КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'77
София . 1980, с. 9—15

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'77
Sofia . 1980, p. 9—15

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЯ

М.-Б. А. Бабаев

Резюме. Пусть F и G множества конечных вещественных функций, определенных на некотором множестве Q n-мерного Евклидова пространства E_n. Рассмотрим приближение функции $f\in F$ функциями из G $E_f=\inf\limits_{g\in G}\{\|f-g\|_{C(Q)}\}$. Функцию $g_0\in G$, для которой достигается нижняя грань, назовем наилучшей функцией для f.

Задача 1. Определить подкласс $G_0\subset G$, каждый элемент которого является наилучшей приближающей функцией в классе G для некоторой функции $f\in F$, и построить соответствующую приближаемую функцию f.

В настоящей заметке предложено решение задачи 1 в одном случае приближения функций многих переменных суммами функций меньшего числа переменных.

Известная проблема Т. Дж. Ривлина (1969) гласит: „Охарактеризовать n-наборы алгебраических полиномов $\{P_0, P,\dots, P_{n-1}\}$, для которых существует функция $f\in C[a, b]$, такая, что для нее P_i, $i=\overline{0, n-1}$, являются полиномами наилучшего приближения в смысле Чебышева." Нам кажется, что требование нахождения вышеназванной функции могло бы послужить дальнейшему развитию проблемы Т. Дж. Ривлина, а именно:

Задача 2. „Построить функцию $f\in C[a, b]$, для которой заданные алгебраические полиномы P_i, $i=\overline{0, n-1}$ являются полиномами наилучшего приближения в смысле Чебышева."

Разумеется, постановка этой задачи может быть развита аналогично различным обобщениям проблемы Т. Дж. Ривлина [2]. В пути к решению задачи 2 нам представляется полезным решение задачи 1.

1. Пусть $t=(t_1, t_2, t_3)$, где $t_i=(x_{k_{i-1}+1}, x_{k_{i-1}+2},\dots, x_{k_i})$, $i=1, 2, 3$; $0=k_0<k_1<k_2<k_3=n$ некоторое деление множества переменных $t=(x_1,\dots, x_n)$ на три группы. Рассмотрим параллелепипед $[a_1, b_1;\dots; a_n, b_n]$, который в дальнейшем нам удобно обозначать через $T_3=[c_1, d_1; c_2, d_2; c_3, d_3]$, где $c_i=(a_{k_{i-1}+1},\dots, a_{k_i})$, $d_i=(b_{k_{i-1}+1},\dots, b_{k_i})$, $i=1, 2, 3$. Точки $P_1=P_1(c_1, c_2, c_3)$, $P_2=P_2(c_1, c_2, d_3),\dots$, $P_8=P_8(d_1, d_2, d_3)$ будем называть „вершинами" параллелепипеда T_3. В дальнейшем будем пользоваться также следующими обозначениями:

$$
\begin{aligned}
&A(f;\ t_1)=A(t_1)=f(t_1, c_2, c_3)+f(t_1, c_2, d_3)+f(t_1, d_2, c_3)+f(t_1, d_2, d_3),\\
(1)\quad &B(f;\ t_2)=B(t_2)=f(c_1, t_2, c_3)+f(c_1, t_2, d_3)+f(d_1, t_2, c_3)+f(d_1, t_2, d_3),\\
&D(f;\ t_3)=D(t_3)=f(c_1, c_2, t_3)+f(c_1, d_2, t_3)+f(d_1, c_2, t_3)+f(d_1, d_2, t_3).
\end{aligned}
$$

Сначала приведем одно

Утверждение. Для того, чтобы функция многих переменных $\Phi(t)$ имела вид $\varphi+\psi+\varkappa=\varphi(t_1, t_2)+\psi(t_1, t_3)+\varkappa(t_2, t_3)$, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла функциональному уравнению

$$2\Phi(t)=\Phi(c_1, t_2, t_3)+\Phi(d_1, t_2, t_3)+\Phi(t_1, c_2, t_3)+\Phi(t_1, d_2, t_3)+\Phi(t_1, t_2, c_3)$$
$$+\Phi(t_1, t_2, d_3)-\frac{1}{2}[A(\Phi;\ t_1)+B(\Phi;\ t_2)+D(\Phi;\ t_3)]+\frac{1}{4}\Sigma_{j=1}^{8}\Phi(P_j). \tag{2}$$

Достаточность очевидна, необходимость проверяется непосредственной подстановкой функции $\varphi+\psi+\varkappa$ в уравнение (2).

