КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'77
София. 1980, с. 17—24

CONSTRUKTIVE FUNCTION THEORY'77
Sofia .1980, p. 17—24

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА СУММ ФУРЬЕ ПО ОРТОГОНАЛЬНЫМ ПОЛИНОМАМ

В. М. Бадков

Резюме. В настоящем сообщении рассматривается вопрос о приближении в равномерной метрике непрерывных функций частными суммами их рядов Фурье по системе $\sigma^T(\varphi)$ тригонометрических полиномов, ортонормальной на $[-\pi, \pi]$ с 2π-периодическим весом φ, и по системе $\sigma(p)$ алгебраических многочленов, ортонормальной на $[-1, 1]$ с весом p. Предполагается, что функции $\varphi(\tau)$ и $p(t)\sqrt{1-t^2}$ непрерывны, обладают достаточной гладкостью на отрезках ортогональности и всюду положительны на этих отрезках, за исключением конечного числа особых точек, в которых эти функции стремятся к нулю со степенной скоростью.

Устанавливаются теоремы равносходимости рядов Фурье по системе $\sigma^T(\varphi)$ с обычными рядами Фурье и рядов Фурье по системе $\sigma(p)$ — с рядами Фурье по многочленам Чебышева 1-го рода. С помощью теорем равносходимости выводятся асимптотические формулы для функций Лебега и верхних граней уклонений сумм Фурье по различным классам непрерывных и дифференцируемых функций. Находятся порядки приближений указанных классов функций суммами Фурье по рассматриваемым системам.

1. Обозначения. В дальнейшем используются следующие обозначения:

$\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел;

$\mathbb{Z}_+$ — множество всех целых неотрицательных чисел;

H_n — множество всех алгебраических многочленов степени не выше n $(n \in \mathbb{Z}_+)$ с коэффициентами из $\mathbb{R}=(-\infty, \infty)$;

H_n^T — множество всех тригонометрических полиномов порядка не выше $n (n \in \mathbb{Z}_+)$ с коэффициентами из $\mathbb{R}$;

L — пространство всех суммируемых (по Лебегу) на $[-\pi, \pi]$ 2π-периодических функций;

L^∞ — пространство всех измеримых 2π-периодических функций F с конечной нормой $\|F\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}\{|F(\tau)| : \tau \in \mathbb{R}\}$;

$C_{2\pi}$ — пространство непрерывных 2π-периодических функций с нормой $\|F\|_{C_{2\pi}} = \|F\|_\infty$;

$L(a, b)$ — пространство всех суммируемых на $[a, b]$ функций;

$L^\infty(a, b)$ — пространство всех измеримых на $[a, b]$ функций f с конечной нормой $\|f\|_{L^\infty(a,b)} = \operatorname{ess\,sup}\{|f(t)| : t \in [a, b]\}$;

$\omega(F; \delta) = \max\{|F(\tau)-F(\theta)| : \tau, \theta \in \mathbb{R}, |\tau-\theta| \leqq \delta\}$ — модуль непрерывности функции $F \in C_{2\pi}$;

$\omega(f;\delta)_{[a,b]}=\max\{|f(x)-f(t)|: x, t\in[a,b], |x-t|\leq\delta\}$ — модуль непрерывности функции $f\in C[a,b]$ на отрезке $[a,b]$;

$\omega(\delta)$ — заданный модуль непрерывности, т. е. заданная на $[0,+\infty)$ непрерывная, неубывающая и полуаддитивная функция, в нуле равная нулю;

$H_\omega=\{F: F\in C_{2\pi},\ \omega(F;\delta)\leq\omega(\delta)$ для всех $\delta\geq 0\}$; для $r\geq 0$ полагаем $W^rH_\omega=\{F: F^{(r)}\in H_\omega\}$, где $F^{(r)}$ — производная в смысле Вейля функции $F\,(F^{(0)}=F)$;

$H_\omega[a,b]=\{f: f\in C[a,b],\ \omega(f;\delta)_{[a,b]}\leq\omega(\delta)$ для всех $\delta\geq 0\}$; если $r\in Z_+$, то $W^rH_\omega[a,b]=\{f: f^{(r)}\in H_\omega[a,b]\}$;

$$E_n(F)_{C_{2\pi}}=\inf\{\|F-Q_n\|_\infty: Q_n\in H_n^T\},$$
$$E_n(f)_{C[-1,1]}=\inf\{\|f-Q_n\|_{L^\infty(-1,1)}: Q_n\in H_n\}$$

— наилучшие приближения функций $F\in C_{2\pi}$ и $f\in C[-1,1]$ полиномами из H_n^T и H_n соответственно.

