi_t(x,y)dx=\sup_j\int_a^b\frac{N_j(x)}{\xi_{j+1}-\xi_j}dx\leqq\sup_j\frac{(r-1)(x_{j+r}-x_j)}{x_{j+r}-x_{j+1}}\leqq\frac{(r-1)3rt/2}{(r-1)t/2}$$

gilt, sind die $K_t^r(f;x)$ gleichmäßig bezüglich t beschränkte Operatoren von $L_p[a,b]$ in $L_p[a,b]$.

Ist $f(x)$ nun stetig auf $[a,b]$, so gilt wieder mit (7)—(9)

$$\| f(x)-K_t^r(f;x)\|_p \leq \| f(x)-\sum_{j=1-r}^{n-1} f(\xi_j)N_j(x)\|_p + \| f\|_\infty \| N_{n-1}(x)\|_p$$

$$+\| \sum_{j=1-r}^{n-2} \frac{N_j(x)}{\xi_{j+1}-\xi_j} \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} [f(\xi_j)-f(t)]dt \|_p$$

$$\leq (b-a)^{1/p} \| f(x)-\sum_{j=1-r}^{n-1} f(\xi_j)N_j(x)\|_\infty + \| f\|_\infty (3r|t|/2)^{1/p} + \omega(3r|t|/2; f),$$

wobei $\omega(|t|;f)=\sup\limits_{|h|\leq|t|} \sup\limits_{\substack{x,y\in[a,b]\\|x-y|\leq|h|}} |f(x)-f(y)|$.

Der erste Term der rechten Seite gibt gerade die Approximation durch die variationsvermindernde Methode von Schoenberg an, deren gleichmäßige Konvergenz gegen $f(x)$ für $t\to 0$ bzw. $n\to\infty$ bekannt ist [9]. Da für $t\to 0$ auch die anderen beiden Terme gegen Null streben, ist Satz 1 für stetige Funktionen bewiesen. Die gleichmäßige Beschränktheit der Operatoren $K_t^r(f;x)$ garantiert dann diese Behauptung, d. h. Aussage (3), für alle $f\in L_p[a,b]$.

Zum Beweis der Ungleichung (4) vom Jackson-Typ benutzen wir die Operatoren

$$T_t^r(f;x)=\begin{cases} f(x_j),\ x\in[x_j,x_{j+1}),\ 0\leq j\leq n-1,\ r=1\\ \sum\limits_{j=1-r}^{n-1} f(\xi_j)N_j(x),\quad r>1.\end{cases}$$

m letzteren Falle sind dies die schon erwähnten Schoenberg-Operatoren.

Satz 2. Es gilt für $f'\in L_p[a,b]$, $1\leq p<\infty$,

$$\| T_t^r(f;x)-f(x)\|_p \leq 3r^2|t|\,\| f'\|_p.$$

Beweis. Wir beginnen mit einem Ergebnis über die Approximation der Funktion $f(x)=x^2$ (vergl. [9), [8, p. 13]) für $r\geq 2$

$$0\leq T_t^r(u^2;x)-x^2\leq((r-1)/2)\,(3|t|/2)^2.$$

Hieraus folgt mit der Cauchy-Ungleichung und (8)

$$\sum_{j=1-r}^{n-1} N_j(x)|\xi_j-x| \leq \left\{\sum_{j=1-r}^{n-1} N_j(x)\right\}^{1/2} \left\{\sum_{j=1-r}^{n-1} N_j(x)(\xi_j-x)^2\right\}^{1/2}$$

$$=\{T_t^r(u^2;x)-x^2\}^{1/2}<3r|t|.$$

Daraus ergibt sich mit zweimaliger Anwendung der Hölder-Ungleichung und (8), (9)

$$\| T_t^r(f;x)-f(x)\|_p = \| \sum_{j=1-r}^{n-1} N_j(x) \int_x^{\xi_j} f'(u)du\|_p$$

$$\leq \Big\| \sum_{j=1-r}^{n-1} N_j(x) |\xi_j - x|^{1/q} \Big\{ \int_x^{\xi_j} |f'(u)|^p du \Big\}^{1/p} \Big\|_p$$

$$\leq \Big\| \Big\{ \sum_{j=1-r}^{n-1} N_j(x) |\xi_j - x| \Big\}^{1/q} \Big\{ \sum_{j=1-r}^{n-1} N_j(x) \int_x^{\xi_j} |f'(u)|^p du \Big\}^{1/p} \Big\|_p$$