Теорема 1. *Пусть* $\Sigma_{j=1}^{8}\Phi(P_j)\neq 0$. *Для того, чтобы имело место представление*

$$\Phi(t)=\alpha_1\varphi_2(t_2)\varphi_3(t_3)+\alpha_2\varphi_1(t_1)\varphi_3(t_3)+\alpha_3\varphi_1(t_1)\varphi_2(t_2)$$
$$-\alpha_1\alpha_2\varphi_3(t_3)-\alpha_1\alpha_3\varphi_2(t_2)-\alpha_2\alpha_3\varphi_1(t_1)+\alpha_1\alpha_2\alpha_3, \tag{3}$$

где

$$\alpha_i=\frac{1}{2}[\varphi_i(c_i)+\varphi_i(d_i)],\ i=1, 2, 3, \tag{4}$$

необходимо и достаточно, чтобы функция $\Phi(t)$ *удовлетворяла функциональному уравнению*

$$2\Phi(t)=\{\Sigma_{j=1}^{8}\Phi(P_j)\}^{-1}\cdot[A(t_1)B(t_2)+A(t_1)D(t_3)+B(t_2)D(t_3)$$
$$-\frac{1}{2}[A(t_1)+B(t_2)+D(t_3)]+\frac{1}{4}\Sigma_{j=1}^{8}\Phi(P_j). \tag{5}$$

Доказательство необходимости. Полагая в равенстве (3) сначала $t_1=c_1$, затем $t_1=d_1$ и слагая полученные соотношения в силу (4), будем иметь $2\alpha_1\varphi_2(t_2)\varphi_3(t_3)+2\alpha_1\alpha_2\varphi_3(t_3)+2\alpha_1\alpha_3\varphi_2(t_2)-2\alpha_1\alpha_2\varphi_3(t_3)-2\alpha_1\alpha_3\varphi_2(t_2)-2\alpha_1\alpha_2\alpha_3+2\alpha_1\alpha_2\alpha_3=\Phi(c_1, t_2, t_3)+\Phi(d_1, t_2, t_3)$. Проведя аналогичную операцию также для групп переменных t_2 и t_3, в результате получим систему соотношений

$$\left.\begin{aligned}2\alpha_1\varphi_2(t_2)\varphi_3(t_3)&=\Phi(c_1, t_2, t_3)+\Phi(d_1, t_2, t_3),\\ 2\alpha_2\varphi_1(t_1)\varphi_3(t_3)&=\Phi(t_1, c_2, t_3)+\Phi(t_1, d_2, t_3),\\ 2\alpha_3\varphi_1(t_1)\varphi_2(t_2)&=\Phi(t_1, t_2, c_3)+\Phi(t_1, t_2, d_3).\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Теперь вышепроведенные операции проведем над равенствами (6), что дает

$$\left.\begin{aligned}4\alpha_1\alpha_2\varphi_3(t_3)&=D(\Phi;\ t_3),\\ 4\alpha_1\alpha_3\varphi_2(t_2)&=B(\Phi;\ t_2),\\ 4\alpha_2\alpha_3\varphi_1(t_1)&=A(\Phi;\ t_1)\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

(выражения функций $A(t_1)$, $B(t_2)$ и $D(t_3)$ приведены в (1)). Из соотношений (2) в силу (4) получаем $8\,\alpha_1\alpha_2\alpha_3=A(c_1)+A(d_1)=B(c_2)+B(d_2)=D(c_3)+D(t_3)=\Sigma_{j=1}^{8}\Phi(P_j)$. Таким образом каждое из уравнений (8) в силу (5) приводит к равенству

$$8\,\alpha_1\alpha_2\alpha_3=\Sigma_{j=1}^{8}\Phi(P_j). \tag{8}$$

Далее, определяя функции $\varphi_1(t_1)$, $\varphi_2(t_2)$, $\varphi_3(t_3)$ из (8), подставим их выражения в равенство (3):

