КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'77
София . 1980, с. 35—40

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'77
Sofia . 1980, p. 35—40

РАВНОВЕСНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ И АППРОКСИМАЦИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ РАЦИОНАЛЬНЫМИ

П. Г. Бояджиев

Резюме. Доказано следующее утверждение: Если D — область в комплексной плоскости, $E\subset D$ и $P\subset\overline{\mathbb{C}}\setminus\check{E}$ — компакты, то порядок равномерного на E приближения голоморфной в D функции $f(z)$ рациональными функциями порядка $\leqq n$, все полюсы которых лежат на P, не превосходит $e^{-n\mu}$, где μ минимум равновесного потенциала компакта P относительно $\overline{\mathbb{C}}\setminus\check{E}$.

Пусть D — открытое множество в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, состоящее из конечного числа компонент, $A(D)$ — множество регулярных в D функций, $E\subset D$ — фиксированный компакт. Через $\check{E}$ будем обозначать компакт, полученный из E присоединением тех компонент множества $\overline{\mathbb{C}}\setminus E$, которые не пересекаются с $\overline{\mathbb{C}}\setminus D$, а через $g(z,\zeta)$ — функцию Грина для $\overline{\mathbb{C}}\setminus\check{E}$ с полюсом в точке ζ; при этом, если $\mathbb{G}$ — компонента $\overline{\mathbb{C}}\setminus\check{E}$ и $\zeta\in\mathbb{G}$, то $g(z,\zeta)$ совпадает с обычной функцией Грина для G при $z\in G$ и равна нулю для $z\in(\overline{\mathbb{C}}\setminus\check{E})\setminus G$. Мы будем, кроме того, предполагать, что E регулярен, — это означает, что $g(z,\zeta)$ непрерывна на $(\overline{\mathbb{C}}\setminus\check{E})\setminus\{\zeta\}$ и равна нулю на $\partial(\overline{\mathbb{C}}\setminus\check{E})$.

Если K — множество, то через $\operatorname{cap} K$ обозначается логарифмическая емкость K.

Пусть P — компакт в $\overline{\mathbb{C}}$. Множество всех рациональных функций порядка $\leqq n$, полюсы которых лежит на P, будем обозначать через $\mathcal{R}_n^P$. Если функция $f(z)$ определена на E, то через $R_n^P(f,E)$ обозначено наилучшее равномерное на E приближение $f(z)$ рациональными функциями из $\mathcal{R}_n^P$:

$$R_n^P(f,E)=\inf\{\|f-r\|_E : r\in\mathcal{R}_n^P\},$$

где $\|\varphi\|_E=\max\{|\varphi(z)| : z\in E\}$.

В этой заметке дается оценка величины

$$\sup\{\overline{\lim}_{n\to\infty} R_n^P(f,E)^{1/n} : f\in A(D)\}$$

сверху в терминах равновесного потенциала. Сначала доказываем две лементарные предложения.

Предложения 1. *Пусть* $P \subset E$. *Тогда, если* $f \in A(D)$ *постоянна, то* $R_n^P(f, E) = 0$ *для любого* n. *Если* f *непостоянна, то*

$$\overline{\lim}\, R_n^P(f, E)^{1/n} = 1.$$

Доказательство. Первая часть этого утверждения тривиальна, так что рассмотрим случай $f \neq \mathrm{const}$. Если $r \in \mathcal{R}_n^P$ имеет неотстранимый полюс, то $\|f - r_n\|_E = \infty$. Тогда $R_n^P(f, E) = R_0^P(f, E) = \inf\{\|f - a\|_E : a$ — комплексная постоянная$\}$. Поскольку $f(z)$ непрерывна на компакте E, то компакт $E_1 = f(E)$ ограничен, и мы можем рассмотреть функцию $\varrho(a) = \max\{|w - a| : w \in E_1\}$. Она, очевидно, непрерывна и стремится к ∞ при $a \to \infty$ так, что найдется комплексное число b, для которого $\varrho(b) = \inf\{\varrho(a) : a \in \mathbb{C}\}$. Тогда $\|f - a\|_E = \varrho(a) \geqq \varrho(b) = \|f - b\|_E$, а это означает, что функция $r(z) \equiv b$ дает искомое наилучшее приближение. Поскольку $f \neq \mathrm{const}$, то $\varrho(b) \neq 0$ и $\lim \varrho(b)^{1/n} = 1$, что и утверждалось.

