Труды Международной Конференции по конструктивной теории функций Варна, 19—25 мая 1970

Proceedings of the International Conference on Constructive Function Theory, Varna, May 19—25, 1970

ÜBER GLEICHMÄSSIGE APPROXIMATION DURCH POSITIVE LINEARE OPERATOREN

R. Schnabl

Zusammenfassung. $B(X)$ bezeichne die Banachalgebra der beschränkten reellen Funktionen auf der nichtleeren Menge X, versehen mit der Supremumsnorm, A einen linearen Teilraum von $B(X)$ und $\{L_n : A \to B(X)\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von positiven linearen Operatoren.

Gilt für eine Probemenge $P \subset A$: $1 \in P$, $f \in P \Longrightarrow f^2 \in A$, $f \in P \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \| L_n(f^i) - f^i \| = 0$, für $i = 1, 2$, dann gilt für alle $g \in A$, die in der von P erzeugten abgeschlossenen Teilalgebra von $B(X)$ liegen, daß $\lim_{n\to\infty} \| L_n(g) - g \| = 0$ ist.

Analog wird ein Satz von Mamedov verallgemeinert und das Saturationsproblem der Folge $\{L_n\}$ untersucht.

Für eine Folge von positiven linearen Operatoren L_n, die $C[0,1]$ in $C[0,1$ abbilden, gilt nach H. Bohman [2] und P. P. Korovkin [8], daß

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} \| L_n(f) - f \| = 0$$

für alle $f \in C[0,1]$ gilt, wenn (*) für die Testfunktionen $f = 1, = x, = x^2$ zutrifft Dieser Satz wurde verallgemeinert, so von V. I. Volkov [17], G. G. Lorentz [10], G. Freud [5], M. Müller [12], D. Wulbert [4].

R. G. Mamedov [11] zeigte unter gewissen Voraussetzungen über die Folge L_n, daß für zweimal differenzierbare Funktionen ein analoger Satz zum Satz von E. W. Woronovskaja [18] für Bernsteinpolynome gilt. Dieses Resultat wurde von F. Schurer [16] für Funktionen von mehreren Veränderlichen verallgemeinert.

In der vorliegenden Arbeit wird eine Folge von positiven linearen Operatoren betrachtet, die eine Banachalgebra von beschränkten reellen Funktionen auf einer Menge X in eine Banachalgebra von beschränkten reellen Funktionen auf einer Menge Y abbilden. Im ersten Teil der Arbeit wird unter der Voraussetzung, daß für eine Familie von Testfunktionen und deren Quadrate (*) gilt, gezeigt, daß (*) für die von dieser Familie erzeugten abgeschlossenen Teilalgebra gilt. Im zweiten Teil wird analog dazu der oben zitierte Satz von Mamedov verallgemeinert. Im Teil drei wird das Saturationsproblem dieser Folge von Operatoren unter der zusätzlichen Voraussetzung untersucht, daß sie genügend viele endlichdimensionale invariante Teilräume besitzen. Die Arbeit beschließt eine Untersuchung der Folge der Operatoren

$$L_n(f)(x)=\frac{n^n}{\Gamma(n)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-n\left(\exp(t)-t\right)\right)f(x+t)\,dt,\ x\in R,\ n=1,2,\ldots$$

Bezeichnungen. Im folgenden bezeichne X, Y, nichtleere Mengen $B(X)$ die Banachalgebra der reellen beschränkten Funktionen auf X, versehen mit der Supremumsnorm, und 1_X die Funktion auf X, die konstant gleich 1 ist. Ist $\mathfrak{F}$ eine Teilmenge von $B(X)$, dann bezeichne $\mathfrak{A}(\mathfrak{F})$ die von $\mathfrak{F}$ erzeugte abgeschlossene Teilalgebra von $B(X)$, die die konstanten Funktionen enthält. Ist X mit einer Topologie versehen, dann bezeichne $C(X)$ die Teilalgebra von $B(X)$ der beschränkten stetigen Funktionen. Ein Operator wird als positiv bezeichnet, wenn er nicht negative Funktionen in nicht negative Funktionen abbildet.