$$\Phi(t)=\alpha_1\cdot\frac{1}{4\alpha_1\alpha_3}B(t_2)\cdot\frac{1}{4\alpha_1\alpha_2}D(t_3)+\alpha_2\cdot\frac{1}{4\alpha_2\alpha_3}A(t_1)\cdot\frac{1}{4\alpha_1\alpha_2}D(t_3)$$

$$(9)\qquad +\alpha_3\cdot\frac{1}{4\alpha_2\alpha_3}A(t_1)\cdot\frac{1}{4\alpha_1\alpha_3}B(t_2)-\alpha_1\alpha_2\cdot\frac{1}{4\alpha_1\alpha_2}D(t_3)$$

$$-\alpha_1\alpha_3\cdot\frac{1}{4\alpha_1\alpha_3}B(t_2)-\alpha_2\alpha_3-\frac{1}{4\alpha_2\alpha_3}A(t_1)+\alpha_1\alpha_2\alpha_3.$$

Остается воспользоваться (8), чтобы равенство (9) превратилось в требуемое соотношение (5).

Достаточность. Положим

$$(10)\qquad \alpha_1\alpha_2\alpha_3=\frac{1}{8}\sum_{j=1}^{8}\Phi(P_j).$$

В силу условия теоремы $\alpha_i\neq 0$, $i=1, 2, 3$. Определим функции $\varphi_i(t_i)$ следующим образом:

$$(11)\qquad \varphi_1(t_1)=\frac{1}{4\alpha_2\alpha_3}A(t_1);\ \varphi_2(t_2)=\frac{1}{4\alpha_1\alpha_3}B(t_2),\ \varphi_3(t_3)=\frac{1}{4\alpha_1\alpha_2}D(t_3).$$

Учитывая (10), функциональное уравнение (5) можно записать в виде (9). Если теперь воспользоваться выражениями функций $\varphi_i(t_i)$ из (11), то получится представление (3). Остается показать, что коэффициенты α_i, $i=1, 2, 3$, в (3) удовлетворяют условию (4). Из (10) имеем $2\alpha_1=(1/4\alpha_2\alpha_3)\sum_{j=1}^{8}\Phi(P_j)=[A(c_1)+A(d_1)]/4\alpha_2\alpha_3=\varphi_1(c_1)+\varphi_1(d_1)$. Свойства (4) функций $\varphi_i(t_i)$ при $i=2, 3$ доказываются аналогично. Теорема 1 доказана.

Следствие. Произвольная функция вида

$$(12)\qquad \beta_1(t_1)\beta_2(t_2)+\beta_1(t_1)\beta_3(t_3)+\beta_2(t_2)\beta_3(t_3),$$

для которой

$$(13)\qquad \sum_{j=1}^{8}[\beta_1\beta_2+\beta_1\beta_3+\beta_2\beta_3](P_j)\neq 0$$

может быть представлена в виде (3) со свойством (4).

В самом деле, проведя несколько громоздкое вычисление, можно убедиться, что функция вида (12) удовлетворяет уравнению (5). Поскольку по условию имеет место (13), то утверждение следствия следует из теоремы 1.

Замечание 1. Как видно из доказательства теоремы 1 константы α_i, $i=1, 2, 3$, в разложении (3) функции $\Phi(t)$ могут быть выбраны произвольными, удовлетворяющими лишь (8).

Замечание 2. В дальнейшем, не умаляя общности, будем предполагать, что рассматриваемые в качестве наилучших приближающих суммы $\varphi_0+\psi_0+\varkappa_0=\varphi_0(t_1, t_2)+\psi_0(t_1, t_3)+\varkappa_0(t_2, t_3)$ удовлетворяют условию $\Sigma_{j=1}^{8}[\varphi_0+\psi_0+\varkappa_0](P_j)\neq 0$, т. к. в противном случае принимая, например, $\varphi_1(t_1, t_2)=\varphi_0(t_1, t_2)+k$, $k=\mathrm{const}\neq 0$, получим $\Sigma_{j=1}^{8}[\varphi_1+\psi_0+\varkappa_0](P_j)\neq 0$, построим соответствующую сумме $\varphi_0+\psi_0+\varkappa_0$ приближаемую функцию $f^*(t)$ (см. теоремы 3 и 4). Тогда, очевидно, приближаемой функцией $f(t)$, соответствующей сумме $\varphi_0+\psi_0+\varkappa_0$, будет $f=f^*+k$.