Пусть φ — 2π-периодический вес. Применим к системе

(1) $$1,\ \cos\tau,\ \sin\tau,\ \cos 2\tau,\ \sin 2\tau,\ldots$$

на отрезке $[-\pi,\pi]$ процесс ортогонализации Шмидта с весом φ и потребуем, чтобы полученная система $\sigma^T(\varphi)=\{\varphi_k\}_{k=0}^\infty$ была ортонормированной: $\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_k(\tau)\varphi_n(\tau)\varphi(\tau)d\tau=\delta_{kn}(k,n\in Z_+)$, и чтобы старшие коэффициенты полиномов $\varphi_k(k\in Z_+)$ были положительными. Этими требованиями система $\sigma^T(\varphi)$ определяется однозначно [1, с. 36]. При этом, очевидно, $\varphi_{2k}\in H_k^T$ $\varphi_{2k+1}\in H_{k+1}^T\,(k\in Z_+)$.

Если $F\varphi\in L$, то F имеет ряд Фурье по системе $\sigma^T(\varphi)$. Тогда

(2) $$S_{\varphi,n}(F)=S_{\varphi,n}(F;\theta)=\int_{-\pi}^{\pi}F(\tau)\sum_{k=0}^{n}\varphi_k(\theta)\varphi_k(\tau)\varphi(\tau)d\tau$$

— частная сумма порядка $(n\in Z_+)$ этого ряда. Для сумм Фурье по системе (1) будем употреблять стандартное обозначение $s_n(F)$; так что в обозначениях (2) имеем: $s_n(F;\theta)=s_{1,2n}(F;\theta)\,(n\in Z_+)$. Ряд свойств системы $\sigma^T(\varphi)$ (при $\varphi\not\equiv\mathrm{const}$) и рядов Фурье по ней впервые исследовал Д. Джексон [2].

Через $\sigma(p)=\{p_n\}_{n=0}^\infty$ обозначим систему алгебраических многочленов $p_n(t)=k_n^{(p)}t^n+\cdots$ с положительными старшими коэффициентами $k_n^{(p)}$, ортонормальную на $[-1,1]$ с весом p [1, с. 38]. Таким образом,

$$\int_{-1}^{1}p_k(t)\,p_n(t)\,p(t)dt=\delta_{kn}(k,n\in Z_+).$$

Если $fp\in L(-1,1)$, то f имеет ряд Фурье по системе $\sigma(p)$. Тогда

(3) $$s_n^{(p)}(f)=s_n^{(p)}(f;x)=\int_{-1}^{1}f(t)\sum_{k=0}^{n}p_k(x)\,p_k(t)\,p(t)dt$$

— n-я $(n\in Z_+)$ частичная сумма этого ряда.

Между рядами Фурье по системам $\sigma^T(\varphi)$ и $\sigma(p)$ имеет место следующая связь. Если задать вес $p(t)$ и функцию $f(t)$ такую, что $fp\in L(-1,1)$, и положить $\varphi(\tau)=p(\cos\tau)|\sin\tau|$, $F(\tau)=f(\cos\tau)$, то будут выполняться равенства

(4) $$s_n^{(p)}(f;\cos\theta)\equiv s_{\varphi,2n}(F;\theta)\equiv s_{\varphi,2n-1}(F;\theta)\,(n\in N).$$

В этом смысле теорию рядов Фурье по системе $\sigma^T(\varphi)$ можно считать обобщением теории рядов Фурье по системе $\sigma(p)$.