1. Eine Verallgemeinerung des Satzes von Bohman-Korovkin.

Satz 1. Sei $\mathfrak{A}$ eine abgeschlossene Teilalgebra von $B(X)$, die die konstanten Funktionen enthält,

$$L_n:\mathfrak{A}\to B(Y),\ n=1,2,\ldots$$

eine Folge von positiven linearen Operatoren, die $\mathfrak{A}$ in $B(Y)$ abbilden, und $\mathfrak{F}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{A}$ mit $1_X\in\mathfrak{F}$. Weiter sei

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n(f^k)-f^k\|=0$$

für $k=1,2$ und alle $f\in\mathfrak{F}$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n(g)-g\|=0$$

für alle $g\in\mathfrak{A}(\mathfrak{F})$. Für den Beweis benötigen wir folgendes

Lemma. Sei $\mathfrak{F}$ eine Teilmenge von $B(X)$ und $1_X\in\mathfrak{F}$. Für eine Funktion $g\in B(X)$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) Zu jedem $\varepsilon>0$ existiert eine positive Zahl M und Funktionen f_1, $f_2,\ldots,f_k\in\mathfrak{F}$, sodaß

$$|g(x)-g(y)|\leq\varepsilon+M\sum_{i=1}^{k}(f_i(x)-f_i(y))^2 \text{ für alle } x,y\in X,$$

(2) $g\in\mathfrak{A}(\mathfrak{F})$,

(3) g ist gleichmäßig stetig bezüglich der schwächsten uniformen Struktur auf X, bezüglich der alle $f\in\mathfrak{F}$ gleichmäßig stetig sind.

Beweis des Lemmas. Sei $\mathfrak{Q}$ die Menge der Funktionen g aus $B(X)$ für die (1) gilt. Dann ist wegen

$$|f(x)-f(y)|\leq\varepsilon+\frac{2\|f\|}{\varepsilon^2}(f(x)-f(y))^2$$

$\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{Q}$. Mit g_1 und g_2 ist, wie man unmittelbar sieht, auch g_1+g_2 und g_1g_2 aus $\mathfrak{Q}$. Da $1_X\in\mathfrak{Q}$ ist, folgt, daß $\mathfrak{Q}$ eine Teilalgebra von $B(X)$ ist, die die konstanten Funktionen enthält. Wegen

$$|g(x)-g(y)|\leq|g_n(x)-g_n(y)|+2\|g-g_n\|$$

ist mit jeder gleichmäßig konvergenten Folge von Funktionen g_n aus $\mathfrak{Q}$ auch der Grenzwert g aus $\mathfrak{Q}$. Daher ist $\mathfrak{Q}$ abgeschlossen, also $\mathfrak{A}(\mathfrak{F})\subset\mathfrak{Q}$. Damit folgt (1) aus (2). Aus (1) folgt wegen

$$|g(x)-g(y)|\leqq\varepsilon+M\sum_{i=1}^{k}(f_i(x)-f_i(y))^2$$

$$\leqq\varepsilon+M\sum_{i=1}^{k}2\,\|f\|\,.\,|f_i(x)-f_i(y)|$$

unmittelbar (3). Es bleibt zu zeigen, daß aus (3) die Aussage (2) folgt. Die Menge der Funktionen, die gleichmäßig stetig sind bezüglich der schwächsten uniformen Struktur auf X, bezüglich der alle $f\in\mathfrak{F}$ gleichmäßig stetig sind, bilden eine abgeschlossene Teilalgebra von $B(X)$, die isometrisch und isomorph einer Algebra $C(K)$ von stetigen Funktionen auf einem kompakten Hausdorffraum K ist [6]. Bei diesem Isomorphismus wird $\mathfrak{F}$ auf eine Menge von Funktionen abgebildet, die die Punkte von K trennen. Nach dem Satz von Stone-Weierstraß [6] liegt die von diesen Funktionen erzeugte Algebra in $C(K)$ dicht. Daher liegt auch die von $\mathfrak{F}$ erzeugte Algebra dicht in der Algebra der gleichmäßig stetigen Funktionen bezüglich der schwächsten uniformen Struktur auf X, bezüglich der alle Funktionen aus $\mathfrak{F}$ gleichmäßig stetig sind. Daher ist diese Algebra mit $\mathfrak{A}(\mathfrak{F})$ identisch. Damit ist das Lemma bewiesen.