Предложение 2. *Пусть* $\mathrm{cap}\, E = 0$ *и* $P \subset E$. *Тогда*

$$\sup\{\overline{\lim}\, R_n^P(f, E)^{1/n} : f \in A(D)\} = 0.$$

Доказательство. Пусть $a \in P \setminus E$ и E_n — убывающая последовательность замкнутых множеств, каждое из которых ограничено конечным числом аналитических кривых Жордана, такая, что $E = \bigcap E_n$. Пусть $g_n(z, a)$ — функция Грина для $\overline{\mathbb{C}} \setminus E_n$ с полюсом в точке a. Тогда $g_n(z, a)$ равномерно на компактных подмножествах $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$ стремится к ∞ (напомним, что $\mathrm{cap}\, E = 0$). В частности, если положим $\mu_n = \min\{g_n(z, a) : z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus D\}$, то $\lim \mu_n = \infty$.

Пусть $D_n = \{z : g(z, a) < \mu_n\} \cup E_n$. Ясно, что $D_n \subset D$. Пусть $t = (z - a)^{-1}$ $E'_n = t(E_n)$, $D'_n = t(D_n)$. Тогда функция $G_n(t) = g_n(a + t^{-1}, a)$ будет функцией Грина для $\overline{\mathbb{C}} \setminus E'_n$ с полюсом в $t = \infty$ и $\partial D'_n = \{t : G_n(t) = \mu_n\}$.

Пусть $f(z) \in A(D) \subset A(D_n)$ и $\varphi(t) = f(a + t^{-1})$. Тогда $\varphi(t) \in A(D'_n)$ и по теореме Бернштейна—Уолша [1, 99] найдется последовательность многочленов $p_\nu(t)$ такая, что $\overline{\lim}_{\nu \to \infty} \|\varphi - p_\nu\|_{E'_n}^{1/\nu} \leqq e^{-\mu_n}$. Таким образом рациональные функции $r_\nu(z) p_\nu(1/(z - a))$ принадлежат $\mathcal{R}_\nu^{\{a\}}$ и $\overline{\lim}_{\nu \to \infty} \|f - r_\nu\|_{E_n}^{1/\nu} \leqq e^{-\mu_n}$. Так как $E \subset E_n$ и $a \in P$, то отсюда следует, что $\overline{\lim}_{\nu \to \infty} R_\nu^P(f, E)^{1/\nu}$, $\leqq e^{-\mu_n}$, $\forall n$. Наше утверждение вытекает из этого неравенства и того факта, что $\mu_n \to \infty$.

Рассмотрим теперь самый важный случай, когда $\mathrm{cap}\, E > 0$. Кроме того, так как рациональная функция, дающая наилучшее приближение, не может иметь полюсы на E, предположим дополнительно, что $P \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus \check{E}$.

Если $\mathrm{cap}\, P > 0$, то, как нетрудно доказать, следуя соответствующим методам из теории логарифмического потенциала [2], существует единственная положительная единичная мера ν, сосредоточенная на P, и такая, что гриновый потенциал $u_\nu(z) = \int_P g(z, \zeta)\, d\nu(\zeta)$ принимает постоянное значение $V(E, P)$ во всех точках P за исключением множества логарифмической емкости нуль. Во всех остальных точках $\overline{\mathbb{C}}\setminus\check{E}$ имеет место неравенство $u_\nu(z)\leqq V(E, P)$. Число $V(E, P)^{-1}$ чаще всего называют емкостью конденсатора (E, P). Когда нет опасности от недоразумения, мы будем писать V вместо $V(E, P)$.

