КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'77
София . 1980, с. 29–34

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'77
Sofia . 1980, p. 29–34

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ОПЕРАТОРА МЕТРИЧЕСКОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ И ЕГО ОБОБЩЕНИЙ

В. И. Бердышев

Резюме. Пусть X — топологическое (нормированное) пространство, f — вещественный на X функционал, M — множество из X и $t=t(M)\geqq 0$. В работе излагаются результаты о непрерывности (равномерной непрерывности) отображения $\mathcal{F}_t: M\to\mathcal{F}_t(M)=\{m\in M: f(m)\leqq t+\inf f(M)\}$. Так, если f — выпуклый функционал на нормированном пространстве, для которого $\{x\in X: f(x)\leqq a\}$ — ограниченное тело при $a>\inf f(X)$, M и $M'\subset X$, $\inf f(M)>\inf f(X)$, t и $t'\geqq 0$, $\mathcal{F}_t(M)\neq\varnothing$, $\mathcal{F}_{t'}(M')\neq\varnothing$, $h=h(M, M')$ — хаусдорфово расстояние между множествами M и M', $r=t+\inf f(M)$, $r'=t'+\inf f(M')$,

$$\varepsilon_r(\xi)=\sup\{\|x-y\|: f(x)=f(y)=a\leqq r,\quad \varrho(\frac{x+y}{2}, \Gamma_a)\leqq\xi\},\quad \Gamma_a=\{x: f(x)=a\},$$

$$\omega_r^{-1}(\xi)=\inf\{\|x-y\|: f(x)\leqq r,\quad f(x)-f(y)\geqq\xi\},\quad \tau=\omega_r^{-1}(t),$$

то

$$h(\mathcal{F}_t(M), \mathcal{F}_{t'}(M'))\leqq (c_1\alpha\varepsilon_r(c_2\alpha))/(c_3\alpha+\tau\varepsilon_r(c_2\alpha)),$$

где $\alpha=h+|r-r'|$, $c_i=c_i(f)$ $(i=1, 2, 3)$. Отсюда следует липшицевость по h и t отображения $\mathcal{F}_t$ при $t\geqq t_0>0$ и равномерная непрерывность этого отображения в случае равномерно выпуклого f.

1. Введение. Пусть X — вещественное линейное нормированное пространство, M — множество из X, $x\in X$ и $t\geqq 0$. Оператор метрического проектирования P_M есть оператор из X в 2^X, ставящий в соответствие каждому элементу $x\in X$ множество $P_M^t x=\{m\in M: \|x-m\|\leqq t+xM\}$, где $xM=\inf\{\|x-y\|: y\in M\}$.

Пусть X — топологическое пространство, $f(x)$ — вещественный функционал на X, $f\not\equiv\text{const}$, $M\subset X$, $t=t(M)$ — неотрицательное вещественное число,

$$\inf f(M)=\inf\{f(x): x\in M\}. \tag{1}$$

Рассмотрим оператор $\mathcal{F}_t$ из 2^X в 2^X, который каждому множеству $M\subset X$ ставит в соответствие множество

$$\mathcal{F}_t(M)=\{m\in M: f(m)\leqq t+\inf f(M)\}. \tag{2}$$

В случае $t=0$ множество (2) будем обозначать через $\mathfrak{F}(M)$. В дальнейшем будем предполагать, что $\mathfrak{F}(M) \neq \varnothing$.

Оператор $\mathfrak{F}_t$ естественно возникает при практическом решении задачи (1) на условный экстремум, поскольку алгоритмы минимизации часто позволяют строить лишь такой элемент $x=x_t \in M$, для которого $f(x) \leq t + \inf f(M)$ (т.е. элемент из $\mathfrak{F}_t(M)$), где $t>0$ достаточно мало). Множество M обычно задается приближенно, практически вместо M известно „близкое" множество M_α, поэтому важным является вопрос об устойчивости множества $\mathfrak{F}_t(M)$ к погрешности задания множества M, т. е. вопрос о непрерывности отображения $\mathfrak{F}_t$.

Предположим, что для (обобщенных) последовательностей $\{M_\alpha\}$ множеств $M_\alpha \subset X$ определены понятия γ-сходимости и β-сходимости. Пусть функционал $t=t(M)$ является γ-непрерывным, т. е. $M_\alpha \xrightarrow{\gamma} M \Longrightarrow t(M_\alpha) \rightarrow t(M)$. Отображение $\mathfrak{F}_t$ будем называть $\gamma-\beta$-непрерывным, если

$$M_\alpha \xrightarrow{\gamma} M \Longrightarrow \mathfrak{F}_{t(M_\alpha)}(M_\alpha) \xrightarrow{\beta} \mathfrak{F}_{t(M)}(M).$$

Если в 2^X определена метрика, то можно ставить вопрос о равномерной непрерывности и липшицевости отображения $\mathfrak{F}_t$.