Beweis von Satz 1. Der dem Beweis zugrundeliegende Gedanke ist der gleiche wie im Beweis des Satzes von Bohman-Korovkin. Sei $g\in\mathfrak{A}(\mathfrak{F})$. Dann existiert nach obigen Lemma zu jedem $\varepsilon>0$ ein $M>0$ und $f_1, f_2, \ldots, f_k\in\mathfrak{F}$, sodaß

$$|g(x)-g(y)|\leqq\varepsilon+M\sum_{i=1}^{k}(f_i(x)-f_i(y))^2$$

für alle $x, y\in X$. Da der Operator L_n positiv und linear ist, gilt nun indem man ihn auf obige Ungleichung bei variablem x und festem y anwendet und danach $y=x$ setzt, daß

$$|L_n(g)-g|\leqq\varepsilon L_n(1_X)+M\sum_{i=1}^{k}(L_n(f_i^2)-2f_iL_n(f_i)+f_i^2L_n(1_X))$$

ist. Daraus folgt indem man zu den Normen übergeht und danach n gegen Unendlich streben läßt, daß

$$\limsup_{n\to\infty}\|L_n(g)-g\|\leqq\varepsilon.$$

Da $\varepsilon>0$ beliebig war, folgt

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n(g)-g\|=0.$$

Damit ist Satz 1 bewiesen.

Bemerkung. Durch spezielle Wahl von X, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{F}$ erhält man Spezialfälle von Satz 1. Einige dieser seien im folgenden angeführt:

a) Sei X ein kompakter Hausdorffraum, $\mathfrak{A}=C(X)$ und $\mathfrak{F}$ eine Familie von stetigen Funktionen auf X, die die Funktion 1_X enthält und die Punkte von

X trennt. Dann ist $\mathfrak{A}(\mathfrak{F})=C(X)$ nach dem Satz von Stone-Weierstraß [6]. Im Falle, daß man $\mathfrak{F}$ endlich wählen kann, erhält man einen Satz von G. Freud [5].

b) Sei $X=[0,1]$, $\mathfrak{A}=C[0,1]$ und $\mathfrak{F}=\{1,x\}$. Dann erhält man aus Satz 1 den anfangs zitierten Satz von Bohman-Korovkin [2], [8].

c) Sei $X=R$, $\mathfrak{A}=C(R)$ und $\mathfrak{F}=\{1_R\}\cup\{\cos\lambda x \mid \lambda\in R\}\cup\{\sin\lambda x \mid \lambda\in R\}$, dann ist $\mathfrak{A}(\ )$ die Banachalgebra der Bohr-fastperiodischen Funktionen.

d) Sei $X=R$, $\mathfrak{F}=C(R)$, f eine reelle beschränkte streng monotone Funktion auf R und $\mathfrak{F}=\{1_R, f\}$. Dann ist $\mathfrak{A}(\mathfrak{F})$ die Teilalgebra der Funktionen $g\in C(R)$ für die $\lim\limits_{n\to\infty} g(x)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} g(x)$ existieren.

Analog zu Satz 1 beweist man folgende lokale Aussage:

Satz 2. Sei $\mathfrak{A}$ eine abgeschlossene Teilalgebra von $B(X)$, die die konstanten Funktionen enthält,

$$L_n:\mathfrak{A}\to B(Y),\quad n=1,2,\ldots,$$

eine Folge von positiven linearen Operatoren, die $\mathfrak{A}$ in $B(Y)$ abbilden, $\mathfrak{F}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{A}$ mit $1_X\in\mathfrak{F}$, und $x_0\in X$. Weiter sei

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f^k)(x_0)=f^k(x_0)$$

für $k=1,2$ und alle $f\in\mathfrak{F}$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} L_n(g)(x_0)=g(x_0)$$

für alle g die stetig sind in x_0 bezüglich der schwächsten Topologie auf X bezüglich der alle $f\in\mathfrak{F}$ stetig sind und die in $\mathfrak{A}$ liegen.

Dieser Satz verallgemeinert die lokale Variante des Satzes von Bohman-Korovkin [2], [8], und enthält einen Satz von V. I. Volkov [17] für Funktionen von mehreren reellen Veränderlichen als Spezialfall.

2. Eine Verallgemeinerung des Satzes von Mamedov.

Satz 3. Sei $\mathfrak{A}$ eine abgeschlossene Teilalgebra von $B(X)$, die die konstanten Funktionen enthält,

$$L_n:\mathfrak{A}\to B(X),\quad n=1,2,\ldots,$$

eine Folge von positiven linearen Operatoren, die $\mathfrak{A}$ in $B(X)$ abbilden, $\mathfrak{F}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{A}$ mit $1_X\in\mathfrak{F}$ und $\{\varphi(n)\}_{n=1}^{\infty}$ eine monoton wachsende Folge reeller Zahlen, die mit n gegen Unendlich strebt. Weiter existiere für jedes Produkt fg mit $f,g\in\mathfrak{F}$ eine Funktion $B(fg)\in\mathfrak{A}$, sodaß

