КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'77
София . 1980, с. 45—48

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'77
Sofia . 1980, p. 45—48

СКОРОСТЬ РАЦИОНАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ НЕКОТОРЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А. А. Гончар

Резюме. **В работе приведены некоторые результаты о скорости рациональной аппроксимации аналитических функций вида $\mu * 1/z$, где μ — конечная положительная мера, носитель которой принадлежит действительной прямой.**

I. Пусть μ — конечная положительная мера, носитель которой $\operatorname{supp}\mu$ принадлежит расширенной действительной прямой* $\overline{\mathbb{R}}$, $(\operatorname{supp}\mu \neq \overline{\mathbb{R}})$, $D_\mu = \overline{\mathbb{C}} \setminus (\operatorname{supp}\mu)$ ($\overline{\mathbb{C}}$ — расширенная комплексная плоскость) и

$$\widehat{\mu}(z) = \mu * \frac{1}{z} = \int \frac{d\mu(x)}{z-x}, \quad z \in D_\mu.$$

Отметим, что функция $\widehat{\mu}$ голоморфна в области D_μ и принимает действительные значения на действительной прямой (точнее, на множестве $D_\mu \cap \overline{\mathbb{R}}$).

Пусть E — произвольный компакт (в $\overline{\mathbb{C}}$), симметричный относительно действительной прямой и принадлежащий D_μ. Положим

$$R_n(\widehat{\mu}, E) = \inf\{\|\widehat{\mu} - r_n\|_E : \{r_n\}\},$$

где $\|.\|_E$ — sup-норма на E и нижняя грань берется в классе всех рациональных функций от z порядка не выше n (с действительными коэффициентами).

Если E и F — непересекающиеся компакты (в $\overline{\mathbb{C}}$), то через $c = c(E, F)$ будем обозначать емкость конденсатора (E, F) (см. [1, 2], где имеются дальнейшие ссылки). Отметим, что если E и F — континуумы, то $e^{1/c} = \varrho$, где $\varrho = \varrho(E, F)$ — риманов модуль двухсвязной компоненты открытого множества $\overline{\mathbb{C}} \setminus (E \cup F)$ (отношение ϱ_2/ϱ_1 радиусов кругового кольца $\varrho_1 < |w| < \varrho_2$, конформно эквивалентного соответствующей двухсвязной области).

* Точки $\pm\infty$ отождествляются.

2. В этих обозначениях справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Имеет место неравенство*

$$\limsup_{n\to\infty} R_n(\widehat{\mu}, E)^{1/n} \leqq \exp(-2/c(E, \operatorname{supp}\mu)). \tag{1}$$

Теорема 2. *Если E и $F=\operatorname{supp}\mu$ — отрезки (расширенной прямой $\overline{\mathbb{R}}$) и $\mu'=d\mu/dx>0$ почти всюду на F (относительно меры Лебега), то**

$$\lim_{n\to\infty} R_n(\widehat{\mu}, E)^{1/n} = \varrho^{-2}(E, F). \tag{2}$$

Из теоремы 2 вытекает

Следствие 1. *Пусть $\Delta=[-1, 1]$, $a>1$ и $f(z)=(a-z)^s$, $s\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, или $\log(a-z)$ (рассматриваются ветви этих функций, принимающие действительные значения на Δ). Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} R_n(f, \Delta)^{1/n} = \exp(-2\pi K/K'), \tag{3}$$

где K — полный эллиптический интеграл первого рода для модуля $k=((a-1)/(a+1))^{1/2}$:

$$K=\int_0^1((1-x^2)(1-k^2x^2))^{-1/2}\,dx,\ k^2=(a-1)/(a+1),$$

K' — соответствующий интеграл для дополнительного модуля, k', $(k')^2=1-k^2=2/(a+1)$.

В правой части формулы (3) фигурирует значение ϱ_a^{-2}, где ϱ_a — риманов модуль двухсвязной области, получающейся из $\mathbb{C}$ удалением отрезка $[-1, 1]$ и луча $[a, \infty)\subset\mathbb{R}_+$.

С помощью теоремы 2 может быть получен и более общий результат. Вейерштрассову естественную область существования аналитической функции f (заданной своим элементом (f, Δ)) будем обозначать через W_f.

