КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'77
София. 1980, с. 41—43

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'77
Sofia. 1980, p. 41—43

АППРОКСИМАЦИЯ ПОЛУНЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ В МЕТРИКЕ ХАУСДОРФА

В. М. Веселинов

Резюме. В работе рассмотрены условия сходимости одной последовательности нелинейных положительных операторов к полунепрерывным функциям в метрике Хаусдорфа. Исследован порядок сходимости.

Пусть R_Δ — совокупность действительных функций, заданных и ограниченных на отрезке Δ, и $\overline{f}$ — дополненный график функции $f\in R_\Delta$. Хаусдорфово расстояние (с параметром $\alpha>0$) между функциями $f, g\in R_\Delta$ определяется следующим образом:

$$r_\alpha(f, g)=\max\{\max_{X\in\overline{f}}\min_{Y\in\overline{g}}\varrho(X, Y),\ \max_{X\in\overline{g}}\min_{Y\in\overline{f}}\varrho(X, Y)\},$$

где $\varrho(X, Y)=\varrho(X(x_1, y_1),\ Y(x_2, y_2))=\max\{\alpha^{-1}|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\}$; (см. статью Бл. Сендова [1]).

Обозначим через $\theta_\alpha(f; \delta)$ модуль полунепрерывности (сверху) функции $f\in R_\Delta$ ([2, 3]),

$$\theta_\alpha(f; \delta)=r_\alpha(f, f_\delta),\quad f_\delta(x)=\sup\{f(t):|t-x|\leqq\delta\},\quad \delta>0.$$

Легко проверяется, что $\theta_\alpha(f; \delta)\leqq\omega(f; \delta)$, где $\omega(f; \delta)$ — модуль непрерывности функции $f\in R_\Delta$. Пусть $\overline{R}_\Delta$ — класс функций $f\in R_\Delta$, таких, что $\lim_{\delta\to 0}\theta_\alpha(f; \delta)=0$ и $\overline{R}_\Delta^M$ — класс функций $f\in\overline{R}_\Delta$, таких, что $\sup\{|f(x)|: x\in\Delta\}\leqq M$, $M>0$. Класс $\overline{R}_\Delta$ содержит все ограниченные и полунепрерывные сверху на отрезке Δ функции.

Пусть $\{L_n(f(t); x\}_{n=1}^\infty$ — последовательность линейных положительных операторов, $\overline{R}_\Delta\xrightarrow{L_n}R_\Delta$ и $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность положительных чисел, такой, что $\lim_{n\to\infty}\lambda_n=0$. Рассмотрим следующие операторы $L_n^*(f(t);\ x)=L_n(f_{\lambda_n}(t);\ x)$, где $f_{\lambda_n}(t)=\sup\{f(u):|u-t|\leqq\lambda_n\}$, $n=1, 2,\ldots$ Заметим, что операторы L_n^* положительны, но не являются линейными. Впервые операторы такого типа на случае полиномов Бернштейна рассматривались Л. В. Канторовичем [4].

Теорема 1. *Пусть последовательность* $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ *удовлетворяет условиям* $\lim_{n\to\infty} L_n(1; x)=1$ *равномерно на* Δ, $\sup\{L_n(|t-x|; x): x\in\Delta\}=o(\lambda_n)(n\to\infty)$. *Тогда для любой функции* $\bar{f}\in R_\Delta$ *выполнено* $\lim_{n\to\infty} r_\alpha(f, L_n^*(f))=0$.

Аналогичная теорема справедлива и для последовательности линейных положительных функционалов $\{\Phi_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$, $f\in R_\Delta$. Положим $\Phi_n^*(f)=\Phi_n(f_{\lambda_n})$, $n=1, 2, \ldots$

Теорема 2. *Пусть последовательность* $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *удовлетворяет условиям* $\lim_{n\to\infty}\Phi_n(1)=1$, $\Phi_n(|t-x|; x)=o(\lambda_n)(n\to\infty)$, $x\in\Delta$ — *фиксированное. Тогда, если функция* $f\in R_\Delta$ *и полунепрерывна сверху в точке* x, *то* $\lim_{n\to\infty}\Phi_n^*(f)=f(x)$.

Оценим сверху $r_\alpha(f, L_n^*(f))$ через модуль полунепрерывности функции f. Определим функцию $\varphi_{n,x}(t)$ $(t, x\in\Delta)$ следующим образом:

$$\varphi_{n,x}(t)=\begin{vmatrix} 0 & \text{для} & |t-x|\leqq\lambda_n, \\ 1 & \text{для} & |t-x|>\lambda_n. \end{vmatrix}$$

Теорема 3. *Пусть* $f\in\bar{R}_\Delta^M$. *Тогда для любого натурального* n *выполняется*

$$r_\alpha(f, L_n^*(f))\leqq\theta_\alpha(f; 2\lambda_n)+2M\sup\{L_n(\varphi_{n,x}; x): x\in\Delta\}+M\sup\{|L_n(1; x)-1|: x\in\Delta\}.$$

Применим теоремы 1—3 для некоторых конкретных операторов.