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi(n)(L_n(fg)-fg)-B(fg)\|=0$$

ist, und eine natürliche Zahl m, sodaß

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(n)(L_n(f(t)-f(x))^{2m+2})(x)=0$$

gleichmäßig in $x\in X$ für alle $f\in\mathfrak{F}$. Dabei wird der Operator L_n bei variablem t und festem x angewendet. Sei nun $f_1,f_2,\ldots,f_k\in\mathfrak{F}$, $K=\{(f_1(x),f_2(x),\ldots,f_k(x))\in R^k \mid x\in X\}$, $H(x_1,x_2,\ldots,x_k)$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion auf $\hat{K}$, der abgeschlossenen, konvexen Hülle von K, und $h(x)=H(f_1(x), f_2(x),\ldots,f_k(x))$, $x\in X$. Dann ist $h\in\mathfrak{A}$ und es existiert eine Funktion $B(h)\in\mathfrak{A}$, sodaß

$$(**)\qquad \lim_{n\to\infty} \|\varphi(n)(L_n(h)-h)-B(h)\|=0$$

ist. Dabei ist

$$B(h) = hB(1_X) + \sum_{i=1}^{k} H_i(B(f_1) - f_1 B(1_X))$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{k} H_{i,j}(B(f_i f_j) - f_i B(1_X) B(f_j) - f_j B(1_X) B(f_i) + f_i f_j B(1_X)),$$

$H_i(x) = \frac{\partial H}{\partial x_i}(f_1(x), \ldots, f_k(x))$ und $H_{i,j}(x) = \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j}(f_1(x), \ldots, f_k(x))$.

B e m e r k u n g. Die Klasse der Funktionen für die (**) gilt umfaßt die von $\mathfrak{F}$ erzeugte Algebra und liegt daher in $\mathfrak{A}(\mathfrak{F})$ dicht.

B e w e i s von Satz 3. Sei für $t \in [0, 1]$ und $(x_1, \ldots, x_k), (y_1, \ldots, y_k) \in \widehat{K}$,

$$G(t) = H(y_1 + t(x_1 - y_1), \ldots, y_k + t(x_k - y_k)).$$

Dann gilt

$$G(t) = G(0) + G'(0) + \frac{1}{2} G''(0) + r,$$

mit

$$r = \int_0^1 (1-t)(G''(t) - G''(0))\,dt.$$

Daraus folgt auf Grund der gleichmäßigen Stetigkeit von $H_{i,j}$ auf $\widehat{K}$, daß zu jedem $\varepsilon > 0$ ein M existiert, sodaß

$$|r| \leq \int_0^1 |G''(t) - G''(0)|\,dt$$

$$= \int_0^1 \Big|\sum_{i,j=1}^{k} (x_i - y_i)(x_j - y_j)(H_{i,j}(x_1 + t(x_1 - y_1), \ldots) - H_{i,j}(x_1, \ldots)\Big|\,dt$$

$$\leq \int_0^1 \sum_{i,j=1}^{k} (x_i - y_i)(x_j - y_j)(\varepsilon + Mt^2 \sum_{s=1}^{k} (x_s - y_s)^2)\,dt$$

$$\leq (\varepsilon k + k^2 M \delta^2) \sum_{i=1}^{k} (x_i - y_i)^2 + \frac{k^2 M}{\delta^{2m}} \sum_{i=1}^{k} (x_i - y_i)^{2m+2}.$$

Setzt man nun $x_i = f_i(x)$ und $y_i = f_i(y)$ so erhält man für $n \to \infty$, daß

$$\limsup_{n\to\infty} \| \varphi(n)(L_n(h) - h) - B(h) \|$$

$$\leq \limsup_{n\to\infty} \| \varphi(n) L_n(r(x, y))(y) \| \leq (\varepsilon k + k^2 M \delta^2) \sum_{i=1}^{k} B(f_i^2) - 2 f_i B(f_i) + f_i^2 B(1_X).$$

Da $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ beliebig sind, folgt (**). Damit ist Satz 3 bewiesen.

B e m e r k u n g. Satz 3 enthält den oben zitierten Satz von Mamedov sowie einen Satz von F. S c h u r e r [16] für Funktionen von mehreren reellen Veränderlichen als Spezialfall. Der Beweis von Satz 3 ist den Beweisen dieser Sätze nachempfunden.

