КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'77
София . 1980, с. 25—28

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'77
Sofia . 1980, p. 25—28

ОБ ОДНОЙ ГИПОТЕЗЕ П. П. КОРОВКИНА ДЛЯ НЕРЕГУЛЯРНЫХ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ ФУРЬЕ

В. А. Баскаков

Резюме. Доказывается справедливость гипотезы П. П. Коровкина о том, что нерегулярные по Теплицу методы суммирования рядов Фурье могут приближать широкий класс непрерывных и дифференцируемых функций в метрике C так же хорошо, как и регулярные.

Указывается класс „очень хороших" аналитических функций, наилучшего приближения которых можно достигнуть только с помощью регулярных методов суммирования

Рассмотрим треугольные методы суммирования рядов Фурье

$$\mathscr{L}_n(f;\, x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)U_n(t)dt, \tag{1}$$

$$U_n(t)=\lambda_0^{(n)}/2+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)}\cos kt, \quad n=1,\ 2,\ 3,\ldots$$

Будем предполагать, что всегда выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_k^{(n)}=1, \quad k=0,\ 1,\ 2,\ldots, \tag{2}$$

так как нас будут интересовать только такие методы (1), которые равномерно сходятся к $f(x)\in C_{2\pi}$.

Положим $\Delta\lambda_k^{(n)}=\lambda_k^{(n)}-\lambda_{k+1}^{(n)}$, $k=0,\ 1,\ldots,\ n-1$; $\Delta\lambda_n^{(n)}=\lambda_n^{(n)}$.

Метод суммирования (1) называется регулярным по Теплицу, если помимо условия (2) выполняется условие $\Sigma_{k=0}^{n}|\Delta\lambda_k^{(n)}|\leqq C$, где C — постоянная, не зависящая от n. Если последнее условие не выполняется, то метод суммирования (1) называется нерегулярным.

Все известные классические методы суммирования рядов Фурье — методы Фейера, Джексона, Валле-Пуссена, Коровкина и другие — регулярны. До настоящего времени неизвестен сколько-нибудь широко ни один нерегулярный метод суммирования с достаточно хорошими аппроксимативными свойствами. Всё это породило известное недоверие к нерегулярным методам как к аппарату приближения. Однако П. П. Коровкин на своих семинарах по теории приближения функций неоднократно высказывал своё убеждение в том, что в теории приближения функций методами суммирования рядов Фурье регулярность метода не имеет существенного значения. Результаты, которые будут доказаны ниже, покажут, что убеждение П. П. Коровкина было в значительной степени справедливо.

Пусть L_n^* и L_n^{**} обозначают множества всех регулярных и нерегулярных методов суммирования рядов Фурье (1).

Положим

$$E_n^*(f)=\inf_{\{\mathcal{L}_n\}\in L_n^*}\|\mathcal{L}_n(f;\,x)-f(x)\|_C,$$

$$E_n^{**}(f)=\inf_{\{\mathcal{L}_n\}\in L_n^{**}}\|\mathcal{L}_n(f;\,x)-f(x)\|_C,$$

и пусть $E_n(f)$ обозначает наилучшее приближение функции $f(x)$ тригонометрическими многочленами порядка $\leqq n$ в метрике C.

Т е о р е м а 1. *Если функция $f(x)$ такова, что существует последовательность натуральных чисел $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$, обладающая свойствами*

$$\text{(3)}\qquad \text{а) } O<(n-m_n)\to\infty,\ n\to\infty;\quad \text{б) } E_{m_n}(f)=O(E_n(f)),$$

то $E_n^{**}(f)=O(E_n^*(f))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$\text{(4)}\qquad \mathcal{L}_n(f;\,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\Big(\frac{\lambda_{0,n}}{2}+\sum_{k=1}^{n}\lambda_{k,n}\cos kt\Big)dt,\quad n=1,\,2,\ldots$$

— произвольный регулярный метод суммирования и пусть $\varrho_n(f)=\|\mathcal{L}_n(f;\,x)-f(x)\|_C$. Положим

$$\widetilde{\lambda}_{k,n}=\begin{cases}\lambda_{k,n}, & k=0,\,1,\ldots,\,m_n,\\ \lambda_{k,n}+(-1)^k a_n, & k=m_n+1,\ldots,\,n,\end{cases}$$