В настоящем докладе приводятся результаты по непрерывности и равномерной непрерывности отображения $\mathfrak{F}_t$. В случае, когда X — линейное нормированное пространство, а $f(x)=\|x\|$, имеет место соотношение

$$\mathfrak{F}_t(M-x)+x=P_M^t x. \tag{3}$$

Это равенство позволяет увязать задачи о непрерывности операторов $\mathfrak{F}_t$ и P_M^t.

2. **Непрерывность отображения** $\mathfrak{F}_t$. Для последовательности $\{M_\alpha\}$ множеств из топологического пространства X сходимость можно задать одним из следующих способов (Вьеторис, Майкл, см. [1]):

τ) $M_\alpha \xrightarrow{\tau} M \Leftrightarrow$ для любого набора $\{G_i\}_{i=1}^n$ открытых множеств, удовлетворяющего условиям $M \subset \bigcup_{i=1}^n G_i$, $M \cap G_i \neq \varnothing$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, начиная с некоторого α_0, будет $M_\alpha \subset \bigcup_{i=1}^n G_i$, $M_\alpha \cap G_i \neq \varnothing$ $(i=1, 2, \ldots, n)$,

τ') $M_\alpha \xrightarrow{\tau'} M \Leftrightarrow$ для любого открытого множества G такого, что $M \subset G$ будет выполняться включение $M \subset G$ для всех α, начиная с некоторого α_0.

Пусть X — равномерное пространство, $\mathfrak{U}$ — фильтр окружений, $U \in \mathfrak{U}$ и $V_U(M)=\{x \in X: \exists y \in M:(x, y) \in U\}$ — окрестность множества $M \subset X$. Сходимость последовательности $\{M_\alpha \subset X\}$ здесь можно понимать так (Ф. Хаусдорфф):

h) $M_\alpha \xrightarrow{h} M \Leftrightarrow \forall U \in \mathfrak{U}\ \exists \alpha_0: \forall \alpha > \alpha_0\ M_\alpha \subset V_U(M),\ M \subset V_U(M_\alpha)$;

h') $M_\alpha \xrightarrow{h'} M \Leftrightarrow \forall U \in \mathfrak{U}\ \exists \alpha_0: \forall \alpha > \alpha_0\ M_\alpha \subset V_U(M)$.

Сходимости τ, h, τ' и h' определяют топологию в 2^X. Если множество M компактно, то $M_\alpha \xrightarrow{h} M \Leftrightarrow M_\alpha \xrightarrow{\tau} M$, $M_\alpha \xrightarrow{h'} M \Leftrightarrow M_\alpha \xrightarrow{\tau'} M$, а в общем случае $M_\alpha \xrightarrow{\tau'} M \Longrightarrow M_\alpha \xrightarrow{h'} M$.

В случае, когда X — нормированное пространство, $f(x)=\|x\|$, а $\gamma=h$, h' или τ', используя (3), можно показать, что $\mathcal{F}_{t(x)}(M-x)\xrightarrow{\gamma}\mathcal{F}_{t(0)}(M) \Leftrightarrow P_M^{t(x)}x\xrightarrow{\gamma}P_M^{t(0)}0$ $(x\to 0)$, где $t(x)\geqq 0$.

Прежде чем формулировать результаты, сделаем два замечания. Во-первых, вопрос о $\gamma-\beta$-непрерывности отображения $\mathcal{F}_t$ естественно ставить тогда, когда сходимость γ сильнее, чем β. Проиллюстрируем это на простом примере. Пусть $X=\{x=(x_1, x_2)\}$ — двумерное пространство, $\|x\|=\max\{|x_1|, |x_2|\}$, $f(x)=\|x\|$, $M=[a, b]$, $M_k=[a, b_k]$, где $a=(1, 1)$, $b=(1, -1)$, $b_k=(1+1/k, -1)$. Тогда $\mathcal{F}(M)=M$, $\mathcal{F}(M_k)=\{a\}$; таким образом, $M_k\xrightarrow{h}M$, $\mathcal{F}(M_k)\xrightarrow{h'}\mathcal{F}(M)$ $(k\to\infty)$, но не выполняется соотношение $\mathcal{F}(M_k)\xrightarrow{h}\mathcal{F}(M)$. Во-вторых, непрерывность отображения $\mathcal{F}$ в „точке" $M\in 2^X$ можно ожидать, если на M (f, или X) наложены достаточно сильные условия. Так в случае пространства $C[-1, 1]$ непрерывных функций оператор метрического проектирования уже не является непрерывным на любую замкнутую плоскость коразмерности два (П. Моррис [2]). В данной работе таким условием является аппроксимативная компактность.