Ein Beispiel zu Satz 3 ist durch die vom Verfasser eingeführten verallgemeinerten Bernsteinoperatoren gegeben [13], [14]. Ein weiteres Beispiel wird im letzten Teil dieser Arbeit gegeben.

B e i s p i e l. Sei S ein kompakter Hausdorffraum, der mindestens zwei Punkte enthält, und $K(S)$ der Raum der positiven linearen normierten Funktionale auf $C(S)$, versehen mit der schwach*-Topologie. $K(S)$ ist konvex und kompakt und kann nach dem Satz von Riesz-Markoff ([7], sec. 56) als Raum aller positiven normierten regulären Borelmaße auf S aufgefaßt werden. Wir benützen daher die Schreibweise:

$$\widehat{f}(\mu)=\mu(f)=\int_S f(x)\,d\mu(x),\ f\in C(S),\ \mu\in K(S).$$

Sei für $x\in S$

$$\mu_x=\begin{cases} C(S)\to R,\\ \mu_x(f)=f(x)\end{cases}$$

das in $x\in S$ konzentrierte Maß mit Gesamtmasse 1. Dann ist

$$\Phi_n:\begin{cases} S^n\to K(S)\\ \Phi_n(x_1,\ldots,x_n)=\frac{1}{n}(\mu_{x_1}+\cdots+\mu_{x_n})\end{cases}$$

eine stetige Abbildung. Mit Hilfe der Abbildung Φ_n ist nun durch

$$B_n(h)(\mu)=\int_S\ldots\int_S(h\circ\Phi_n)(x_1,\ldots,x_n)\,d\mu(x_1)\ldots d\mu(x_n),\ \mu\in K(S)$$

für $h\in C(K(S))$ das n-te verallgemeinerte Bernsteinpolynom von h definiert [13]. Der n-te verallgemeinerte Bernsteinoperator

$$B_n:\begin{cases} C(K(S))\to C(K(S)),\\ h\to B_n(h)\end{cases}$$

ist ein positiver linearer Operator, und es gilt für $f,g\in C(S)$

$$B_n(\widehat{f}\widehat{g})=\left(1-\frac{1}{n}\right)\widehat{f}\widehat{g}+\frac{1}{n}\widehat{fg}$$

und

$$B_n((\widehat{f}(\xi)-\widehat{f}(\mu))^4(\mu)=n^{-4}\int_S\ldots\int_S(f(x_1)+\cdots+f(x_n)-n\widehat{f}(\mu))^4d\mu(x_1)\ldots d\mu(x_n)$$

$$=\frac{3}{n^2}(\widehat{f^4}-2\widehat{f^2}\widehat{f}^2+\widehat{f^2}^2)+\frac{1}{n^3}(\widehat{f^4}-3\widehat{f^2}^2-4\widehat{f^3}\widehat{f}+12\widehat{f^2}\widehat{f}^2-6\widehat{f}^4)=(On^{-2})$$

für $n\to\infty$, glm. für $\mu\in K(S)$.

Damit sind die Voraussetzungen von Satz 3 für $X=K(S))$. $\mathfrak{A}=C(K(S))$, $\mathfrak{F}=\{\hat{f}\,|\,f\in C(S)\}$ und $L_n=B_n$ erfüllt. Dabei ist nach dem Satz von Stone-Weierstraß [6] $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})=C(K(S))$.

Satz 3 gibt für $h\in\mathfrak{A}$ eine hinreichende Bedingung, daß die Folge $\{\varphi(n)(L_n(h)-h)\}_{n=1}^{\infty}$ gleichmäßig auf X konvergiert. Der nun folgende Satz 4 gibt eine notwendige Bedingung für die gleichmäßige Konvergenz dieser Folge. Dabei kann in vielen Fällen Satz 3 herangezogen werden, um die Voraussetzung (3) von Satz 4 zu verifizieren.

3. Zum Saturationsproblem der Folge L_n.

Satz 4. Sei $\mathfrak{X}$ ein Banachraum und

$$L_n:\mathfrak{X}\to\mathfrak{X},\ n=1,2,\ldots$$

eine Folge von linearen Kontraktionen ($\|L_n\|\leq 1$). Es existiere eine Familie $\{\mathfrak{X}_i\,|\,i\in J\}$ von endlichdimensionalen linearen Teilräumen von mit folgenden Eigenschaften:

(1) $\bigcup\limits_{i\in J}\mathfrak{X}_i$ liegt in $\mathfrak{X}$ dicht,

(2) $L_n(\mathfrak{X}_i)\subseteq\mathfrak{X}_i$ für alle $i\in J$,

(3) es existiert eine monoton gegen ∞ strebende Folge von positiven Zahlen $\{\varphi(n)\}_{n=1}^{\infty}$, sodaß für alle $f\in\bigcup\limits_{i\in J}\mathfrak{X}_i$ die Folge $\{\varphi(n)(L_n(f)-f)\}_{n=1}^{\infty}$ im Sinne der Norm konvergiert.