где числа $\{a_n\}$ таковы, что

$$\text{(5)}\qquad \text{а) } a_n\ln(n-m_n)\to 0,\ n\to\infty;\quad \text{б) } a_n\,.\,(n-m_n)\to\infty,\ n\to\infty.$$

Рассмотрим метод суммирования

$$\text{(6)}\qquad \widetilde{\mathcal{L}}_n(f;x)=\pi^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\Big(\frac{\widetilde{\lambda}_{0,n}}{2}+\sum_{k=1}^{n}\widetilde{\lambda}_{k,n}\cos kt\Big)dt,\quad n=1,\,2,\ldots$$

Убедимся в том, что этот метод нерегулярен. В самом деле

$$\sum_{k=0}^{n}|\Delta\widetilde{\lambda}_{k,n}|=\sum_{k=0}^{m_n-1}|\Delta\lambda^{k,n}|+|\Delta\lambda_{m_n,\,n}+(-1)^{m_n+1}a_n|$$

$$+\sum_{k=m_n+1}^{n-1}|\Delta\lambda_{k,n}+2(-1)^k a_n|+|\lambda_{n,n}+(-1)^n a_n|$$

$$\geqq 2a_n(n-m_n-2)-\sum_{k=m_n+1}^{n}|\Delta\lambda_{k,n}|.$$

Отсюда в силу регулярности метода (4) и условия (5б) следует, что $\sum_{k=0}^{n}|\Delta\widetilde{\lambda}_{k,n}|\to\infty$, $n\to\infty$, а это значит, что метод (6) нерегулярен.

Сравним теперь отклонение $\widetilde{\varrho}_n(f)=\|\widetilde{\mathfrak{L}}_n(f;\,x)-f(x)\|_C$ с $\varrho_n(f)$. Если обозначить $\mathfrak{M}_n(f;\,x)=\frac{a_n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\sum_{k=m_n+1}^{n}(-1)^k\cos ktdt$, то $\widetilde{\mathfrak{L}}_n(f;\,x)$ можно записать следующим образом: $\widetilde{\mathfrak{L}}_n(f;\,x)=\mathfrak{L}_n(f;\,x)+\mathfrak{M}_n(f;\,x)$.

Пусть $T_n(f;\,x)$ — полином наилучшего равномерного приближения для функции $f(x)$ порядка n. В силу ортогональности тригонометрических функций имеем

$$\mathfrak{M}_n(f;\,x)=(a_n/\pi)\int_{-\pi}^{\pi}(f(x+t)-T_{m_n}(f;\,x))\sum_{k=m_n+1}^{n}(-1)^k\cos ktdt$$

$$|\mathfrak{M}_n(f;\,x)|\leqq(2a_nE_{m_n}(f)/\pi)\int_0^{\pi}\Big|\sum_{k=m_n+1}^{n}(-1)^k\cos kt\Big|\,dt.$$

Так как $\int_0^{\pi}|\sum_{k=m_n+1}^{n}(-1)^k\cos kt|dt=O(\ln(n-m_n))$, то $|\mathfrak{M}_n(f;\,x)|=O(a_n\ln(n-m_n)\,.\,E_{m_n}(f))$. В силу (3б) и (5а) отсюда следует, что $|\mathfrak{M}_n(f;x)|=o(E_n(f))$. Следовательно, $\widetilde{\varrho}_n(f)=\varrho_n(f)+o(E_n(f))$. Из этого равенства следует теорема.

З а м е ч а н и е. Пусть a_0, $\{a_k,\,b_k\}_{k=1}^{\infty}$ — коэффициенты Фурье функции $f(x)$ и $\{S_k(f;\,x)\}_{k=1}^{\infty}$ — частные суммы её ряда Фурье.