Если P — компакт в $\mathbb{C}$ и $\operatorname{cap} P=0$, то всегда существует единичная положительная мера ν, сосредоточенная на P, и такая, что соответствующий ей гриновый потенциал стремится к бесконечности, когда z стремится к P. Действительно, в этом случае по теореме Еванса [2, с. 75] существует мера ν такая, что логарифмический потенциал $\int \ln|z-\zeta|^{-1}d\nu(\zeta)$ стремится к ∞ при $z \to P$. Поскольку $g(z, \zeta)=\ln|\zeta-z|^{-1}+u(z, \zeta)$, где $u(z, \zeta)$ — гармоническая в $\overline{\mathbb{C}}\setminus\check{E}$ функция, принимающая значение $\ln|z-\zeta|$ на границе, то ясно, что соответствующий гриновый потенциал будет обладать этим свойством. Надо отметить, что в этом случае ν не обязательно единственна. Например, если P состоит из двух точек ζ_1 и ζ_2, то можно положить $\nu(\{\zeta_1\})=a$, $\nu(\{\zeta_2\})=b$, где a и b—произвольные положительные числа, для которых $a+b=1$. Тогда $u_\nu(z)=ag(z, \zeta_1)+bg(z, \zeta_2)$ и, очевидно, стремится к ∞ при $z \to \zeta_i$, $i=1, 2$.

Если P — компакт в $\overline{\mathbb{C}}$, то положим $\operatorname{cap} P=\sup\{\operatorname{cap} F: F$ — компакт в $\mathbb{C}$, $F\subset P\}$. Тогда, если $\operatorname{cap} P=0$, тоже можно найти меру ν с указанным выше свойством. Действительно, если $P_n=P\cap\{z:|z|\leqq n\}$, то, как заметили выше, существует мера ν_n такая, что u_{ν_n} стремится к ∞ при $z \to P_n$. Положим $\nu=\Sigma\nu_n/2^n$. Тогда $u_\nu(z)=\infty$ при $z\in P\setminus\{\infty\}$ (напомним, что $u_{\nu_n}=\infty$ при $z\in P_n$). Поскольку $u_\nu(z)$ супергармонична в $\overline{\mathbb{C}}\setminus\check{E}$, то $u_\nu(z)\to\infty$ при $z \to \zeta\in P\setminus\{\infty\}$. Тогда, если $0<a<1$, то мера, определенная как $\mu(F)=a\nu(F)$ при $\infty\notin F$, и $\mu(\{\infty\})=1-a$ единична, положительна и $au_\nu(z)+(1-a)g(z, \infty)=u_\mu(z)$ стремится к ∞ при P.

В обоих случаях ($\operatorname{cap} P>0$ и $\operatorname{cap} P=0$) функцию $u_\nu(z)$ будем называть равновесным гриновым потенциалом компакта P относительно $\overline{\mathbb{C}}\setminus\check{E}$. В случае $\operatorname{cap} P=0$ такой потенциал не единствен. Имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть D — открытое множество в $\overline{\mathbb{C}}$, состоящее из конечного числа компонент, E — регулярный компакт в D и P — компакт в $\overline{\mathbb{C}}\setminus\check{E}$. Пусть $u_\nu(z)$ — равновесный потенциал P относительно $\overline{\mathbb{C}}\setminus\check{E}$ и $\mu=\min\{u_\nu(z): z\in\overline{\mathbb{C}}\setminus D\}$. Тогда имеет место неравенство*

$$\sup\{\overline{\lim}_{n\to\infty} R_n^P(f, E)^{1/n}: f\in A(D)\}\leqq e^{-\mu}.$$