$$\leq (3r|t|)^{1/q} \Big\{ \sum_{j=1-r}^{n-1} \int_a^b N_j(x) dx \int_{x_j}^{x_{j+r}} |f'(u)|^p du \Big\}^{1/p}$$

$$\leq (3r|t|)^{1/q} \Big\{ \sum_{j=1-r}^{n-1} \int_a^b N_j(x) dx \int_{x_j}^{x_{j+r}} |f'(u)|^p du \Big\}^{1/p}$$

$$\leq (3r|t|)^{1/q} \Big\{ \sum_{j=1-r}^{n-1} (x_{j+r} - x_j) \int_{x_j}^{x_{j+r}} |f'(u)|^p du \Big\}^{1/p}$$

$$\leq 3r|t| \Big\{ \sum_{j=1-r}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+r}} |f'(u)|^p du \Big\}^{1/p} \leq 3r|t| r^{1/p} \|f'\|_p.$$

Im Falle $r=1$ folgt

$$\| T_t^1(f;x) - f(x) \|_p = \Big\{ \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} dx \Big| \int_{x_j}^{x} f'(u) du \Big|^p \Big\}^{1/p}$$

$$\leq \Big\{ \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x}^{x_{j+1}} dx (x_{j+1} - x_j)^{p/q} \int_{x_j}^{x_{j+1}} |f'(u)|^p du \Big\}^{1/p}$$

$$\leq 3|t| \Big\{ \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} |f'(u)|^p du \Big\}^{1/p} = 3|t| \|f'\|_p.$$

Damit ist der Satz und Aussage (4) für $k=1$ bewiesen.

Für höhere k läßt sich Aussage (4) auf den Fall $k=1$ zurückführen. Ist nämlich $f \in L_p^{(k)}[a, b]$ mit $2 \leq k \leq r$, so definieren wir

$$s_{r,t}(f; x) = \int_a^x s^*_{r-1,t}(f'; u) du \in S_t^r,$$

wobei $s^*_{r-1,t}(f', u)$ das Element bester Approximation in S_t^{r-1} zu f' ist. Dann liefert (4) für $k=1$:

$$E_t^r(f; L_p) = E_t^r(f - s_{r,t}(f); L_p) \leq 3r^2 |t| \| f' - s^*_{r-1,t}(f') \|_p = 3r^2 |t| E_t^{r-1}(f'; L_p).$$

Dies iterativ angewandt ergibt für $k \leq r$

$$E_t^r(f; L_p) \leq (3|t|)^k r^2 \ldots (r-k+1)^2 E_t^{r-k}(f^{(k)}; L_p),$$

wobei formal $E_t^0(f; L_p) = \| f \|_p$ gesetzt ist. Hieraus folgt Aussage (4) mit der (nicht notwendig besten) Konstanten $C_k = 3^k r^2 \dots (r-k+1)^2$.

Der Vollständigkeit halber sei nun der Beweis der Ungleichung (5) vom Bernstein-Typ durchgeführt (vergl. Nitsche [10]).

Satz 3. Für alle $s \in S_t^r$ gilt für $0 < k \leq r-1$, $0 < |t| < (b-a)/2$

$$\| s^{(k)} \|_p \leq D_k |t|^{-k} \| s \|_p.$$

Beweis. Nach der Markoff-Ungleichung für Polynome $p_{r-1} \in \Pi_{r-1}$ gilt (vergl. [13, p. 236])

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} |s'(x)|^p dx \leq (x_{k+1} - x_k)(2r-2)^{2p}(x_{k+1} - x_k)^{-p} \sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} |s(x)|.$$

Mit einer anderen Ungleichung für Elemente von Π_{r-1} (siehe [13, p. 236]) läßt sich weiter abschätzen:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} |s'(x)|^p dx \leq (x_{k+1} - x_k)^{1-p}(2r-2)^{2p}(2p+2)(x_{k+1} - x_k)^{-1}$$

$$\times (2r-2)^2 \int_{x_k}^{x_{k+1}} |s(x)|^p dx \leq |t|^{-p} 2^p (2p+2)(2r-2)^{2p+2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |s(x)|^p dx.$$

Unter Berücksichtigung von $\| s' \|_p = \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |s'(x)|^p dx \right\}^{1/p}$ folgt daraus die Aussage des Satzes für $k=1$ mit $D_1 = 2(2p+2)^{1/p}(2r-2)^{2+2/p} = D_1(r, p)$. Für $k > 1$ folgt sie hieraus durch Induktion mit $D_k = \prod_{j=0}^{k-1} D_1(r-j, p)$.