Dann existiert eine stark-stetige Halbgruppe

$$\{W^t:\mathfrak{X}\to\mathfrak{X}\,|\,t\geq 0\}$$

von linearen Kontraktionen mit folgenden Eigenschaften:

(a) Ist $0\leq t<\infty$ und $\{s(n)\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge natürlicher Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{s(n)}{\varphi(n)}=t$, dann ist

$$s\text{-}\lim_{n\to\infty} L_n^{s(n)}=W^t$$

und

$$s\text{-}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{s(n)+1}\left(1+L_n+L_n^2+\cdots+L_n^{s(n)}\right)=\int_0^1 W^{tu}\,du,$$

(die Grenzwerte und das Integral sind im Sinne der starken Konvergenz gebildet).

(b) Ist A der infinitesimale Erzeuger der Halbgruppe W^t mit dem Definitionsbereich $D(A)$ und $f,g\in\mathfrak{X}$, dann folgt aus

$$\lim_{n\to\infty}\|\varphi(n)(L_n(f)-f)-g\|=0,$$

daß $f\in D(A)$ und $A(f)=g$, und aus

$$\lim_{n\to\infty}\|\varphi(n)(L_n(f)-f)\|\leq M,$$

folgt, daß

$$\|W^t(f)-f\|\leq Mt,\quad t\geq 0.$$

Beweis von Satz 4. Für den Beweis von Teil (a) betrachten wir zu erst für ein festes $i \in J$ die Einschränkung von L_n auf $\mathfrak{X}_i$. Für diese gilt wegen der endlichen Dimension von $\mathfrak{X}_i$ und (3): $L_n \mid \mathfrak{X}_i = \varphi(n)^{-1}(A_i + D_{n,i})$ mit $A_i(f) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(n)(L_n(f) - f)$, $f \in \mathfrak{X}_i$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \| D_{n,i} \| = 0$. Daraus folgt nach einem Satz des Verfassers ([14], Hilfssatz 1),

$$\lim_{n\to\infty} \| L_n^{s(n)} \mid \mathfrak{X}_i - \exp(tA_i) \| = 0$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{s(n)+1}(1 + L_n + \cdots + L_n^{s(n)}) \mid \mathfrak{X}_i - \int_0^1 \exp(tuA_i)\,du \right\| = 0.$$

Mit den Operatoren L_n sind auch die Operatoren $\exp(tA_i)$ und $\int_0^1 \exp(tuA_i)du$ lineare Kontraktionen. Da nach (1) $\bigcup\limits_{i \in J} \mathfrak{X}_i$ in $\mathfrak{X}$ dicht liegt existiert zu jedem $t \geqq 0$ genau ein linearer Kontraktionsoperator $W^t : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$, sodaß (a) gilt. Die Halbgruppeneigenschaft der Operatoren W^t ergiebt sich aus der der Operatoren $\exp(tA_i)$. Ist $f \in \mathfrak{X}_i$, dann strebt $W^t(f) = \exp(tA_i)(f)$ für $t \to 0+$ im Sinne der Normkonvergenz gegen f. Wegen (1) und $\| W^t \| \leqq 1$ folgt nun nach dem Satz von Banach-Steinhaus [1] die stark-Stetigkeit der Halbgruppe W^t. Damit ist Teil (a) gezeigt. Sei nun f und g aus $\mathfrak{X}$, $\| \varphi(n)(L_n(f) - f) - g \| = z_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$. Dann gilt wegen $\| L_n \| \leqq 1$

$$\| \varphi(n)(L_n^2(f) - L_n(f)) - L_n(g) \| \leqq z_n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\| \varphi(n)(L_n^s(f) - L_n^{s-1}(f)) - L_n^{s-1}(g) \| \leqq z_n.$$

Daraus folgt nun nach der Dreiecksungleichung

$$\| \varphi(n)(L_n(f) - f) - (1 + L_n + \cdots + L_n^{s-1})(g) \| \leqq s z_n.$$

Sei nun $t > 0$ und $\{s(n)\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge natürlicher Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{s(n)}{\varphi(n)} = t$ Wir dividieren beide Seiten der letzten Gleichung durch s, setzen $s = s(n)$ und erhalten für n gegen Unendlich