2. Постановки задач с обзором известных решений. Пусть заданы класс функций $\mathfrak{M}$ и полиномиальный метод приближения функций $u_n(f; x)$. Аппроксимативные свойства метода u_n на классе $\mathfrak{M}$ непрерывных функций в точке x принято характеризовать величиной

$$\mathfrak{E}_{u_n}(\mathfrak{M}; x) = \sup\{|f(x) - u_n(f; x)| : f \in \mathfrak{M}\}. \tag{5}$$

Нахождению порядков, асимптотических выражений и точных значений величины (5) для тех или иных классов $\mathfrak{M}$ и методов u_n посвящено весьма большое число работ. Здесь мы будем рассматривать лишь следующие частные случаи величины (5):

$$\mathfrak{E}^{r,\omega}_{\varphi, n}(\theta) = \sup\{|F(\theta) - s_{\varphi, 2n}(F; \theta)| : F \in W^r H_\omega\}, \tag{6}$$

$$\mathfrak{E}^{(p)}_{n, r, \omega}(x) = \sup\{|f(x) - s^{(p)}_n(f; x)| : f \in W^r H_\omega[-1, 1]\} \tag{7}$$

для весов φ и p, удовлетворяющих условиям:

$$\varphi(\tau) = h(\tau)|\sin[(\tau - \theta_1)/2]|^{\gamma_1} \ldots |\sin[(\tau - \theta_m)/2]|^{\gamma_m}, \tag{8}$$

$$\gamma_1 \geqq 0, \ldots, \gamma_m \geqq 0, \ -\pi < \theta_1 < \ldots < \theta_m \leqq \pi, \tag{9}$$

$$h \in C_{2\pi}, \ h(\tau) > 0 \ (\tau \in \mathbb{R}), \ \omega(h; \delta)\delta^{-1} \in L(0, \pi); \tag{10}$$

$$p(t) = H(t)(1-t)^\alpha (1+t)^\beta |t - x_1|^{\delta_1} \ldots |t - x_M|^{\delta_M}, \tag{11}$$

$$\alpha \geqq -1/2, \ \beta \geqq -1/2, \ \delta_1 \geqq 0, \ldots, \delta_M \geqq 0, \ -1 < x_1 < \cdots < x_M < 1, \tag{12}$$

$$H \in C[-1, 1], \ H(t) > 0 \ (|t| \leqq 1), \ \omega(H; \delta)_{[-1,1]}\delta^{-1} \in L(0, 1). \tag{13}$$

Нас будут интересовать задачи о порядках норм $\|\mathfrak{E}^{r,\omega}_{\varphi, n}(\cdot)\|_\infty$ и $\|\mathfrak{E}^{(p)}_{n,r,\omega}(\cdot)\|_{L^\infty(-1,1)}$, об асимптотическом поведении при $n \to \infty$ величин (6)—(7) и аналогичные задачи для функций Лебега

$$L_{\varphi, n}(\theta) = \sup\{\ s_{\varphi, 2n}(F; \theta)| : \|F\|_\infty \leqq 1\}, \tag{14}$$

$$L^{(p)}_n(x) = \sup\{|s^{(p)}_n(f; x)| : \|f\|_{L^\infty(-1,1)} \leqq 1\}. \tag{15}$$

Функции (14)—(15) входят в известные неравенства Лебега

$$|F(\theta) - s_{\varphi, 2n}(F; \theta)| \leqq [1 + L_n(\theta)]\, E_n(F)_{C_{2\pi}}, \tag{16}$$

$$|f(x) - s^{(p)}_n(f; x)| \leqq [1 + L^{(p)}_n(x)]\ E_n(f)_{C[-1,1]} \tag{17}$$

и тем самым играют важную роль при оценке скорости приближения непрерывных функций суммами Фурье по системам $\sigma^T(\varphi)$ и $\sigma(p)$.

Отметим ряд известных решений перечисленных задач.