Als nächstes formulieren wir die Aussagen (1)—(5) allgemeiner in Banachräumen (vergl. [11]). Gegeben seien zwei Banachräume X, Y mit $\mathsf{Y} \subset \mathsf{X}$ und eine Familie $\{\mathsf{P}_\tau\}_{0<\tau<\infty}$ von linearen Unterräumen von X mit den Eigenschaften (σ, C_σ, D_σ sind positive Konstanten)

$$(1') \qquad \mathsf{P}_{2\tau} \subset \mathsf{P}_\tau, \quad 0 < \tau < \infty,$$

$$\mathsf{P}_\tau = \mathsf{P}_{\tau_0}, \quad \tau \geq \tau_0 > 0,$$

$$(2') \qquad \exists\, p_\tau^*(f) \in \mathsf{P}_\tau : E_\tau(f) = \inf_{p_\tau \in \mathsf{P}_\tau} \| f - p_\tau \|_{\mathsf{X}} = \| f - p_\tau^*(f) \|_{\mathsf{X}}, \quad f \in \mathsf{X},$$

$$(3') \qquad \lim_{\tau \to 0+} E_\tau(f) = 0, \quad f \in \mathsf{X},$$

$$(4') \qquad E_\tau(f) \leq C_\sigma \tau^\sigma \| f \|_{\mathsf{Y}}, \quad f \in \mathsf{Y}, \ 0 < \tau < \infty,$$

$$(5') \qquad \mathsf{P}_\tau \subset \mathsf{Y}, \quad \| p_\tau \|_{\mathsf{Y}} \leq D_\sigma \tau^{-\sigma} \| p_\tau \|_{\mathsf{X}}, \quad p_\tau \in \mathsf{P}_\tau, \ 0 < \tau < \infty.$$

Man sieht leicht, daß die Aussagen (1)—(5) Spezialfälle der Aussagen (1′)—(5′) mit $\sigma = k$ sind, falls $\mathsf{X} = L_p(a, b)$, $\mathsf{Y} = L_p^{(k)}[a, b]$, $S_t^r = \mathsf{P}_t$ für $t > 0$ oder $S_t^r = P_{-t}$

für $t<0$ gesetzt wird. Es gilt nun der allgemeine Satz (s. Butzer-Scherer [3, 4], Scherer [11]):

Satz 4. Unter den Voraussetzungen (1')—(5') sind folgende Aussagen für jedes $f \in X$ und $\theta>0$, $\tau \to 0+$ äquivalent:

a) $$E_\tau(f)=O(\tau^\theta);$$

b) $$f \in Y,\ \|f-p_\tau^*(f)\|_Y=O(\tau^{\theta-\sigma}),\quad \sigma<\theta;$$

c) $$\|p_\tau^*(f)\|_Y=O(\tau^{\theta-\sigma}),\quad \sigma>\theta;$$

d) $$K(\tau^\sigma; f; X, Y)\equiv \inf_{g\in Y}(\|f-g\|_Y+\tau^\sigma\|g\|_Y)=0(\tau^\theta),\quad \sigma>\theta.$$

Bezüglich einer Diskussion dieses Satzes sei auf die oben genannten Arbeiten verwiesen. Seine Anwendung auf den vorliegenden Fall von Spline-Approximation ergibt den Hauptsatz dieser Arbeit:

Satz 5. Es seinen $f \in L_p[a, b]$ und k, r natürliche Zahlen. Dann sind äquivalent im Falle $0<\theta\leq r$, $t\to 0$:

a) $$E_t^r(f; L_p)=O(|t|)^\theta);$$

b) $$f^{(k)} \in L_p[a, b],\ \|f^{(k)}-s_{r,t}^{*(k)}(f)\|_p=O(|t|^{\theta-k}),\quad k<\theta;$$

c) $$\|s_{r,t}^{*(k)}(f)\|_p=O(|t|)^{\theta-k},\quad \theta<k\leq r-1;$$

d) $$\omega_k(|t|, f; L_p[a, b])=O(|t|^\theta),\quad \theta<k\leq r.$$

Hier ist $\omega_k(|t|, f; L_p[a, b])$ der k-te Stetigkeitsmodul von f in der L_p-Norm

$$\omega_k(|t|; f; L_p[a, b])=\sup_{|h|\leq|t|}\|\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}f(x+ih)\|_p,$$

wobei die L_p-Norm über die Menge aller $x\in[a, b]$ mit $x+kh\in[a, b]$ zu nehmen ist.