2. Рассмотрим приближение функции $f(t)$ в параллелепипеде T_3 суммами функций от двух групп переменных

$$E_f=\inf\{\sup\{|[f-\varphi-\psi-\varkappa](P)|:P\in T_3\}:\varphi+\psi+\varkappa\}$$
$$=\inf\{\|f-\varphi-\psi-\varkappa\|_c:\varphi+\psi+\varkappa\},$$

где нижняя грань распространена на всевозможные конечные суммы вида $\varphi+\psi+\varkappa=\varphi(t_1, t_2)+\psi(t_1, t_3)+\varkappa(t_2, t_3)$.

Функцию многих переменных назовем возрастающей (убывающей), если она возрастает (убывает) по каждой из своих аргументов. Функцию будем считать монотонной, если она является возрастающей или убывающей. Пусть одна из функций $f_i(t_i)$, $i=1, 2, 3$, возрастает, а две другие убывают. Через $\text{Ш}_{\bar{k}\,\overline{1,3}}(T_3)$ обозначим класс функций вида $f(t)=\prod_{i=1}^{3} f_i(t_i)$, а через $\text{Ш}^*_{\bar{k}\,\overline{1,3}}(T_3)$ класс функций f, для которых $-f\in \text{Ш}_{\bar{k}\,\overline{1,3}}(T_3)$. Рассмотрим функционал $L_3(f, T_3)=\Sigma_{j=1}^{8}(-1)^{\delta_j}f(P_j)$, где δ_j количество a_i, $i=1, 2, 3$, являющихся координатами „вершины" P_j.

Теорема 2 ([3]). *Для того, чтобы значение наилучшего приближения функции* $f\in \text{Ш}_{\bar{k}\,\overline{1,3}}(T_3)$, $(f\in \text{Ш}_{\bar{k}\,\overline{1,3}}(T_3))$ *вычислялось по формуле* $E_f=\frac{1}{8}L_3(f, T_3)$, $(E_f=-\frac{1}{8}L_3(f, T_3))$, *а наилучшей приближающей функцией вида* $\varphi+\psi+\varkappa$ *являлась функция*

$$f(t)-\prod_{i=1}^{3}[f_i(t_i)-f_i(\bar{t}_i)],$$

необходимо и достаточно, чтобы $t_i=\bar{t}_i$ *являлось решением уравнения* $f_i(t_i)=[f_i(c_i)+f_i(d_i)]/2$, $i=1, 2, 3$.

В дальнейшем нам понадобятся следующие обозначения:

$$\Sigma_{j=1}^{n}f(Q_j)=[f](Q_1+Q_2+\cdots+Q_n),$$
$$A(\Sigma^0, t_1)=A(\varphi_1^0\varphi_2^0+\varphi_1^0\varphi_3^0+\varphi_2^0\varphi_3^0, t_1), \tag{14}$$

где $A(f, t_1)$ — оператор, определенный в (3). Обозначения $B(\Sigma^0, t_2)$ и $D(\Sigma^0, t_3)$ вводятся аналогично.

Теорема 3. *Каждая непрерывная сумма* $\varphi_1^0\varphi_2^0+\varphi_1^0\varphi_3^0+\varphi_2^0\varphi_3^0$ *монотонных функций* $\varphi_i^0=\varphi_i^0(t_i)$, $i=1, 2, 3$, *является наилучшей приближающей функцией вида* $\varphi(t_1, t_2)+\psi(t_1, t_3)+\varkappa(t_2, t_3)$ *для некоторой функции* $f(t)$, *которая может быть определена через*

$$f(t)=\{\Sigma_{j=1}^{8}[\varphi_1^0\varphi_2^0+\varphi_1^0\varphi_3^0+\varphi_2^0\varphi_3^0](P_j)\}^{-2}.\ A(\Sigma^0, t_1)B(\Sigma^0, t_2)\ D(\Sigma^0, t_3).$$

Доказательство. В силу следствия теоремы 1 имеет место представление

$$[\varphi_1^0\varphi_2^0+\varphi_1^0\varphi_3^0+\varphi_2^0\varphi_3^0](t)=a_1\varphi_2^*(t_2)\varphi_3^*(t_3)+a_2\varphi_1^*(t_1)\varphi_3^*(t_3)+a_3\varphi_1^*(t_1)\varphi_2^*(t_2)$$
$$-a_1a_2\varphi_3^*(t_3)-a_1a_3\varphi_2^*(t_2)-a_2a_3\varphi_1^*(t_1)-a_1a_2a_3, \tag{15}$$