В случае рядов Фурье по системе (1) (т. е. при $\varphi \equiv 1$) величины (6) и (14) не зависят от θ, и мы будем обозначать их в этом случае через $\mathfrak{E}^{r,\omega}_n$ и L_n, соответственно. Величина L_n — известная константа Лебега. Асимптотические свойства L_n и более общей величины $L_{n/2}$ достаточно подробно изучены в работах А. Лебега [3], Л. Фейера [4], Г. Гронуолла [5], Г. Сегё [6], Г. Ватсона [7], Г. Харди [8], С. Б. Стечкина [9]—10], П. В. Галкина [11] и других авторов.

Величина $\mathfrak{E}^{r,\omega}_n$ также достаточно подробно изучена. Оценки порядка $\mathfrak{E}^{r,\omega}_n$ (по n) для $\omega(t) = t^\mu$ $(0 < \mu \leqq 1)$, $r \in Z_+$ получили ещё А. Лебег [3] и С. Н. Бернштейн [12]. Первую асимптотически точную оценку величины $\mathfrak{E}^{r,\omega}_n$ получил А. Н. Колмогоров [13] (для случая $\omega(t) = t$, $r \in Z_+$).

Исследования в этом направлении продолжили С. М. Никольский [14]—[17], В. Т. Пинкевич [18], А. В. Ефимов [19]—[21], С. А. Теляковский [22] и другие авторы.

Асимптотическое поведение величин (7) и (15) наиболее полно изучено для рядов Фурье по многочленам Чебышёва 1-го рода ($p=(1-t^2)^{-1/2}$). В этом случае вместо (7) и (15) будем употреблять обозначения $\mathfrak{E}_{n,r,\omega}(x)$ и $L_n(x)$, соответственно. Первую асимптотическую формулу для $\mathfrak{E}_{n,r,\omega}(x)$ получил С. М. Никольский [23] (в случае $r=0$, $\omega(t)=t$). Исследования С. М. Никольского были продолжены рядом авторов [24]—[28]. Наиболее общие известные результаты относятся к случаю, когда $r\in\mathbb{Z}_+$, а $\omega(\delta)$ — выпуклый модуль непрерывности, удовлетворяющий условию

$$\Sigma_{\nu=1}^{n}\nu^{-1}\,\omega(\nu/n^2)=O(\omega(1/n)), \tag{18}$$

и принадлежат И. М. Ганзбургу [25] ($r=0$) и Б. В. Ковальчуку [28] ($r\in\mathbb{N}$). Асимптотическую формулу для $L_n(x)$ получил А. Ф. Тиман [29].

Величины (7) и (15) изучались также для рядов Фурье — Якоби (т. е. в случае веса $p=(1-t)^\alpha(1+t)^\beta$, $\alpha>-1$, $\beta>-1$) [30]—[44] и некоторых их обобщений [44]—[47].

3. Равносходимость с классическими разложениями рядов Фурье по ортогональным полиномам. Следующая теорема сводит изучение поведения величин (6) и (14) к изучению величин $\mathfrak{E}_n^{r,\omega}$ и L_n, соответственно.

Теорема 1. *Пусть вес φ удовлетворяет условиям (8)—(10). Тогда найдётся константа $C_1(\varphi)$ такая, что для всех $F\in L^\infty$, $\theta\in\mathbb{R}$ и $n\in\mathbb{N}$ выполняется неравенство*

$$|\,s_{\varphi,2n}(F;\theta)-s_n(F;\theta)\,|\leqq C_1(\varphi)\,\{\lambda_n(h)+d_n(\theta)\}\,\|F\|_\infty, \tag{19}$$

где

$$\lambda_n(h)=\int_0^{1/n}\frac{\omega(h;\,\tau)}{\tau}\,d\tau\ln n+\int_{1/n}^{1}\frac{\omega(h;\,\tau)}{\tau}\ln\frac{2}{\tau}\,d\tau, \tag{20}$$

$$d_n(\theta)=(\,|\sin[(\theta-\theta_1)/2]\,|+n^{-1})^{-\gamma_1/2}\ldots(\,|\sin[(\theta-\theta_m)/2]|+n^{-1})^{-\gamma_m/2}. \tag{21}$$

Для $F\in C_{2\pi}$ вместо $\|F\|_\infty$ в (19) можно написать $E_n(F)_{C_{2\pi}}$.