Bekannt zu sein scheinen bisher die Richtung d) $\to$ a) für $p\geq 2$ (Hedström-Varga [6]) und eine schwächere Version der Umkehrung a) $\to$ d) (Nitsche [10]). Zum Beweis ist zu sagen, daß wie in [11] aus dem allgemeinen Satz 4 zunächst die b), c), d) jeweils entsprechenden Aussagen

b') $$f\in L_p^{(k)}[a, b],\ |f-s_{r,t}^*(f)\|_p^{(k)}=O(|t|^{\theta-k}),\quad k<\theta\leq r;$$

c') $$\|s_{r,t}^*(f)\|_p^{(k)}=O(|t|^{\theta-k}),\quad \theta<k\leq r-1;$$

d') $$K(|t|^k, f; L_p[a, b], L_p^{(k)}[a, b])=O(|t|^\theta),\quad \theta<k\leq r-1,$$

folgen. Die Äquivalenzen b') $\longleftrightarrow$ b), c') $\longleftrightarrow$ c) folgen dann genau wie in [11] Dagegen bewiesen wir die verbleibende Äquivalenz d') $\longleftrightarrow$ d), für $0<k\leq r-1$ da sie bisher noch nicht bewiesen zu sein scheint. Dazu dienen zwe vorbereitende Lemmata.

Lemma 1. Für alle $k\geq 1$, $f\in L_p[a, b]$ und genügend kleines $\tau>0$ gilt (M_r positive Konstante unabhängig von f)

i) $$\omega_k(n\tau, f; L_p[a, b])\leq n^k\omega_k(\tau, f; L_p[a, b)],\quad n=1, 2, \dots,$$

ii) $$\omega_k(\tau, f; L_p[a, b])\leq M_r[\tau^k\|f\|_p+\tau^{-1}\omega_{k+1}(\tau, f; L_p]a, b]).$$

Die zweite Ungleichung stellt eine Übertragung der bekannten Ungleichung von Marchaud für stetige Funktionen auf den Fall von L_p-Funktionen dar. Der Beweis der beiden Aussagen i) und ii) verläuft genau wie in Timan [13, p. 103 ff.], vergl. auch Besov [1].

Lemma 2. Es sei $g \in L_p[a, b]$ und für $\tau > 0$, $r = 1, 2, \ldots$

$$\omega_r^{\pm}(\tau, g; L_p[a, b]) = \sup_{0<h<\tau} \left\| \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \binom{r}{i} g(x \pm ih) \right\|_p,$$

wobei $g(x) = 0$ für $x > b$ im Falle $+$ und $g(x) = 0$ für $x < a$ im Falle $-$ vorausgesetzt ist. Dann gilt

$$\omega_r^{\pm}(\tau, g; L_p[a, b]) \leq 2^r K(\tau^r, g; L_p[a, b], L_p^{(r)}[a, b]) \tag{10}$$

$$\leq (4r)^r \tau^r \| g \|_p + \omega_r^{\pm}(\tau, g; L_p[a, b]).$$

Der Beweis dieser Aussage verläuft genau wie bei Butzer-Berens [2, p. 192] (vgl. auch Butzer-Johnen [6a]). Nach einer Idee von H. Johnen können wir dann die Äquivalenz von d) $\leftrightarrow$ d′ zeigen:

Satz 6. Es gilt für $f \in L_p[a, b]$ und $r = 1, 2, \ldots$ und genügend kleines $\tau > 0$

$$\omega_r(\tau, f; L_p[a, b) \leq A_r K(\tau^r, f; L_p[a, b], L_p^{(r)}[a, b]) \leq B_r \{\tau^r \| f \|_p + \omega_r(\tau, f; L_p[a, b])\}$$

mit gewissen von f unabhängigen positiven Konstanten A_r, B_r.