Множество M нормированного пространства называется аппроксимативно компактным [3], если для всякого $x\in X$ любая минимизирующая последовательность $\{x_n\in M\}$ (т. е. такая, что $\|x-x_n\|\to xM$) содержит подпоследовательность, сходящуюся к элементу $x_0\in M$. Если для всякого $x\in X$ любая минимизирующая последовательность обладает свойством $x_nP_M^0x\to 0$, то M называется H-множеством [4]. Эти термины удобно сохранить и в случае отображения $\mathcal{F}$.

Множество M из топологического пространства X будем называть аппроксимативно кампактным, если всякая минимизирующая последовательность $\{x_n\in M\}$ (т. е. такая, что $f(x_n)\to\inf f(M)$) содержит подпоследовательность, сходящуюся к элементу из M. Если X — равномерное пространство, то множество $M\subset X$ будем называть H-множеством, если любая минимизирующая последовательность $\{x_n\in M\}$ удовлетворяет условию $x_n\xrightarrow{h'}\mathcal{F}(M)$. Отметим, что в [5, 6] для аналогичных понятий используется другая терминология.

Теорема 1. *Пусть X — равномерное пространство, f — равномерно непрерывный на X функционал, множества M, M_α и функционал $t=t(M_\alpha)\geqq 0$ таковы, что*

$$M_\alpha\xrightarrow{h'}M,\ \inf f(M_\alpha)\to\inf f(M),\ t(M_\alpha)\to 0.$$

Если множество M аппроксимативно компактно, то $\mathcal{F}_t(M_\alpha)\xrightarrow{\tau'}\mathcal{F}(M)$. Если M является H-множеством, то $\mathcal{F}_t(M_\alpha)\xrightarrow{h'}\mathcal{F}(M)$.

В случае $t(M_\alpha)=0$ эта теорема содержится в [7] и ее доказательство без труда переносится на случай $t(M_\alpha)\geqq 0$. Для конечномерного пространства и $t(M_\alpha)=0$ этот результат хорошо известен (см. [9, 10]).

В [7] установлено, что если f — равномерно непрерывный функционал на равномерном пространстве X, то функционал $\inf f(M)$ является непрерывным на 2^X (в смысле топологии τ и h). Отсюда и из теоремы 1 следует

Теорема 2. *Пусть X — равномерное пространство, f — равномерно непрерывный на X функционал, $M_0\subset X$, $t=t(M)$ — неотрицатель-*

ный на 2^X функционал, $t(M_0)=0$. Если множество M_0 аппроксимативно компактно, а функционал $t(M)$ h-непрерывен (τ-непрерывен) в „точке“ $M=M_0$, то оператор $\mathfrak{F}_t$ $h-\tau'$-непрерывен ($\tau-\tau'$-непрерывен) при $M=M_0$. Если M является H-множеством и функционал $t(M)$ h-непрерывен (τ-непрерывен) при $M=M_0$, то оператор $\mathfrak{F}_t$ $h-h'$-непрерывен ($\tau-h'$-непрерывен) при $M=M_0$.

Используя (3) и теорему 2, получим

Следствие. Пусть X — нормированное пространство $x_0 \in X$, $t=t(x)$ — непрерывный неотрицательный функционал, $t(x_0)=0$. Если M — аппроксимативно компактное множество (см. [3]), то

$$x \to x_0 \Longrightarrow P^t_M x \xrightarrow{\tau'} P^0_M x_0;$$

если M — H-множество (см. [4]), то

$$x \to x_0 \Longrightarrow P^t_M x \xrightarrow{h'} P^0_M x_0.$$

В случае $t=0$ первое утверждение установлено И. Зингером [11], а второе Л. П. Власовым (см. [7]).

Для $r \geq \inf f(X)$ в дальнейшем будем обозначать $Q_r=Q_r(f)=\{x \in X: f(x)\leq r\}$, $\Gamma_r=\Gamma_r(f)=\{x \in X: f(x)=r\}$. Заметим, что $\mathfrak{F}_t(M)=M\cap Q_r$, где $r=t+\inf f(M)$. Через $\mathfrak{M}$ далее обозначается класс замкнутых выпуклых множеств нормированного пространства.