В силу соотношений (4) простым следствием теоремы 1 является

Теорема 2. *Пусть вес p удовлетворяет условиям (11)—(13). Тогда найдётся константа $C_2(p)$ такая, что для всех $f\in L^\infty(-1,1)$, $x\in[-1,1]$ и $n\in\mathbb{N}$ выполняется неравенство*

$$|\,s_n^{(p)}(f;x)-s_n^{-1/2,-1/2}(f;x)\,|\leqq C_2(p)\,\{\Lambda_n(H)+D_n(x)\}\,\|f\|_{L^\infty(-1,1)}, \tag{22}$$

где $s_n^{-1/2,-1/2}(f;x)$ — n-я сумма Фурье по системе $\{\cos n\arccos x\}_{n=0}^\infty$,

$$\Lambda_n(H)=\int_0^{1/n}\frac{\omega(H;\,t)_{[-1,1]}}{t}\,dt\ln n+\int_{1/n}^{1}\frac{\omega(H;\,t)_{[-1,1]}}{t}\ln\frac{2}{t}\,dt, \tag{23}$$

$$D_n(x)=(\sqrt{1-x}+1/n)^{-\alpha-1/2}(\sqrt{1+x}+1/n)^{-\beta-1/2}\,\Pi_{v=1}^{M}(\,|\,x-x_v\,|+1/n)^{-\delta_v/2}. \tag{24}$$

Для $f\in C[-1,1]$ вместо $\|f\|_{L^\infty(-1,1)}$ в (22) можно написать $E_n(f)_{C[-1,1]}$.

Теоремы 1 и 2 можно трактовать как теоремы равносходимости с классическими разложениями рядов Фурье непрерывных функций по системам $\sigma^T(\varphi)$ и $\sigma(p)$ для значений аргументов, не совпадающих с нулями функций $\varphi(\tau)$ и $p(t)\sqrt{1-t^2}$, соответственно.

Оценки левой части (22) для функций класса $L^\infty(-1,1)$ и класса $W^rH_\omega[-1,1]$ при $\omega(t)=t^\mu$, $0<\mu\leqq 1$, $r\in Z_+$ впервые получил Б. М. Яхнин [33]—[35] в случае веса

$$p(t)=(1-t)^\alpha(1+t)^\beta \tag{25}$$

при $|\alpha|=|\beta|=1/2$. Дальнейшие результаты для веса (25) при α и $\beta>-1$ были получены в [41], [44] и независимо в [43]. В [41], [44], [46] рассматриваются также веса, отличные от (25). В [33]—[35], [41] и [43] нет оценок левой части (22) через наилучшее приближение $E_n(f)_{C[-1,1]}$.

4. Оценки функций Лебега и верхних граней уклонений сумм Фурье по ортогональным полиномам. Существенную роль в наших построениях играют величины L_n, $\mathfrak{E}_n^{r,\omega}$, $L_n(x)$ и $\mathfrak{E}_{n,r,\omega}(x)$. Из соотношений (14) и (19) легко выводится

Теорема 3. *Пусть вес φ удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда равномерно по $\theta\in R$ имеет место соотношение*

$$L_{\varphi,n}(\theta)=L_n+O([\lambda_n(h)+d_n(\theta)])\ (n\to\infty), \tag{26}$$

где $\lambda_n(h)$ и $d_n(\theta)$ определены равенствами (20)—(21).

Следствием теоремы 1 и неравенства Джексона является

Теорема 4. *Пусть даны число $r\geqq 0$ (не обязательно целое), модуль непрерывности $\omega(\delta)$ и вес φ, удовлетворяющий условиям* (8)—(10). *Тогда равномерно по $\theta\in R$*

$$\mathfrak{E}_{\varphi,n}^{r,\omega}(\theta)=\mathfrak{E}_n^{r,\omega}+O(n^{-r}\omega(n^{-1}))[\lambda_n(h)+d_n(\theta)]\ (n\to\infty), \tag{27}$$

где $\lambda_n(h)$ и $d_n(\theta)$ определены равенствами (20)—(21).