Beweis. Wir wählen eine Zerlegung der Einheit $1 = z_1(x) + z_2(x)$, wobei $z_1(x)$, $z_2(x)$ nichtnegative, beliebig oft differenzierbare Funktionen mit Träger auf $[a, b-\delta]$ bzw. $[a+\delta, b]$ für festes $\delta > 0$ sind. Nach Lemma 2 mit $g(x) = f(x) \, . \, z_1(x)$ bzw. $g(x) = f(x) \, . \, z_2(x)$ gilt

$$K(\tau^r, f; L_p[a, b], L_p^{(r)}[a, b]) \leq \sum_{j=0}^{1} K(\tau^r, f \, . \, z_j; \; L_p[a, b], L_p^{(r)}[a, b])$$

$$\leq (2r)^r \left\{ \tau^r \sum_{j=0}^{1} \| f \, . \, z_j \|_p + \omega_r^{+}(\tau, f \, . \, z_1; L_p[a, b]) + \omega_r^{-}(\tau, f \, . \, z_2; L_p[a, b]) \right. .$$

Für $r\tau < \delta$ kann man weiter abschätzen

$$K(\tau^r, f; L_p[a, b], L_p^{(r)}[a, b]) \leq 2(2r)^r \{ \| f \|_p + \sum_{j=0}^{1} \omega_r(\tau, f \, . \, z_j; L_p[a, b])\}. \tag{11}$$

Nun gilt aber

$$\Delta_h^r(f \, . \, z_j)(x) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \binom{r}{i} (f \, . \, z_j)(x + ih) = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} [\Delta_h^{r-k} z_j)(x + kh) \Delta_h^k f(x)$$

und daher mit $\| \Delta_h^{r-k} z_j(\cdot + kh) \|_q \leq | h |^{r-k} C_{r, k, j, p}$

$$\omega_r(\tau, f \, . \, z_j; \; L_p[a, b]) \leq \sum_{k=0}^{r} C_{r, k, j, p} \omega_k(\tau, f; L_p[a, b]) \tau^{r-k}.$$

Nach der Marchaud-Ungleichung von Lemma 1 folgt nun

$$\omega_r(\tau, f\cdot z_j; L_p[a, b]) \leqq B_{r,j,p}[\tau^r \| f \|_p + \omega_r(\tau, f; L_p[a, b])].$$

Setzt man dies in (11) ein, so folgt die rechte Seite der zu beweisenden Ungleichung dieses Satzes. Die linke Seite folgt direkt aus (10) unter Beachtung von

$$\omega_r(\tau, f; L_p[a, b]) \leqq \omega_r^+(\tau, f\cdot z_1; L_p[a, b]) + \omega_r^-(\tau, f\cdot z_2; L_p[a, b]).$$

Es bleibt noch übrig, die Richtung a) $\longleftrightarrow$ d) im Fall $k=r$ zu zeigen. Dann nämlich versagt der allgemeine Satz 4, da die Bernstein-Ungleichung (5)' bzw. (5) nicht mehr gilt.

Satz 7. Es gilt für $f \in L_p[a, b[$, $t>0$

$$\omega_r(t, f; L_p[a, b]) \leqq 2\cdot(8r)^r \sup_{0<|u|\leqq t} E_u^r(f; L_p).$$

Beweis (vergl. Nitsche [10]). Zu gegebenem h mit genügend kleinem $|h|$ wählt man n so, daß $(b-a)/(2n+1)<r|h|\leqq(b-a)/(2n-1)$. Betrachtet man dann die Spline-Klassen $S^r_{t_n}$, $S^r_{-t_n}$ mit $t_n=2(b-a)/(2n-1)$, so gilt für die entsprechenden Knoten $x_i(t_n)=a+2i(b-a)/(2n-1)$ für $0\leqq i\leqq n-1$ und $x_i(-t_n)=a+(2i-1)(b-a)/(2n-1)$ für $1\leqq i\leqq n$. Nun zerlegt man $[a, b]$ in die Intervalle $\bigcup_{k=0}^{2n-2} I_k$ mit $I_k=[a+k(b-a)/2n-1), \ a+(k+1)\ (b-a)/(2n-1)]$. Dann folgt im Falle $h>0$ aus $x\in I_{2i}$, $0\leqq i\leqq n-1$, bzw. aus $x\in I_{2i-1}$, $1\leqq i\leqq n-1$, daß die Punkte $x, x+rh\in[a, b]$ in $[x_i(t_n), x_{i+1}(t_n)]$ bzw. in $[x_i(-t_n), x_{i+1}(-t_n)]$ liegen. Im Falle $h<0$ folgt aus $x\in I_{2i-1}$, bzw. aus $x\in I_{2i}$, daß x, $x+rh\in[a, b]$ in $x_i(-t_n), x_{i-1}(-t_n)]$ bzw. in $[x_{i-1}(t_n), x_i(t_n)]$ liegen. Es ergibt sich also jeweils $\Delta_r^h s^*_{r,t_n}(f; x)=0$ oder $\Delta_r^h s^*_{r,-t_n}(f; x)=0$ und damit