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{\varphi(n)}{s(n)}(L_n^{s(n)}(f) - f) - \frac{1}{s(n)}(1 + L_n + \cdots + L_n^{s(n)-1}(g) \right\| = 0.$$

Daraus folgt nun nach (a)

$$t^{-1}(W^t(f) - f) = \int_0^1 W^{tu}(g)du = t^{-1}\int_0^t W^u(g)\,du.$$

Für $t \to 0+$ folgt daraus (siehe [3]), daß $f \in D(A)$ und $A(f) = g$. Dami ist der erste Teil von (b) bewiesen. Der zweite Teil von (b) wird analog bewiesen.

Aus Satz 4 folgt unmittelbar:

Korollar zu Satz 4. Seien die Voraussetzungen von Satz 4 erfüllt und sei für ein $f \in \bigcup\limits_{i \in J} \mathfrak{X}_i$ $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(n)(L_n(f) - f) \neq 0$. Dann ist die Folge der Operatoren $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ saturiert im Sinne von J. Favard (siehe [3]) mit der Saturationsordnung $\{\varphi(n)^{-1}\}$. Die Saturationsklasse bzw. die triviale Klasse der Folge $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist in der Saturationsklasse bzw. in der trivialen Klasse der Halbgruppe $\{W^t \mid t \geqq 0\}$ enthalten.

Je ein Beispiel zu Satz 4 wurde in [14] und [15] gegeben. Weitere Beispiele sind durch Folgen trigonometrischer singulärer Integrale für die ein Satz von Voronowskaja-Typ gültig ist gegeben. Wir geben nun ein weiteres Beispiel für die Anwendung obiger Sätze.

4. Ein Beispiel. Im folgenden bezeichne $C[-\infty, +\infty]$ den Teilraum der Funktionen aus $C(R)$ die in $-\infty$ und $+\infty$ stetig sind, $\mathfrak{B}$ den Teilraum von $C(R)$ der Bohr-fastperiodischen Funktionen und L_n den Operator der durch

$$L_n(f)(x) = \frac{n^n}{\Gamma(n)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-n(\exp(t)-t) f(x+t)\, dt, x \in R, n = 1, 2, \ldots,$$

gegeben ist. Dann gilt:

Satz 5. (1) Für alle f aus der von $C[-\infty, +\infty]$ und $\mathfrak{B}$ erzeugten Banachteilalgebra von $B(R)$ gilt, daß $\lim_{n\to\infty} L_n(f) = f$ gleichmäßig auf R.

(2) Ist $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in R$, H eine zweimal stetig differenzierbare reelle Funktion auf $[-1, +1]^{2k} \times [0,1]$ und

$$f(x) = \mathrm{H}(\cos\lambda_1 x, \sin\lambda_1 x, \ldots, \cos\lambda_k x, \sin\lambda_k x, \exp(-\exp(x))), \quad x \in R.$$

Dann ist $\lim_{n\to\infty} n(L_n(f) - f) = \frac{1}{2}(-f' + f'')$ gleichmäßig auf R.

(3) $L_n \mid \mathfrak{B}$ erfüllt mit $\mathfrak{X} = \mathfrak{B}$, $J = R$, $\mathfrak{X}_\lambda = \{a\cos\lambda x + b\sin\lambda x \mid a, b \in R\}$ die Voraussetzungen von Satz 4.

(4) Ist f eine reelle stetige Funktion auf R und

$$|f(x)\exp(x)(-s_1\exp(x))\exp(s_2 x)| \leqq M,$$

für alle $x \in R$ und für geeignet gewählte positive Zahlen M, s_1, s_2, dann gilt $\lim_{n\to\infty} L_n(f) = f$ gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von R.

Beweis. Mit Hilfe der Eulerschen Gammafunktion [9] findet man leicht

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-m_1\exp(x))\exp(m_2 x)\, dx = m_1^{-m_2}\Gamma(m_2), \quad m_1, m_2 > 0,$$

und man beweist durch vollständige Induktion

$$\exp(x) - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \frac{x^2}{2n}\exp(x) + O(n^{-2}) \text{ glm. auf } R \text{ für } n \to \infty.$$

Daraus erhält man mit $f_m(x) = \exp(-m\exp(x))$, $m > 0$,

$$L_n(f_m)(x) = \left(1 + \frac{m\exp(x)}{n}\right)^{-n} = f_m(x) + \frac{1}{2n} m^2\exp(2x) f_m(x) + O(n^{-2}), \ n \to \infty.$$