Из теоремы 2 с очевидностью следует

Теорема 5. *Пусть вес p удовлетворяет условиям* (11)—(13). *Тогда равномерно по $x\in[-1,1]$*

$$L_n^{(p)}(x)=L_n(x)+O([\Lambda_n(H)+D_n(x)])\ (n\to\infty), \tag{28}$$

где $\Lambda_n(H)$ и $D_n(x)$ определяются равенствами (23)—(24).

Наконец, из теоремы 2 и неравенства Джексона следует

Теорема 6. *Пусть даны число $r\in Z_+$, модуль непрерывности $\omega(\delta)$ и вес p, удовлетворяющий условиям* (11)—(13). *Тогда равномерно по $x\in[-1,1]$*

$$\mathfrak{E}_{n,r,\omega}^{(p)}(x)=\mathfrak{E}_{n,r,\omega}(x)+O(n^{-r}\omega(n^{-1})[\Lambda_n(H)+D_n(x)])\ (n\to\infty). \tag{20}$$

Заметим, что (26) и (27) являются асимптотическими формулами (при $n\to\infty$) с главными членами L_n и $\mathfrak{E}_n^{r,\omega}$, соответственно, равномерными по θ на всяком отрезке $[a,b]$, не содержащем нулей веса φ. Соотношения (28) и (29) — асимптотические формулы (при $n\to\infty$) с главными членами $L_n(x)$ и $\mathfrak{E}_{n,r,\omega}(x)$, соответственно, равномерные по x на всяком отрезке $[a,b]\subset(-1,1)$, не содержащем нулей веса p. Путём построения специальных примеров функций нам удалось доказать, что и в нулях функций $\varphi(\tau)$ и $p(t)\sqrt{1-t^2}$ оценки (26)—(29) неулучшаемы по порядку, хотя и не являются асимптотически точными (в случае оценки (27) мы ограничились лишь целыми значениями r).

Это позволило доказать справедливость следующих теорем.

Теорема 7. *Пусть вес* φ *удовлетворяет условиям* (8)—(10). *Тогда при* $n \to \infty$ *норма* $\| L_{\varphi,n}(\cdot) \|_\infty$ *по порядку совпадает с наибольшей из величин* $\ln n$, $n^{\gamma_1/2}, \ldots, n^{\gamma_m/2}$; *при фиксированном* $r \in Z_+$ *и* $n \to \infty$ *норма* $\| \mathfrak{S}^{r,\omega}_{\varphi,n}(\cdot) \|_\infty$ *по порядку совпадает с наибольшей из величин*

$$n^{-r}\omega(n^{-1}) \ln n, \; n^{\gamma_v/2-r}\, \omega(n^{-1}) \; (v=1, \ldots, m).$$