Рассмотрим полином Бернштейна

$$B_n(f; x)=\sum_{\nu=0}^{n} f(\nu/n)\, p_{n\nu}(x),\quad p_{n\nu}(x)=\binom{n}{\nu}x^\nu(1-x)^{n-\nu}.$$

Положим $B_n^*(f; x)=\sum_{\nu=0}^{n} f_{\lambda_n}(\nu/n)p_{n\nu}(x)$, $f_{\lambda_n}(\nu/n)=\sup\{f(u): |u-\nu/n|\leqq\lambda_n\}$, $\lambda_n>0$, $\lim_{n\to\infty}\lambda_n=0$. В качестве следствий из теорем 1 и 2 получаем

Теорема 4. *Если* $\lim_{n\to\infty}(\lambda_n\sqrt{n})=\infty$, *то для любой функции* $f\in\bar{R}_{[0,1]}$ *выполняется* $\lim_{n\to\infty} r_\alpha(f, B_n^*(f))=0$.

Теорема 5. *Пусть* $\lim_{n\to\infty}(\lambda_n\sqrt{n})=\infty$. *Тогда, если* $f\in R_{[0,1]}$ *и является полунепрерывной сверху в точке* $x\in[0, 1]$, *то* $\lim_{n\to\infty} B_n^*(f; x)=f(x)$. (Для $\lambda_n=3n^{-1/3}$ теорема 5 доказана в [4].)

Как показано в [5], условия теорем 1, 2, 4 и 5 нельзя отслабить.

Выберем $\lambda_n=2^{-1}\sqrt{n^{-1}\ln n}$. Тогда из теоремы 3 следует

Теорема 6. *Если* $f\in\bar{R}_{[0,1]}^M$, *то для любого натурального* $n\geqq 2$ *выполняется*

$$r_\alpha(f, B_n^*(f))\leqq\theta_\alpha(f; \sqrt{n^{-1}\ln n})+C_1M/\sqrt{n\ln n}, \tag{1}$$

где C_1 — *абсолютная положительная константа.*

Оценка (1) точна относительно порядка $\sqrt{n^{-1}\ln n}$, и этот порядок нельзя улучшить какого бы ни было λ_n. Притом, если константа 1/2 в выражении $\lambda_n=2^{-1}\sqrt{n^{-1}\ln n}$ заменим меньшей константой, то порядок

$\sqrt{n^{-1}\ln n}$ в теореме 6 уже не сохраняется. В этом смысле константа 1/2 наилучшая.

Доказательства теорем 1—6 можно найти в [5].

Аналогичные результаты получены в периодическом случае для интегралов Валле-Пуссена

$$V_n(f;\,x)=\frac{(2n)!!}{2\pi(2n-1)!!}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\cos^{2n}\frac{t}{2}\,dt.$$

(В этом случае $\lambda_n=\sqrt{2}\sqrt{n^{-1}\ln n}$ и константа $\sqrt{2}$ наилучшая).

Приведем, наконец, один результат, который получен в более ранней работе автора [3]. Обозначим через H_n совокупность алгебраических многочленов степени не выше $n(n=1,\,2,\dots)$.

Теорема 7. *Пусть $f\in\overline{R}_{\Delta}^{M}$. Тогда существует последовательность алгебраических многочленов $\{P_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, такой, что $P_n\in H_n$, $P_n(x)\geqq P_{n+1}(x)$ и*

$$r_{\alpha}(f,\,P_n)\leqq\theta_{\alpha}(f;\,C_2n^{-1}\ln n)+C_3n^{-2}, \tag{2}$$

где константа $C_2>0$ зависит только от $|\Delta|$, а константа $C_3>0$ зависит только от M.

Оценка (2) точна относительно порядка $n^{-1}\ln n$. Теорема 7 обобщает известную теорему Бэра о приближении полунепрерывных функций монотонными последовательностями полиномов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бл. Сендов. Некоторые вопросы теории приближений функций и множеств в хаусдорфовой метрике. *Успехи матем. наук*, **24**, 1969, № 5, 141—178.
2. В. М. Веселинов. О порядке приближения полунепрерывных функций нелинейными положительными операторами. *Доклады БАН*, **24**, 1971, № 6, 705—708.
3. В. М. Веселинов. Об одной теореме Бэра. *Годишник Соф. унив., Матем. фак.*, **65**, 1973, 211—218.
4. Л. В. Канторович. О некоторых разложениях по полиномам в форме С. Н. Бернштейна, II, *Доклады АН СССР*, **21**, 1930, 595—600.
5. В. М. Веселинов. О сходимости одной последовательности нелинейных операторов к полунепрерывным функциям. *Доклады БАН*, **30**, 1977, № 11, 1537—1540.

Центр математики и механики
п. я. 373
1090 София Болгария

Получено 1. 9. 1977.