где

$$a_i=\frac{1}{2}[\varphi_i^*(c_i)+\varphi_i^*(d_i)],\ i=1, 2, 3. \tag{16}$$

Из доказательства теоремы 1 (см. (7)) следует, что функции $\varphi_i^*(t_i)$ должны быть определены следующим образом:

$$\varphi_1^*(t_1)=A(\Sigma^0, t_1)/4a_2a_3;\ \varphi_2^*(t_2)=B(\Sigma^0, t_2)/4a_1a_3;\ \varphi_3^*(t_3)=D(\Sigma^0, t_3)/4a_1a_2, \tag{17}$$

а константы a_i, $i=1, 2, 3$, удовлетворяют соотношению

$$8a_1a_2a_3=\Sigma_{j=1}^{8}[\varphi_1^0\varphi_2^0+\varphi_1^0\varphi_3^0+\varphi_2^0\varphi_3^0](P_j). \tag{18}$$

Из непрерывности суммы $[\varphi_1^0\varphi_2^0+\varphi_1^0\varphi_3^0+\varphi_2^0\varphi_3^0](t)$ в силу (16) следует непрерывность функций $\varphi_i^*(t_i)$, $i=1, 2, 3$, а это означает, что уравнения $\varphi_i^*(t_i)=[\varphi_i^*(c_i)+\varphi_i^*(d_i)]/2$ имеют решения $t_i=\bar{t}_i$, $i=1, 2, 3$. Но тогда в силу (16) получаем, что $\varphi_i^*(\bar{t}_i)=a_i$. Поэтому, используя теорему 2 и представление (15), наилучшую приближающую функцию вида $\varphi+\psi+\varkappa$ для функции $f(t)=\Pi_{i=1}^{3}\varphi_i^*(t_i)$ можно записать (пока формально) следующим образом:

$$\begin{aligned}\Pi_{i=1}^{3}\varphi_i^*(t_i)-\Pi_{i=1}^{3}[\varphi_i^*(t_i)-\varphi_i^*(\bar{t}_i)]&=a_1\varphi_2^*(t_2)\varphi_3^*(t_3)+a_2\varphi_1^*(t_1)\varphi_3^*(t_3)\\ &+a_3\varphi_1^*(t_1)\varphi_2^*(t_2)-a_1a_2\varphi_3^*(t_3)-a_1a_3\varphi_2^*(t_2)-a_2a_3\varphi_1^*(t_1)+a_1a_2a_3\\ &=[\varphi_1^0\varphi_2^0+\varphi_1^0\varphi_3^0+\varphi_2^0\varphi_3^0](t).\end{aligned} \tag{19}$$

Остается показать, что функция $\Pi_{i=1}^{3}\varphi_i^*(t_i)$ принадлежит одному из классов $\text{ПП}_{\bar{k}\,\overline{1,3}}(T_3)$ или $\text{ПП}^*_{\bar{k}\,\overline{1,3}}(T_3)$. Пусть функции $\varphi_i^0(t_i)$, $i=1, 2, 3$, возрастают, а константы $a_i>0$, $i=1, 2, 3$. Тогда, используя обозначение (14), из (17) получим

$$\begin{aligned}\varphi_1^*(t_1)&=\frac{1}{4a_2a_3}[\varphi_1^0(\varphi_2^0+\varphi_3^0)+\varphi_2^0\varphi_3^0]((t_1, c_2, c_3)\\ &+(t_1, d_2, c_3)+(t_1, c_2, d_3)+(t_1, d_2, d_3)),\end{aligned} \tag{20}$$