Теорема 8. *В условиях теоремы 5 норма* $\| L^{(p)}_n(\cdot) \|_{L^\infty(-1,1)}$ *при* $n \to \infty$ *по порядку совпадает с наибольшей из величин* $\ln n$, $n^{\alpha+1/2}$, $n^{\beta+1/2}$, $n^{\delta_v/2}$ $(v=1, \ldots, M)$. *В условиях теоремы 6 норма* $\| \mathfrak{S}^{(p)}_{n,r,\omega}(\cdot) \|_{L^\infty(-1,1)}$ *при* $n \to \infty$ *по порядку совпадает с наибольшей из величин* $n^{-r}\omega(n^{-1}) \ln n$, $n^{\alpha+1/2-r}\,\omega(n^{-1})$, $n^{(\beta+1/2-r)}\,\omega(n^{-1})$, $n^{\delta_v/2-r}\,\omega(n^{-1}) (v=1, \ldots, M)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Сегё. Ортогональные многочлены. Москва, 1962.
2. D. Jackson. Orthogonal trigonometric sums. *Ann. Math.*, **34**, 1933, 799–814.
3. H. Lebesgue. Sur la representation rigonometrique approchee des fonctions satisfaisant a une condition de Lipshitz. *Bull. Soc. Math. France*, 38, 1910, 184—210.
4. L. Fejer. Lebesguesche Konstanten und divergente Fourierreihen. *J. reine und angew. Math.*, **138**, 1910, 22—53.
5. G. H. Gronwall. Über die Lebesgueschen Konstanten bei den Fourierschen Reihen. *Math. Ann.*, **72**, 1912, 244—261.
6. G. Szegö. Über die Lebesgueschen Konstanten bei den Fourierreihen. *Math. Z.*, **9**, 1921, 163—166.
7. G. H. Watson. The constant of Landau and Lebesgue. *Quart. J. Math.* Oxford ser., **1**., 1930, 310—318.
8. G. H. Hardy. Note on Lebesgue's constants in theory of Fourier series. *J. London Math. Soc.*, **17**, 1942, 4—13.
9. С. Б. Стечкин. О суммах Валле-Пуссена. *Доклады АН СССР*, 80, 1951, 545—548.
10. С. Б. Стечкин. Несколько замечаний о тригонометрических полиномах. *Успехи матем. наук*, **10**, 1955, 159–166.
11. П. В. Галкин. Оценки для констант Лебега. *Труды Матем. ин-та АН СССР*, **109** 1971, 3—5.
12. С. Н. Бернштейн. О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени. Собрание сочинений, т. I, Москва, 1952, 11—104.
13. A. Kolmogoroff. Zur Größenordnung des Restgliedes Fourierschen Reihen differenzierbarer Functionen. *Ann. Math.*, **36**, 1935, Nr.2, 521–526.
14. С. М. Никольский. Об асимптотическом поведении остатка при приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, суммами Фейера. *Известия АН СССР, сер. матем.*, 4, 1940, № 6, 501–508.
15. С. М. Никольский. Асимптотическая оценка остатка при приближении суммами Фурье. *Доклады АН СССР*, **32**, 1941, № 6, 386—389.
16. С. М. Никольский. Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами. *Труды Матем. ин-та АН СССР*, **15**, 1945.
17. С. М. Никольский. Ряды Фурье функций с данным модулем непрерывности. *Доклады АН СССР*, **52**, 1946, № 3, 191—194.
18. В. Т. Пинкевич. О порядке остаточного члена ряда Фурье функций, дифференцируемых в смысле Вейля. *Известия АН СССР, сер. матем.*, 4, 1940, № 6, 521—528.
19. А. В. Ефимов. О приближении некоторых классов непрерывных функций суммами Фурье и суммами Фейера. *Известия АН СССР, сер. матем.*, 22, 1958, № 1, 81—116.
20. А. В. Ефимов. Приближение функций с заданным модулем непрерывности суммами Фурье. *Известия АН СССР, сер. матем.*, 23, 1959, № 1, 115—134.