Доказательство. Если $\operatorname{cap} P>0$, то, поскольку $u_\nu(z)\leqq v<\infty$, μ— конечное число и при любом $\delta>0$ множество $\Gamma_\delta=\{z: u_\nu(z)=\mu-\delta\}$ состоит из конечного числа аналитических кривых Жордана, лежащих в объединение тех компонент D, которые имеют непустое пересечение с E; при этом, если G такая компонента и $L_1, L_2, \ldots, L_p$ — кривые из Γ_δ, принадлежащие G, то они ограничивают в совокупности область, содержащую $E\cap G$ и несодержащую точек $\overline{\mathbb{C}}\setminus D$.

Если $\operatorname{cap} P=0$, но $\mu<\infty$ (что возможно, когда $\overline{\mathbb{C}}\setminus D\not\subset P$), то Γ_δ, определенное выше, имеет те же свойства. Если $\mu=\infty$ (этот случай имеет место при $\overline{\mathbb{C}}\setminus D\subset P$), то выбирая произвольно большое число M, положим $\Gamma_M=\{z:u_\nu(z)=M\}$. Тогда Γ_M имеет те же свойства, как Γ_δ. В обоих случаях вместо Γ_δ или Γ_M будем писать просто Γ.

Так как Γ компакт, непересекающийся с P, то для любого $\varepsilon>0$ можно найти такие точки $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_N$, принадлежащие P, и такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$, $0\leqq\alpha_i\leqq 1$, $\Sigma\alpha_i=1$, что для любого $z\varepsilon\,\Gamma$ имело место неравенство

$$(1)\qquad \Big|\sum_{k=1}^{N} g(z, \zeta_k)\,.\,\alpha_k-u_\nu(z)\Big|<\varepsilon.$$

(Мы приблизили $u_\nu(z)$ подходящей интегральной суммой.)

Если n — фиксированное натуральное число, то существуют такие положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_N$, что: 1) $\Sigma a_k=1$, 2) na_k — целое число и 3) $|\alpha_k-a_k|<n^{-1}$ при любом $k=1, 2, \ldots, N$. Действительно, существуют натуральные числа $p_1, p_2, \ldots, p_N$, $p_k\leqq n$ такие, что $p_k|n\leqq\alpha_k\leqq(p_k+1)/n$. Тогда ясно, что

$$0\leqq\sum_{k=1}^{N-1}(\alpha_k-p_k/n)\leqq(N-1)/n.$$

Отсюда следует, что для некоторого натурального числа s, $0\leqq s\leqq N-1$ имеем

$$s/n\leqq\sum_{k=1}^{N-1}(\alpha_k-p_k/n)\leqq(s+1)/n.$$

Если теперь положим $a_k=(p_k+1)/n$ для $k=1, 2, \ldots, s$, $a_k=p_k/n$ для $k=s+1, s+2, \ldots, N-1$ и $a_N=1-a_1-\ldots-a_{N-1}$, то эти числа удовлетворяют поставленным выше условиям.

Пусть $n>N$ и b_{nk}, $k=1, 2, \ldots, n$ — точки из P, определенные следующим образом: $b_{nk}=\zeta_k$ для $k=na_{k-1}+1$, $na_{k-1}+2, \ldots$, $na_{k-1}+na_k$. Иными словами, b_{nk} — это иначе записанная последовательность

$$\underbrace{\zeta_1, \zeta_1, \ldots, \zeta_1}_{na_1\ \text{раз}},\ \underbrace{\zeta_2, \zeta_2, \ldots, \zeta_2}_{na_2\ \text{раз}}, \ldots,\ \underbrace{\zeta_N, \zeta_N, \ldots, \zeta_N}_{na_N\ \text{раз}}.$$

Рассмотрим функцию Шеня [1, с. 304]

$$v(z_1, z_2, \ldots, z_n)=\prod_{1\leqq i<j\leqq n}|z_i-z_j|\Big/\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n-1}|z_i-b_{nj}|$$