Daraus folgt nun, daß für $\mathfrak{F} = \{1, \exp(-\exp(x))\}$ die Voraussetzungen von Satz 1 und Satz 3 erfüllt sind. Für $g_m(x) = \exp(imx)$, $x \in R$, $m \in R$, $(i^2 = -1)$, erhält man

$$L_n(g_m) = g_m c(n, m)$$

mit

$$c(n, m) = 1 + \frac{1}{2}(-im + m^2)n^{-1} + O(n^{-2}), \text{ für } n \to \infty.$$

Letzteres gewinnt man aus der Weierstraß'schen Etwicklung von $\frac{1}{\Gamma(z+1)}$ [9] oder aus einer lokalen Variante von Satz 3 mit $\mathfrak{F} = \{1, \exp(-\exp(x))\}$. Damit verifiziert man leicht, daß die Voraussetzungen von Satz 1 und Satz 3 mit

$$\mathfrak{F} = \{\exp(-\exp(x))\} \cup \{\cos(mx) \mid m \in R\} \cup \{\sin(mx) \mid m \in R\}$$

erfüllt sind. Daraus folgt nun (1), (2) und mit Satz 4 die Behauptung (3). Für den Beweis von (4) betrachten wir die modifizierten Operatoren

$$G_n(h)(x) = \exp(-s_1 \exp(x)) \exp s_2 x) L_n(f(t) \exp(+s_1 \exp(t) \exp(-s_2 t))(x)$$

und erhalten (4) indem wir Satz 1 auf diese Folge von Operatoren mit $\mathfrak{F} = \{1, \exp(-\exp(x))\}$ und $Y = [a, b]$, a, $b \in R$ anwenden.

LITERATUR

1. S. Banach. Theorie des Operations linéaires. New York, 1955.
2. H. Bohman. On approximation of continuous and of analytic functions, *Arkiv Mat.*, 2 (1952), 43—56.
3. P. L. Butzer, H. Berens. Semi Groups of Operators and Approximation. Berlin, 1968.
4. C. Franchetti. Disguaglianze e teoremi del tipo di Korovkin sugli operatori positivi in $C[0,1)$. *Boll. Unione mat. ital.*, **2** (1969), 642—647.
5. G. Freud. Über positive lineare Approximationsfolgen von stetigen reelen Funktionen auf kompakten Mengen. In: On approximation theory. (ISNM, vol. 5), Basel, 1964.
6. L. Gillman, M. Jerison. Rings of continuous functions. London, 1960.
7. P. R. Halmos. Measure Theory. London, 1950.
8. P. P. Korovkin. Linear operators and approximation theory. Delhi. 1960.
9. M. A. Lawrentjew, B. W. Schabat. Methoden der komplexen Funktionentheorie Berlin, 1967.
10. G. G. Lorentz. Approximation of Functions. New York, 1966.
11. P. Г. Мамедов. Асимптотическое значение приближения дифференцируемых функций линейными положительными операторами. *Доклады АН СССР*, **128** (1959), 471—474.
12. M. W. Müller. Die Folge der Gammaoperatoren. Dissertation, Stuttgart, 1967.
13. R. Schnabl. Eine Verallgemeinerung der Bernsteinpolynome. *Math. Ann.*, **179** (1968) 74—82.
14. R. Schnabl. Zum Saturationsproblem der verallgemeinerten Bernsteinoperatoren. Abstract spaces and approximation. (ISNM, vol. 10), Basel, 1969.
15. R. Schnabl. Zum globalen Saturationsproblem der Folge der Bernsteinoperatoren. *Acta scient. math.*, **31** (1970), 351—358.
16. F. Schurer. On the approximation of functions of many variables with linear positive operators. *Indagationes Math.*, **25** (1963), 313—327.
17. В. И. Волков. О сходимости последовательностей линейных положительных операторов в пространстве непрерывных функций двух переменных. *Доклады АН СССР*, **115** (1957), 17—19.
18. Е. В. Вороновская. Определение асимптотического вида приближения функций полиномами С. Н. Бернштейна. *Доклады АН СССР*, А (1932), № 4, 79—85.
19. D. E. Wulbert. Convergence of operators and Korovkin's theorem. J. *Approx. Theory*, **1** (1968), 381—390.

TH Wien Karlsplatz 13 A-1040
Wien Österreich

Eingegangen am 28. Mai 1970