21. А. В. Ефимов. Приближение непрерывных периодических функций суммами Фурье. *Известия АН СССР, сер. матем.*, 24, 1960, № 2, 243—296.
22. С. А. Теляковский. Приближение дифференцируемых функций честными суммами их рядов Фурье. *Матем. заметки*, 4, 1968, № 3, 291—300.
23. С. М. Никольский. О наилучшем приближении многочленами функций, удовлетворяющих условию Липшица. *Известия АН СССР, сер. матем.*, 10, 1946, № 4, 295—322.
24. А. Ф. Тиман. Приближение функций, удовлетворяющих условию Липшица, обыкновенными многочленами. *Доклады АН СССР*, 77, 1951, № 6, 969—972.
25. И. М. Ганзбург. О приближении функций с заданным модулем непрерывности суммами П. Л. Чебышёва. *Доклады АН СССР*, 91, 1953, № 6, 1253—1256.
26. С. Г. Селиванова. Асимптотические оценки приближений дифференцируемых функций (непериодических) суммами Чебышёва. *Доклады АН СССР*, 105, 1955, № 4, 648—651.
27. А. Ф. Тиман, Л. И. Тучинский. Приближение дифференцируемых функций, заданных на конечном отрезке, алгебраическими многочленами. *Доклады АН СССР*, 111, 1956, № 4, 771—773.
28. Б. В. Ковальчук. Приближение суммами Фурье—Чебышёва дифференцирумых функций с заданным модулем непрерывности. *Вопросы матем. физики и теории функций*. Вып. 1, Киев, 1964, 45—50.
29. А. Ф. Тиман. О константах Лебега для некоторых методов суммирования. *Доклады АН СССР*, 61, 1948, № 6, 989—992.
30. T. H. Gronwall. Über die Laplacesche Reihe. *Math. Ann.*, 74, 1913, 213—270.
31. H. Rau. Über die Lebesgueschen Konstanten der Reihenentwicklungen nach Jakobischen Polynomen. *J. reine und angew. Math.*, 161, 1929, № 4, 237—254.
32. L. Lorch. The Lebesgue constant for Jacobi series. I. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 10, 1959, № 5, 756—761.
33. Б. М. Яхнин. О функциях Лебега разложений в ряды по полиномам Якоби для $\alpha=\beta=1/2$; $\alpha=-1/2$, $\beta=1/2$; $\alpha=1/2$, $\beta=-1/2$. *Успехи матем. наук*, 13, 1958, № 6, 207—211.
34. Б. М. Яхнин. Об остаточных членах разложения в ряд Фурье по полиномам Якоби функций, r-ая производная которых удовлетворяет условию Липшица. *Укр. матем. журн.*, 12, 1960, № 2, 196—204.
35. Б. М. Яхнин. Приближение функций класса Lipα частными суммами ряда Фурье по многочленам Чебышева 2-го рода. *Известия высш. учебн. завед. Математика*, 1963, № 1, 172—178.
36. П. К. Суетин. О представлении непрерывных и дифференцируемых функций рядами Фурье по многочленам Лежандра. *Доклады АН СССР*, 158 1964, № 6, 1275—1277.
37. С. А. Агаханов, Г. И. Натансон. Приближение функций суммами Фурье—Якоби. *Доклады АН СССР*, 166, 1966, № 1, 9—10.
38. В. М. Бадков. О приближении функций суммами Фурье—Якоби. *Доклады АН СССР*, 167, 1966, № 4, 731—734.
39. С. А. Агаханов, Г. И. Натансон. Функция Лебега сумм Фурье — Якоби. *Вестн. Ленингр. ун-та, сер. матем.* 1, 1963, № 1, 11—23.
40. С. А. Агаханов, Г. И. Натансон. Отклонение сумм Фурье—Якоби в граничной точке промежутка ортогональности. *Вестн. Ленингр. ун-та, сер. матем.*, 7, 1968, № 2, 15—27.
41. В. М. Бадков. Приближение функций частными суммами ряда Фурье по обобщённым многочленам Якоби. *Матем. заметки*, 3, 1968, № 6, 671—682.
42. В. М. Бадков. Оценки функции Лебега и остатка ряда Фурье—Якоби. *Сиб. матем. журн.*, 9, 1968, № 6, 1263—1283.
43. С. А. Агаханов, Г. И. Натансон. Письмо в редакцию. *Известия высш. учебн. завед.*, 1969, № 1, 109—110.
44. В. М. Бадков. Равносходимость рядов Фурье по ортогональным многочленам. *Матем. заметки*, 5, 1969, № 3, 285—295.
45. П. К. Суетин. Некоторые свойства многочленов, ортогональных на сегменте. *Сиб. матем. журн.*, 10, 1969, № 3, 653—670.

46. В. М. Бадков. Приближение функций частными суммами ряда Фурье по многочленам, ортогональным на отрезке. *Матем. заметки,* 8, 1970, № 4, 431—441.
47. G. Freud. On expansions in orthogonal polynomials. *Studia Sci. Math. Hung.*, 6, 1971, № 3—4, 367—374.

Институт математики и механики
УНЦ АН СССР

Получено 14. 9. 1977.