Из следующей теоремы можно заключить, что условие аппроксимативной компактности в задаче о непрерывности отображения $\mathfrak{F}$ является в определенном смысле естественным.

Теорема 3 [7, 8]. *Пусть X — рефлексивное пространство, f — выпуклый равномерно непрерывный на X функционал, для которого множество Q_r ($r>\inf f(X)$) ограничено и содержит внутренние точки. Следующие условия эквивалентны*:

1) $\mathfrak{F}$ *$h-\tau'$ — непрерывен на $\mathfrak{M}$*; 2) $\mathfrak{F}$ *$h-h'$ — непрерывен на $\mathfrak{M}$*; 3) *каждое множество из $\mathfrak{M}$ аппроксимативно компактно*, 4) *каждое множество из $\mathfrak{M}$ является H-множеством. Если, кроме того, f положительно однороден (степени $\delta>0$), то эквивалентны утверждения* 1, 2, 3, 4 *и* 5) $\mathfrak{F}$ *$\tau-\tau'$ — непрерывен на $\mathfrak{M}$*; 6) $\mathfrak{F}$ *$\tau-h'$ — непрерывен на $\mathfrak{M}$.*

В частности, для пространства Ефимова—Стечкина (см. [11]), т. е. такого пространства, в котором любое множество $M \in \mathfrak{M}$ аппроксимативно компактно (см. [3]), получим

Следствие. Нормированное пространство X является пространством Ефимова—Стечкина тогда и только тогда, когда любое множество $M \in \mathfrak{M}$ является H-множеством (см. [4]).

3. Равномерная непрерывность отображения $\mathfrak{F}_t$. Будем предполагать, что X — нормированное пространство, f — выпуклый собственный функционал. Для элементов $x, y \in X$ и множеств $M, N\subset X$ будем обозначать $xy=\|x-y\|$, $MN=\sup\{xN: x\in M\}$, $h(M, N)=\max\{MN, NM\}$ — хаусдорфово расстояние между M и N, $d(M)=\sup\{xy: x, y\in M\}$ — диаметр множества M. Пусть Q — выпуклое ограниченное тело из X, и Γ — его граница. По аналогии с тем, как определяется модуль выпуклости пространства [12], можно ввести модуль выпуклости тела Q и функцию, обратную к нему: $\varepsilon(t, Q)=\sup\{xy; x, y\in Q, ((x+y)/2)\Gamma\leq t\}$, $t\geq 0$.

Предложение. Пусть Q — ограниченное выпуклое тело из X, Γ — его граница, $M\subset X$ — выпуклое множество, $(M\cap Q)\Gamma=\tau>0$. Если Q', $M'\subset X$, $Q'\cap M'\neq\emptyset$, $Q'Q=H$, $M'M=h$, то

$$(Q'\cap M')(Q\cap M)\leq c_1(H+h)\varepsilon(\frac{H+h}{2},\ Q)/(c_2(H+h)+\tau\varepsilon(\frac{H+h}{2},Q)), \tag{4}$$

где $c_i=c_i(d)$ $(i=1, 2)$, $d=d(Q)$.

Используя это предложение, нетрудно оценить сверху величину $h(\mathcal{F}_t(M),\ \mathcal{F}_{t'}(M'))$, где M, $M'\subset X$, t, $t'\geq 0$. Для этого понадобятся функции [14]

$$\varepsilon_r(t)=\varepsilon_r(t,\ f)=\sup\{\varepsilon(t,\ Q_\alpha(f)):\alpha\leq r\}$$

$$\omega_r^{-1}(t)=\omega_r^{-1}(t,\ f)=\inf\{xx':x,\ x'\in X, f(x)\leq r, f(x)-f(x')\geq t\}\ \ (r\geq\inf f(X)),$$

обратные модулю выпуклости и, соответственно, модулю непрерывности функционала f. В случае $f(x)=\|x\|$ $\varepsilon_1(t)$ есть функция, обратная модулю выпуклости пространства X [12].

Теорема 4. *Пусть X — нормированное пространство, f — выпуклый функционал на X, для которого множество $\{x\in X:f(x)\leq a\}$ является выпуклым телом при $a>\inf f(X)$, M и M' — множества из X, $\inf f(M)>\inf f(X)$, $h=h(M,\ M')$, t и $t'\geq 0$, $r=t+\inf f(M)$, $r'=t'+\inf f(M')$, $\tau=\omega_r^{-1}(t)$, тогда*

$$h(\mathcal{F}_t(M),\ \mathcal{F}_{t'}(M'))\leq c_1\alpha\varepsilon_r(\alpha)/(c_2\alpha+\tau\varepsilon_r(\alpha)),$$

где $\alpha=h+|r-r'|$, $c_i=c_i(f)$ $(i=1, 2)$.