и пусть $a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn}$ — такие точки компакта E, для которых $v(a_{n1}, \ldots, a_{nn})=\max\,\{v(z_1, \ldots, z_n): z_i\in E\}$. Положим $\omega_n(z)=\Pi(z-a_{nk})/(z-b_{nk})$. Если $\varepsilon>0$, то существует замкнутое множество L_ε такое, что $E\subset\mathring{L}_\varepsilon$ ($\mathring{K}$ — внутренность множества K) и $g(z, \zeta)\leqq\varepsilon$ для $z\in L_\varepsilon$, $\zeta\in P$. Мы будем считать ε настолько малым, что Γ лежало вне L_ε. Тогда, следуя методу Шеня [1, с. 304—305], можно найти постоянную $d=d(\varepsilon, E, P)$ такую, что $|\omega_n(z)|/|\omega_n(t)|\leqq(n+1)d$ для $z\in E$, $t\in L_\varepsilon$. Отсюда и из определения L_ε вытекает

$$\ln\max\{|\omega_n|:E\}-\ln|\omega_n(t)|+\Sigma g(t, b_{nk})\leqq\ln\,(n+1)d+n\varepsilon$$

для $t\in L_\varepsilon$. Поскольку функция, стоящая в левой стороне этого неравенства гармонично вне L_ε, то оно имеет место для любого $t\in\Gamma$, и мы получим

(2) $\ln\max\{|\omega_n|:E\}-\ln\min\{|\omega_n|:\Gamma\}\leqq\ln(n+1)d+n\varepsilon-\min\{\sum_{k=1}^{n}g(t,\,b_{nk}):\Gamma\}.$

Если n достаточно велико, то из (1) следует

$$\Big|\sum_{k=1}^{N}g(z,\,\zeta_k)a_k-u_\nu(z)\Big|<2\varepsilon,\qquad z\in\Gamma.$$

Так как

$$n^{-1}\textstyle\sum_{k=1}^{N}g(z,\,\zeta_k)na_k=n^{-1}\sum_{k=1}^{n}g(z,\,b_{nk}),$$

то предыдущее неравенство можно записать в виде

$$\Big|n^{-1}\sum_{k=1}^{n}g(z,\,b_{nk})-u_\nu(z)\Big|<2\varepsilon,\qquad z\in\Gamma.$$

Отсюда, вспоминая определение Γ, вытекает

$$\min\{n^{-1}\sum_{k=1}^{n}g(z,\,b_{nk}):\Gamma\}\geqq\begin{cases}\mu-\delta-2\varepsilon & \text{при}\quad \mu<\infty\\ M-2\varepsilon & \text{при}\quad \mu=\infty.\end{cases}$$

Из этого неравенства и из (2) получим

$$(3)\qquad\left(\frac{\max\{|\omega_n|:E\}}{\min\{|\omega_n|:\Gamma\}}\right)^{1/n}\leqq\begin{cases}[(n+1)d]^{1/n}\cdot e^{-\mu+\delta+3\varepsilon} & \text{при}\quad \mu<\infty\\ [(n+1)d]^{1/n}\cdot e^{-M+3\varepsilon} & \text{при}\quad \mu=\infty.\end{cases}$$

Пусть теперь $f\in A(D)$ произвольна и $r_n(z)$ — рациональная функция порядка $\leqq n-1$ с полюсами $b_{n1},\ b_{n2},\ldots,\ b_{n,n-1}$, которая интерполирует $f(z)$ в точках $a_{n1},\ a_{n2},\ldots,\ a_{nn}$. Из формулы

$$f(z)-r_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\cdot\frac{\omega_n(z)}{\omega_n(\zeta)}\cdot\frac{z-b_{nn}}{\zeta-b_{nn}}\,d\zeta,\qquad z\in E,$$

