

НЕРЕШЕННЫЕ ЗАДАЧИ ● UNSOLVED PROBLEMS

Олевский, А. Мною было показано (*Матем. сб.*, 72, № 2, 1968), что существует полная ортонормированная система равномерно ограниченных функций $\{\varphi_n\}$ такая, что ряд Фурье $\sum c_n \varphi_n$ некоторой функции, $f \in L^p (\forall p < 2)$ сходится почти всюду к функции $g \neq f$. Более того — фиксированный ряд Фурье при различных порядках членов может сходиться к любой измеримой функции. При этом построенная система $\{\varphi_n\}$ полна во всех пространствах $L^p (1 \leq p \leq \infty)$. В частности, для этой системы не существует регулярного метода суммирования, восстанавливающего функцию по ее ряду Фурье.

Мой аспирант Ю. С. Фридлянд показал, что такая система может быть построена из алгебраических полиномов.

Вопрос в том, чтобы охарактеризовать класс ортонормальных систем состоит, для которых такой эффект не может иметь места, т. е. для которых, если ряд Фурье $f \sim \sum c_n \varphi_n$ сходится почти всюду, то его сумма равна f .

Ciesielski, Z. Let the function φ be continuous and of bounded variation on $[a, b]$. Then the Banach indicatrix N_φ is integrable. Does the equality

$$N_\varphi(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty du \int_a^b \cos(u(\varphi(t)) - y) |d\varphi(t)|$$

hold almost everywhere in the interval $[\min \varphi, \max \varphi]$, (cf. *Coll. Math.* 15 (1966), 99—103).

Peetre, J. Consider the space L_p , $0 < p < 1$, let $f \in L_p$ and $E_n(f)_{L_p} = \inf_{p_n \in H_n} \|f - p_n\|_{L_p}$ be the best approximation with algebraic polynomials of degree at most n . Characterize the class of functions for which $E_n(f)_{L_p} = O(n^{-\alpha})$.

Peetre, J. It is known that $\text{Lip } \alpha$ is isomorphic to l_∞ , $\alpha < 1$. Is it true that $\text{Lip } \alpha$, $\alpha < 1$ is isometric to l_∞ ?

Turan, P. Let A be the class of functions $\varphi(t)$ strictly monotonically increasing in $[-\pi, \pi]$ with

$$\varphi(-\pi) = -\pi, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(\pi) = \pi$$

and analytical in an interval around $t=0$. To characterize the subclass A_1 of A with the property that $\varphi(t) \in A_1$ implies the existence of a periodical

and everywhere continuous $f(x)$ such that the Fourier series of $f(x)$ converges at $x=0$, but that of $f(\varphi(t))$ diverges for $t=0$. (That the class A_1 is not empty I noticed some years ago.)

Turan, P. Let Π_n stand for the class of polynomials $\pi_n(x)$ of degree n for which the inequality

$$|\pi_n(x)| \leq \sqrt{1-x^2}$$

holds in $[-1, 1]$ and $-1 \leq x_0 \leq 1$. To be determined is the exact maximum of $|\pi'_n(x_0)|$ for the class Π_n with all extremal polynomials.