Последнее неравенство можно получить из (4), имея в виду $H=\omega_r^{-1}(|r-r'|)$, и то, что $\omega_r^{-1}(\delta)\leq c(f)\delta$ при $d(Q_r)<\infty$.

Следствие. Если $t=t'=0$, то

$$h(\mathcal{F}(M),\ \mathcal{F}(M')\leq K_1\varepsilon_r(h), \tag{5}$$

где $K=K_1(f)$, а если $t\geq t_0>0$, то

$$h(\mathcal{F}_t(M),\ \mathcal{F}_{t'}(M'))\leq K(h+|t-t'|+|\inf f(M)-\inf f(M')|), \tag{6}$$

где $K=K(f,\ t_0)$.

Неравенство 5 установлено в [14], а в случае, когда X — гильбертово пространство и $f(x)=\|x\|$, оно содержится в [15]. Для метрической проекции (когда $f(x)=\|x\|$) соотношение (6) получено А. В. Мариновым [13]. Константа $K(f,\ t_0)$ при $t_0\to 0$, вообще говоря, возрастает. Из (5) следует, что для равномерно выпуклого функционала f отображение $\mathcal{F}$ является равномерно непрерывным. Верно и обратное утверждение. Чтобы дать точную формулировку, определим (см. [14]) модуль непрерывности отображения $\mathcal{F}$:

$$\theta_r(t)=\theta_r(t,f)=\sup\{h(\mathcal{F}(M_1),\ \mathcal{F}(M_2)):M_i\subset X,\ \inf f(M_i)\leq r$$

$$(i=1,\ 2),\ h(M_1,\ M_2)\leq t\}\quad (t\geq 0,\quad r\geq\inf f(X)).$$

Теорема 5 [14]. *Имеет место соотношение*

$$1/2[\varepsilon_r(t/8)-t]\leq\theta_r(t)\leq\varepsilon_r(t/2)+t,$$

где $r>\inf f(X)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Куратовский. Топология, том I. Москва, 1966.
2. P. D. Morris. Metric projection onto subspaces of finite codimension. *Duke Math. J.*, **35**, 1968, 799—808.
3. Н. В. Ефимов, С. Б. Стечкин. Аппроксимативная компактность и чебышевские множества. *Доклады АН СССР*, **140**, 1961, № 3, 522—524.
4. Л. П. Власов. Понятие аппроксимативной компактности и его варианты. *Матем. заметки*, **16**, 1974, № 2, 337—348.
5. А. Н. Тихонов. Об устойчивости задачи оптимизации функционалов. *Ж. вычисл матем. и матем. физ.*, **6**, 1966, № 4, 631—634.
6. А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. Методы решения некорректных задач. Москва, 1974.
7. В. И. Бердышев. Устойчивость задачи минимизации при возмущении множества допустимых элементов. *Матем. сборник*, **103**, 1977, 467—479.
8. В. И. Бердышев. Устойчивости задачи минимизации выпуклого функционала. Вопросы оптимизации и организации вычислений. Киев, 1976, с. 13--14.
9. Е. Г. Гольштейн. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. Москва, 1971.
10. I. Grinberg, W. Pierskalla. Extentions of the Evans-Gould Stability theorems for mathematical programs. *Operat. Res*, **20**, 1972, 1, 143—153.
11. I. Singer. Some remarks on approximative compactness. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, **9**, 1964, № 2, 167—177.
12. J. A. Clarkson. Uniformly convex spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **40**, 1963, 396—414.
13. В. И. Бердышев. Равномерная непрерывность метрической проекции и ν-проекции. Теория приложения функций. Труды Международной конф. в Калуге, 1975. Москва, 1976, с. 37—41.
14. В. И. Бердышев. Непрерывная зависимость элемента, реализующего минимум выпуклого функционала, от множества допустимых элементов. *Матем. заметки*, **19**, 1976, № 4, 501—512.
15. J. W. Daniel. The continuity of metric projections as functions of data. *J. Approx. theory*, **12**, 1974, № 3, 234—240.

Институт математики и механики УНЦ АН СССР
Свердловск СССР

Получено 14. 9. 1977.