$$\int_{I_k} |\Delta_r^h f(x)|^p dx \leqq \int_{I_k} |\Delta_r^h[f(x)-s^*_{r,t_n}(f; x)]|^p dx + \int_{I_k} |\Delta_r^h[f(x)-s^*_{r,-t_n}(f; x)]|^p dx.$$

Durch Summation über k erhält man daraus mit $t_n<4r|h|$

$$\|\Delta_r^h f(x)\|_p \leqq \|\Delta_r^h[f(x)-s^*_{r,t_n}(f; x)]\|_p + \|\Delta_r^h[f(x)-s^*_{r,-t_n}(f; x)]\|_p$$

$$\leqq 2^r E^r_{t_n}(f; L_p) + 2^r E^r_{-t_n}(f; L_p) \leqq 2\cdot 2^r \sup_{0<|u|<4r|h|} E^r_u(f; L_p).$$

Daraus folgt die Aussage des Satzes durch Bildung des Supremums über $|h|\leqq|t|$ und anschließendes Ersetzen von t durch $t/(4r)$ nach Lemma 1, Aussage i).

Durch Satz 6 folgt unmittelbar die Richtung a) $\to$ d) in Satz 5. Ferner liefert er eine Saturationsaussage von folgendem Typ.

Korollar. Sei $f\in L_p[a, b]$. Gilt $E^r_t(f; L_p)=O(|t|^r)$, so muß $f\in\Pi_{r-1}$ sein.

LITERATUR

1. О. В. Бесов. Продолжение некоторых классов дифференцируемых функций за пределы области. *Труды Матем. ин-та АН СССР*, **77** (1965), 35—45.
2. P. L. Butzer, H. Berens. Semi-Groups of Operators and Approximation. Berlin, 1967.
3. P. L. Butzer, K. Scherer. On the fundamental approximation theorems of D. Jackson, S. N. Bernstein and theorems of M. Zamansky and S. B. Stečkin. *Aequ. Math.* **3**(1969), 170—185.

4. P. Butzer, K. Scherer. Über die Fundamentalsätze der klassischen Approximationstheorie in abstrakten Räumen. In : Abstract Spaces and Approximation. (Proceedings of the Oberwolfach Conference 1968). Basel. 1969, 113—125.
5. H. B. Curry, I. J. Schoenberg. On Polya frequency functions IV : The fundamental spline functions and their limits. *J. Analyse math.*, **17** (1966), 71—107.
6. G. W. Hedstrom, R. S. Varga. Application of Besov spaces to spline Approximation. (To appear).
7. P. L. Butzer, H. Johnen. Lipschitz spaces on compact manifolds. (To appear).
8. G. G. Lorentz. Bernstein Polynomial. Toronto, 1953.
9. M. J. Marsden. An identity for spline functions with applications to variation-diminishing spline approximation. *J. Approx. Theory*, **3** (1970), 7—49.
10. M. J. Marsden, I. J. Schoenberg. On variation diminishing spline approximation methods. *Mathematica*, **31** (1966), 61—82.
11. J. Nitsche. Umkehrsätze für Spline-Approximation. *Comp. Math.*, **21** (1970), 400—416.
12. K. Scherer. On the best approximation of continuous functions by splines. *SIAM.*, *J. Numer. Analys.*, **7** (1970), 418—423.
13. I. J. Schoenberg. On variation diminishing approximation methods, in : On Numerical Approximation (MRC Symposium), Univ. of Wisconsin Press. Madison, 1959, 249—274.
14. А. Ф. Тиман. Теория приближения функций действительного переменного. Москва, 1960.

Lehrstuhl A für Mathematik
Technische Hochschule Aachen
Aachen BRD

Eingegangen am 14. Juli 1970