Следствие 2. *Пусть $\Delta=[-1, 1]$, $a>1$ и $f:\Delta\to\mathbb{R}$ — аналитическая на Δ функция, такая, что $W_f=\mathbb{C}\setminus\{a\}$; если f не является однозначной аналитической функцией** в $\mathbb{C}\setminus\{a\}$, то имеет место соотношение* (3) *(K и K' имеют тот же смысл, что и в следствии 1).*

Теорема 2 справедлива и в случае, когда E — круг (симметричный относительно действительной прямой). Для случая, когда Δ — единичный круг $|z|\leqq 1$, имеют место и аналоги следствий 1, 2; при этом, для функций, фигурирующих в следствиях 1,2, справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty} R_n(f, \Delta)^{1/n} = \exp(-\pi K'/K),\ k=1/a.$$

3. Из результатов Уолша, относящихся к интерполяции аналитических функций посредством рациональных функций с фиксированными полюсами (см. [3], гл. VIII), в каждом из рассмотренных выше случаев (теоремы 1,2, следствия 1,2) вытекает оценка

$$\limsup_{n\to\infty} R_n^{1/n} = \overline{q} \leqq \delta^{1/2},$$

*Здесь и в дальнейшем запись $\lim_{n\to\infty} A_n=A$ означает, что указанный предел существует и равен A.

** В противном случае, очевидно, $\lim_{n\to\infty} R_n(f, \Delta)^{1/n}=0$.

где δ — величина, стоящая в правой части соответствующего соотношения пункта 2 (см. формулы (1)—(3)). Оценки такого типа справедливы в классе всех голоморфных в D_μ функций* (действительных на действительной прямой) и в классе всех таких функций не могут быть улучшены. Теорема 2 является, по-видимому, первым результатом общего характера, в котором устанавливается существование предела

$$\lim_{n\to\infty} R^{1/n} = q \in (0, 1)$$

и указывается его точное значение для индивидуальных аналитических функций (в частности, фигурирующих в следствии 1). Условие на меру μ в теореме 2 может быть несколько ослаблено (ценой усложнения формулировки); отбросить его (сохраняя равенство (2)), конечно, нельзя. В связи с теоремой 1 отметим, что в терминах области голоморфности D_μ функции $\widehat{\mu}$ (или, что то же, в терминах носителя $\operatorname{supp}\mu$ меры μ) может быть дана лишь оценка величины $\overline{q}$ для функции $\widehat{\mu}$; точное значение зависит не только от $\operatorname{supp}\mu$ (множества „особенностей" $\widehat{\mu}$), но и от природы особенностей функции $\widehat{\mu}$. Как следует из сказанного выше, доставляемая теоремой 1 оценка величины $\overline{q}$ для функций типа $\widehat{\mu}$ существенно лучше, чем оценка, справедливая в классе всех голоморфных в D_μ функций. По-видимому, и равенство

$$\lim_{n\to\infty} R_n(\widehat{\mu}, E) = \exp(-2/c(E, \operatorname{supp}\mu))$$

справедливо в более общей, чем описанная в теореме 2, ситуации: было бы интересно доказать его в случае, когда $F = \operatorname{supp}\mu$ есть объединение конечного числа отрезков действительной прямой, $\mu' > 0$ почти всюду на F и $E \subset D_\mu$ — произвольный компакт, симметричный относительно действительной прямой.**

Аппроксимирующие функции, доставляющие надлежащую скорость приближения в условиях теорем 1, 2, строятся как рациональные функции заданного порядка, интерполирующие функцию $\widehat{\mu}$ в точках компакта E, экстремальных относительно конденсатора (E, F), $F = \operatorname{supp}\mu$. При этом число точек интерполяции выбирается равным числу всех свободных параметров рациональных функций; тем самым, речь идет об интерполяции рациональными функциями со свободными полюсами (соответствующие рациональные функции называются также многоточечными аппроксимациями Паде функции $\widehat{\mu}$). Указанная конструкция обобщает классическую конструкцию подходящих дробей разложения функции $\widehat{\mu}$ в чебышевскую непрерывную дробь (диагональных аппроксимаций Паде разложения функции $\widehat{\mu}$ в степенной ряд в окрестности точки $z = \infty$).

---

* В ситуации следствий 1, 2 роль D_μ играет комплексная плоскость, „разрезанная" по лучу $[a, \infty) \subset \mathbb{R}_+$.

** П р и м е ч а н и е п р и к о р р е к т у р е: В настоящее время это утверждение доказано автором для случая, когда E — объединение конечного числа континуумов.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Гончар. О задачах Е. И. Золотарева, связанных с рациональными функциями, *Матем. сб.*, 78 (120), 1969, 640—654.
2. T. Bagby. On interpolation by rational functions. *Duke Math. J.*, 36, 1969, 95—104.
3. Дж. Л. Уолш. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. Москва, 1961.

Математический институт АН СССР
Москва СССР

Получено 26. 10. 1977.