откуда следует, что: а) $\varphi_1^*(t_1)$ возрастает, если $[\varphi_2^0+\varphi_3^0]((c_2, c_3)+(c_2, d_3)+(d_2, c_3)+(d_2, d_3))\geqq 0$, б) $\varphi_1^*(t_1)$ убывает, если $[\varphi_2^0+\varphi_3^0]((c_2, c_3)+(c_2, d_3)+(d_2, c_3)+(d_2, d_3))<0$. Итак, функция $\varphi_1^*(t_1)$ монотонная. Рассуждая аналогично, получим, что функции $\varphi_2^*(t_2)$ и $\varphi_3^*(t_3)$ также являются монотонными. Тогда в силу определения произведение $\Pi_{i=1}^{3}\varphi_i^*(t_i)$ принадлежит одному из классов $\text{ПП}_{\bar{k}\,\overline{1,3}}(T_3)$ или $\text{ПП}^*_{\bar{k}\,\overline{1,3}}(T_3)$. Поэтому из (19) в силу теоремы 2 получаем, что сумма $[\varphi_1^0\varphi_2^0+\varphi_1^0\varphi_3^0+\varphi_2^0\varphi_3^0](t)$ является наилучшей приближающей функцией вида $\varphi+\psi+\varkappa$ для функции $f(t)=\Pi_{i=1}^{3}\varphi_i^*(t_i)$, которая в силу (17) и (18) может быть записана следующим образом:

$$f(t)=\{\Sigma_{j=1}^{8}[\varphi_1^0\varphi_2^0+\varphi_1^0\varphi_3^0+\varphi_2^0\varphi_3^0](P_j)\}^{-2}.A(\Sigma^0, t_1).B(\Sigma^0, t_2)D(\Sigma^0, t_3).$$

Итак, теорема 3 доказана в случае, когда функции φ_i^0, $i=1, 2, 3$, возрастают, а константы a_i, $i=1, 2, 3$, положительны.

Исследование остальных 63 случая различных комбинаций монотонности функций φ_i^0 и знаков констант a_i, $i=1, 2, 3$, проводится аналогично и каждый раз приводит к принадлежности функции $\Pi_{i=1}^{3}\varphi_i^*(t_i)$ одному из классов $\text{ПП}_{\bar{k}\,\overline{1,3}}(T_3)$ или $\text{ПП}^*_{\bar{k}\,\overline{1,3}}(T_3)$, после чего доказательство теоремы 3 завершается ссылкой на теорему 2. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Для того, чтобы монотонная функция*

$$\varphi_1^0\varphi_2^0+\varphi_1^0\varphi_3^0+\varphi_2^0\varphi_3^0 \quad (\varphi_i^0=\varphi_i^0(t_i),\ i=1, 2, 3) \tag{21}$$

была наилучшей приближающей функцией вида $\varphi+\psi+\varkappa=\varphi(t_1, t_2)+\psi(t_1, t_3)+\varkappa(t_2, t_3)$, *для функции* $f=\{\sum_{j=1}^{8}[\varphi_1^0\varphi_2^0+\varphi_1^0\varphi_3^0+\varphi_2^0\varphi_3^0](P_j)\}^{-2}A(\Sigma^0, t_1)B(\Sigma^0, t_2)D(\Sigma^0, t_3)$ *необходимо и достаточно, чтобы уравнения*

$$2\,\varphi_i^0(t_i)=\varphi_i^0(c_i)+\varphi_i^0(d_i),\ i=1,2,3 \tag{22}$$

имели решения.

Доказательство необходимости. В силу следствия теоремы 1 имеет место представление (15), где функции $\varphi_i^*(t_i)$, $i=1,2,3$, могут быть определены из (17), а константы α_i определяются из (16) и удовлетворяют соотношению (18). Далее, из монотонности суммы (22) следует монотонность каждой функции $\varphi_i^0(t_i)$, $i=1,2,3$. В самом деле, например, из равенства $[\varphi_1^0\varphi_2^0+\varphi_1^0\varphi_3^0+\varphi_2^0\varphi_3^0](t)=\varphi_1^0(t_1)[\varphi_2^0(t_2)+\varphi_3^0(t_3)]+\varphi_2^0(t_2)\varphi_3^0(t_3)$ видно, что монотонность суммы (21) влечет монотонность функции $\varphi_1^0(t_1)$ и т. д. Выше было показано, что из монотонности функций $\varphi_i^0(t_i)$, $i=1,2,3$, следует принадлежность произведения $\Pi_{i=1}^3\varphi_i^*(t_i)$ одному из классов $\text{ПП}_{\overline{k}\,\overline{1,3}}(T_3)$ или $\text{ПП}^*_{\overline{k}\,\overline{1,3}}(T_3)$. В силу (18) и (19) имеем $f(t)=\Pi_{i=1}^3\varphi_i^*(t_i)$. Введем обозначение $R(t)=f(t)-[\varphi_1^0\varphi_2^0+\varphi_1^0\varphi_3^0+\varphi_2^0\varphi_3^0](t)$ и вычислим значение наилучшего приближения функции $f(t)$:

$$E_f=\inf_{\varphi+\psi+\varkappa}\|[f-\varphi-\psi-\varkappa](t)\|_c=\|[f-\varphi_1^0\varphi_2^0-\varphi_1^0\varphi_3^0-\varphi_2^0\varphi_3^0](t)\|_c$$
$$=\sup_{t\in T_3}|R(t)|=\max\{\sup_{t\in T_3}R(t),\ -\inf_{t\in T_3}R(t)\}.$$

Далее, (15) позволяет написать $R(t)=\varphi_1^*\varphi_2^*\varphi_3^*-\alpha_1\varphi_2^*\varphi_3^*-\alpha_2\varphi_1^*\varphi_3^*-\alpha_3\varphi_1^*\varphi_2^*+\alpha_1\alpha_2\varphi_3^*+\alpha_1\alpha_3\varphi_2^*+\alpha_2\alpha_3\varphi_1^*-\alpha_1\alpha_2\alpha_3=\Pi_{i=1}^3[\varphi_i^*-c_i](t_i)$. Пусть $\Pi_{i=1}^3\varphi_i^*(t_i)\in\text{ПП}_{\overline{k}\,\overline{1,3}}(T_3)$. Тогда в силу определения класса $\text{ПП}_{\overline{k}\,\overline{1,3}}(T_3)$ одна из функций $\varphi_i^*(t_i)$, $i=1,2,3$, возрастает, а две другие убывают. Пусть для определенности функция $\varphi_1^*(t_1)$ возрастающая. Тогда в силу свойств (16) константы α_i, $i=1,2,3$, удовлетворяют неравенствам $\varphi_1^*(c_1)\leqq\alpha_1\leqq\varphi_1^*(d_1)$, $\varphi_2^*(d_2)\leqq\alpha_2\leqq\varphi_2^*(c_2)$ и $\varphi_3^*(d_3)\leqq\alpha_3\leqq\varphi_3^*(c_3)$. Поэтому

$$\sup\{R(t):t\in T_3\}=\sup\{\Pi_{i=1}^3[\varphi_i^*-\alpha_i](t_i):t\in T_3\}$$
$$=\max\{[\Pi_{i=1}^3(\varphi_i^*-\alpha_i)](d_1, c_2, c_3),\ [\Pi_{i=1}^3(\varphi_i^*-\alpha_i)](d_1, d_2, d_3), \tag{24}$$
$$[\Pi_{i=1}^3(\varphi_i^*-\alpha_i)](c_1, d_2, d_3),\ [\Pi_{i=1}^3(\varphi_i^*-\alpha_i)](c_1, c_2, c_3)\}.$$

Пользуясь (16), получаем: $[\Pi_{i=1}^3(\varphi_i^*-\alpha_i)](d_1, c_2, c_3)=[\varphi_1^*(d_1)-\alpha_1][\varphi_2^*(c_2)-\alpha_2][\varphi_3^*(c_3)-\alpha_3]=[\varphi_1^*(d_1)-\varphi_1^*(c_1)][\varphi_2^*(c_2)-\varphi_2^*(d_2)]\,[\varphi_3^*(c_3)-\varphi_3^*(d_3)]/8=L_3(f, T_3)/8$. Нетрудно подсчитать, что остальные выражения в фигурной скобке в правой части равенства (24) тоже равны $L_3(f, T_3)/8$. Тогда (24) позволяет написать:

$$\sup\{R(t):t\in T_3\}=\frac{1}{8}\,L_3(f, T_3). \tag{25}$$

Аналогичное рассуждение приводит к соотношению

$$\inf\{R(t):t\in T_3\}=-\frac{1}{8}\,L_3(f, T_3),$$

что с (25) в силу (23) приводит к равенству $E_f = L_3(f, T_3)/8$. Полагая $\Pi_{i=1}^{3} \varphi_i^*(t_i) \in \Pi\Pi_{\overline{k\,1,3}}^{*}(T_3)$ и проведя вычисления, аналогичные вышеприведенным, получим $E_f = -L_3(f_3, T_3)/8$. Таким образом все условия необходимости теоремы 2 выполнены, в силу которой получаем, что уравнения