Хорошо известно [1, с. 212], что суммы Валле-Пуссена $V_{n,m}(f;\,x)=a_0/2+\sum_{k=1}^{n-m}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)+\sum_{k=n-m+1}^{n-1}(n-k)(a_k\cos kx+b_k\sin kx)/m=m^{-1}\sum_{k=n-m}^{n-1}S_k(f;\,x)$ представляют собой регулярный метод суммирования рядов Фурье и для $n-m=[n/2]$ приближают $f(x)$ в метрике C с порядком $O(E_{[n/2]}(f))$.

Из доказанной теоремы следует, что если функция $f(x)$ такова, что

$$E_{[n/2]}(f)=O(E_n(f)),\tag{7}$$

то для неё выполняется порядковое равенство $E_n^{**}(f)\asymp E_n^{*}(f)$. Следовательно, для таких функций справедлива гипотеза П. П. Коровкина. Отметим, что условие (8) выполняется для функций, у которых наилучшие приближения убывают не слишком быстро, например, как $n^{-\alpha}$, $\alpha>0$.

Покажем теперь, что существуют функции, для которых гипотеза П. П. Коровкина неверна. Возьмём числовой ряд с положительными монотонно убывающими членами $\sum_{k=0}^{\infty}a_k$, который удовлетворяет условию (L) [2, с. 22], то есть такой, что $\sum_{k=n}^{\infty}a_k=O(a_n)$, и рассмотрим функцию $f^*(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx$. Частные суммы ряда Фурье $\{S_n(f^*,\,x)\}$, которые образуют регулярный метод суммирования, приближают эту функцию со скоростью

$$\|f^*(x)-S_n(f^*;\,x)\|_C=\Big\|\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k\cos kx\Big\|_C=\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k=O(a_{n+1}).\tag{8}$$

Т е о р е м а 2. *Если метод суммирования* (1) *приближает функцию* $f^*(x)$ *со скоростью* $O(a_{n+1})$, *то он регулярен.*

Доказательство. Так как $\| f^*(x) - \mathcal{L}_n(f^*;\, x) \|_C = \| \sum_{k=0}^{n} (1-\lambda_k^{(n)})\, a_k \times \cos kx + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \cos kx \|_C = O(a_{n+1})$, то из (8) следует, что

$$\| \sum_{k=0}^{n} (1-\lambda_k^{(n)}) a_k \cos kx \|_C = O(a_{n+1}). \tag{9}$$

Но если $T_m(x) = a_0/2 + \Sigma_{k=1}^{m} a_k \cos kx$ — тригонометрический полином, то для его коэффициентов справедливы неравенства

$$| a_k | = \frac{1}{\pi} | \int_{-\pi}^{\pi} T_m(x) \cos kx dx | \leqq 2 \| T_m(x) \|_C, \quad k = 0,\ 1, \ldots, m. \tag{10}$$

Из (9) и (10) получаем, что $| 1-\lambda_k^{(n)} | . a_k \leqq C a_{n+1}$, $k=0, 1, \ldots, n$, где C — постоянная, не зависящая ни от k, ни от n. Из этого неравенства следует, что $\Sigma_{k=0}^{n} | 1-\lambda_k^{(n)} | \leqq C a_{n+1} \Sigma_{k=0}^{n} a_k^{-1}$. Но для рядов, удовлетворяющих условию (L) [2, с. 23], $\Sigma_{k=0}^{n} a_k^{-1} = O(a_n^{-1})$. Следовательно, $\Sigma_{k=0}^{n} | 1-\lambda_k^{(n)} | = O(1)$.

Но так как $\Sigma_{k=0}^{n} | \Delta\lambda_k^{(n)} | \leqq 2 \Sigma_{k=0}^{n} | 1-\lambda_k^{(n)} |$, то $\Sigma_{k=0}^{n} | \Delta\lambda_k^{(n)} | = O(1)$, то есть метод (1) регулярен.

Следствие. Для функций вида $f^*(x)$ выполняется порядковое неравенство $E_n^*(f^*) \lessdot E_n^{**}(f^*)$.

Для них гипотеза П. П. Коровкина неверна.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. П. Натансон. Конструктивная теория функций. Москва, 1949.
2. Н. К. Бари. Тригонометрические ряды. Москва, 1961.

Московский автомобильно-дорожный институт Москва СССР

Получено 16. 9. 1977.