и из (3), делая очевидные оценки, вытекает неравенство

$$\overline{\lim}\,\|f-r_n\|_E^{1/n}\leqq\begin{cases}e^{-\mu+\delta+3\varepsilon} & \text{при}\quad \mu<\infty\\ e^{-M+3\varepsilon} & \text{при}\quad \mu=\infty.\end{cases}$$

Так как δ, f, ε и M произвольны, то отсюда следует, что

$$\sup\{\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\|f-r_n\|_E^{1/n}:f\in A(D)\}\leqq e^{-\mu},$$

где при $\mu=\infty$ мы полагаем $e^{-\infty}=0$. Так как полюсы $r_n(z)$ принадлежат P, то теорема доказана.

Замечание 1. Доказанная теорема содержит как частный случай наиболее значительный результат Уолша об аппроксимации аналитических функций рациональными, который состоит в том, что если $\operatorname{cap}(\overline{\mathbb{C}}\setminus D)>0$, то

$$\sup\{\overline{\lim}_{n\to\infty}R_n^{\overline{\mathbb{C}}}(f,\,E)^{1/n}:f\in A(D)\}\leqq e^{-v(E,\,\overline{\mathbb{C}}\setminus D)}\,.$$

Действительно, если положим $P=\overline{\mathbb{C}}\setminus D$, то получим $\mu=v(E, \overline{\mathbb{C}}\setminus D)$, и утверждение вытекает теперь из очевидного неравенства $R_n^{\overline{\mathbb{C}}}(f, E) \leqq R_n^{\overline{\mathbb{C}}\setminus D}(f, E)$.

Замечание 2. Хорошо известно, что если $\operatorname{cap}(\overline{\mathbb{C}}\setminus D)=0$, то $\sup\{\overline{\lim} R_n^{\overline{\mathbb{C}}}(f, E)^{1/n} : f\in A(D)\}=0$. Доказанная теорема уточняет этот результат в том смысле, что приближение с такой же скоростью при $\operatorname{cap}(\overline{\mathbb{C}}\setminus D)=0$ возможна даже если полюсы приближающих функций не свободные, а выбираются из $\overline{\mathbb{C}}\setminus D$.

Замечание 3. Возникает вопрос о точности оценки в теореме 1. Следующее соображение показывает, что она не всегда точна. Пусть $\overline{\mathbb{C}}\setminus D\subset \check{P}=P$ такое, что $V(E, P)<V(E, \overline{\mathbb{C}}\setminus D)<\infty$. Тогда функция $u_\nu(z)$ равна $v(E, P)$ на P, и, значит, $\mu=V(E, P)$. Из замечания 1 вытекает, что

$$\sup\{\overline{\lim}_{n\to\infty}[R_n^{\overline{\mathbb{C}}\setminus D}(f, E)]^{1/n} : f\in A(D)\}\leqq e^{-v(E,\ \overline{\mathbb{C}}\setminus D)}<e^{-\mu}.$$

Так как $\overline{\mathbb{C}}\setminus D\subset P$, то $R_n^P(f, E)\leqq R_n^{\overline{\mathbb{C}}\setminus D}$. Тем самым

$$\sup\{\lim_{n\to\infty} R_n^P(f, E)^{1/n} : f\in A(D)\}<e^{-\mu},$$

т.е. приближение любой функции $f\in A(D)$ функциями из $\mathcal{R}_n^P$ строго лучше, чем $e^{-\mu n}$ по порядку. Таким образом, вопрос об асимптотически точном порядке приближения, т. е. о нахождении величины $\sup\{\overline{\lim} R_n^P(f, E)^{1/n} : f\in A(D)\}$, остается открытым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Уолш. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. Москва. 1961.
2. M. Tsuji. Potential Theory in Modern Function Theory. Tokyo, 1959.

Центр математики и механики
1090 София п. я. 373
Болгария

Получено 20. 6. 1977