$$\varphi_i^*(t_i) = [\varphi_i^*(c_i) + \varphi_i^*(d_i)]/2 \tag{26}$$

имеют решения $t_i = \overline{t}_i$, $i = 1, 2, 3$. Остается показать, что уравнения (26) и (22) соответственно эквивалентны. Подставляя выражение функции $\varphi_1^*(t_1)$ из (17) в (26) при $i=1$, получаем

$$\frac{1}{4\alpha_2\alpha_3}[\varphi_1^0(\varphi_2^0+\varphi_3^0)+\varphi_2^0\varphi_3^0]((t_1, c_2, c_3)+(t_1, d_2, c_3)+(t_1, c_2, d_3)+(t_1, d_2, d_3))$$

$$=\frac{1}{2}\{\frac{1}{4\alpha_2\alpha_3}[\varphi_1^0(\varphi_2^0+\varphi_3^0)+\varphi_2^0\varphi_3^0]((c_1, c_2, c_3)+(c_1, c_2, d_3)+(c_1, d_2, c_3)+(c_1, d_2, d_3))$$

$$+\frac{1}{4\alpha_2\alpha_3}[\varphi_1^0(\varphi_2^0+\varphi_3^0)+\varphi_2^0\varphi_3^0]((d_1, c_2, c_3)+(d_1, c_2, d_3)+(d_1, d_2, c_3)+(d_1, d_2, d_3))\},$$

откуда

$$[\varphi_1^0(\varphi_2^0+\varphi_3^0)]((t_1, c_2, c_3)+(t_1, d_2, c_3)+(t_1, c_2, d_3)+t_1, d_2, d_3))$$

$$=\Sigma_{j=1}^{8}[\varphi_1^0(\varphi_2^0+\varphi_3^0)](P_j)/2,$$

или

$$\varphi_1^0(t_1)\cdot[\varphi_2^0+\varphi_3^0]((c_2, c_3)+(d_2, c_3)+(c_2, d_3)+(d_2, d_3))$$

$$=[\varphi_1^0(c_1)+\varphi_1^0(d_1)]\cdot[\varphi_2^0+\varphi_3^0]((c_2, c_3)+(d_2, c_3)+(c_2, d_3)+(d_2, d_3))/2$$

и, наконец, после сокращений получаем первое уравнение из (23) $2\varphi_1^0(t_1) = \varphi_1^0(c_1)+\varphi_1^0(d_1)$. Аналогично можно убедиться в эквивалентности соответственно остальных двух уравнений из (26) и (22). Необходимость доказана.

Достаточность условий теоремы 4 являются некоторым усилением теоремы 3. Здесь вместо непрерывности суммы $[\varphi_1^0\varphi_2^0+\varphi_1^0\varphi_3^0+\varphi_2^0\varphi_3^0](t)$ (из которой, как было показано в доказательстве теоремы 3, следует существование решения уравнений (26)) требуется существование решения уравнений (22) (что, как было установлено выше, эквивалентно существованию решения уравнений (26)). Непрерывность суммы $[\varphi_1^0\varphi_2^0+\varphi_1^0\varphi_3^0+\varphi_2^0\varphi_3^0](t)$ в теореме 3 в других целях использовано не было, поэтому доказательство достаточности в теореме 4 нетрудно проследить из доказательства теоремы 3. Теорема 4 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. T. J. Rivlin. New and unsolved problems, No. 14: Best algebraic approximation' Abstract Spaces and Approximation, ISNM Vol. 10, P421, Basel 1969.
2. B. Brosowski, M. R. Subrahmanya. On the existence of functions with prescribed best approximations. *J. Approx. Theory*, 15 (1975), 143—155.
3. М.-Б. А. Бабаев. Прямые теоремы для приближения функций многих переменных суммами функций меньшего числа переменных. Специальные вопросы теории функций, т. 2. Баку, 1980, с. 3—40.

Математический институт АН АзССР
Баку

Получено 2. 6. 1977

СССР