КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'77
София . 1980, с. 49—56

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'77
Sofia . 1980, p. 49—56

НЕКОТОРЫЕ НОВЫЕ ОБРАТНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ АППРОКСИМАЦИЙ

Е. П. Долженко

***Резюме*.** 1. Теоремы для равномерных приближений посредством рациональных, а также произвольных кусочно-монотонных функций. Если $\Delta=[a, b]\subset(-\infty, \infty)$, то условие $\Sigma(R_n(f, \Delta))^{1/\alpha}<\infty$ при $0<\alpha=\mathrm{const}\leqq 1$ является неулучшаемым достаточным условием для того, чтобы почти для каждой точки $\xi\in\Delta$ было $f(x)-f(\xi)=O(|x-\xi|^\alpha)$, а при $\alpha\geqq 1$ является неулучшаемым достаточным условием для существования почти всюду у функции f дифференциала порядка α. Результат этот справедлив и для приближений в хаусдорфовой метрике. Если $D=\{z:|z|\leqq 1\}$, $1\leqq p<\infty$, $p-1<\alpha<p$, то условие $\Sigma n^{-\alpha+p-1}\{R_n(f, D))^p<\infty$ является неулучшаемым достаточным условием для суммируемости $(1-|z|)^{\alpha-1}|f'(z)|^p$ по площади круга D.

2. Теоремы для приближений рациональными функциями в интегральных метриках.

3. Теоремы для приближений полиномами и их обобщениями в метриках Хаусдорффа. Пусть $E_n(f)$, $H_\alpha E_n(f)$ — наименьшие уклонения действительной 2π-периодической функции f от действительных тригонометрических полиномов порядка не выше n соответственно в равномерной метрике и α-метрике Хаусдорффа на $(-\infty, \infty)$. Если $\liminf nH_\alpha E_n(f)=c(f)<\infty$, то при $c(f)<\pi/\alpha$ функция f однозначна и непрерывна почти всюду, а при $c(f)<\pi/(2\alpha)$ непрерывна всюду. Справедливы неравенства:

$$H_\alpha E_n(f)\leqq E_n(f)\leqq H_\alpha E_n(f)\exp\{\alpha(3+2\sqrt{2})(H_\alpha E_0(f)+H_\alpha E_1(f)+\cdots+H_\alpha E_{n-1}(f))\},$$

$$\omega(1/n, f)\leqq 1/(\alpha n)(\exp\{\alpha(3+2\sqrt{2})(H_\alpha E_0(f)+\cdots+H_\alpha E_{n-1}(f))\}-1)\ (n=1, 2, \ldots;\ \alpha>0).$$

1. Теоремы для равномерных и хаусдорфовых приближений посредством рациональных, а также произвольных кусочно-монотонных функций.

Пусть $\Delta=[a, b]\subset(-\infty, \infty)$, $f(x)$ — ограниченная вещественная функция на Δ. Через $E_n(f, \Delta)$, $R_n(f, \Delta)$ и $M_n(f, \Delta)$ обозначим наименьшие равномерные уклонения функции f, соответственно от полиномов степени не выше n, рациональных функций степени не выше n и кусочно-монотонных функций порядка не выше n, а через $H_\alpha E_n(f, \Delta)$, $H_\alpha R_n(f, \Delta)$ и $H_\alpha M_n(f, \Delta)$ — наименьшие уклонения от тех же классов функций в α-метрике Хаусдорффа ($0<\alpha\leqq\infty$). Очевидно, $H_\alpha V_n(f, \Delta)\leqq H_0 V_n(f, \Delta)=V_n(f,\Delta)$, $H_\alpha V_n(f(x), [a, b])=H_1 V_n(f(\alpha x), [a/\alpha, b/\alpha])$, $0<\alpha<\infty$ ($V=E, R, M$), $H_\alpha M_n(f,\Delta)\leqq H_\alpha E_n(f, \Delta)$, $H_\alpha M_{2n}(f, \Delta)\leqq H_\alpha R_n(f, \Delta)$.

Теорема 1. *Если $\omega(\delta)$ — функция типа модуля непрерывности, $\omega^{-1}(t)$ обратная ей функция (вообще говоря, неоднозначная), $\sum_n\omega^{-1}(M_n(f, \Delta))<\infty$, то почти для каждой точки $\xi\in\Delta$ справедливо соотношение $|f(x)-f(\xi)|\leqq c(\xi)\omega(|x-\xi|)$, где $c(\xi)$ не зависит от x $(0<c(\xi)<\infty)$.*

Теорема 2 [1]. *Пусть при некотором* γ, $0<\gamma\leq 1$, *сходится ряд* $\Sigma(R_n(f))^{1/\gamma}$ *(или хотя бы ряд* $\Sigma(M_n(f))^{1/\gamma}$*). Тогда почти для всех точек* $\xi\in\Delta$ *справедливо соотношение* $|f(x)-f(\xi)|=0(|x-\xi|^\gamma)$ $(x\to\xi)$ *и для каждого* $\varepsilon>0$ *найдется множество* $E(\varepsilon)\subset\Delta$, $\mathrm{mes}(\Delta-E(\varepsilon))<\varepsilon$, *на котором сужение функции* $f(x)$ *удовлетворяет условию Липшица — Гельдера* $\mathrm{Lip}\gamma$ *порядка* γ.

С другой стороны, для любой последовательности $a_0\geq a_1\geq\cdots>0$, $\Sigma a_n^{1/\gamma}=\infty$, *найдется такая непрерывная на* Δ *функция* f, *что* $M_n(f)\leq R_n(f)\leq a_n$ $(n=0, 1, \ldots)$, *в то время как ни на каком множестве* $E\subset\Delta$, $\mathrm{mes}\,E>0$, *функция* f *не удовлетворяет условию* $\mathrm{Lip}\,\gamma$*; при этом условие* $|f(x)-f(\xi)|=0(|x-\xi|^\gamma)$ *не удовлетворяется для этой функции ни в одной точке* $\xi\in\Delta$.

В предположении $R_n(f)\leq cn^{-\gamma-\delta}$ $(\delta, c=\mathrm{const}>0)$ справедливость заключения первой части теоремы 2 была установлена А. А. Гончаром [2].

Обратим внимание на следующее. Неулучшаемое условие на скорость убывания наименьших равномерных уклонений $E_n(f,\Delta)$ функции f от алгебраических полиномов степени не выше n, обеспечивающее справедливость соотношения $|f(x)-f(\xi)|=O(|x-\xi|^\gamma)$ при $x\to\xi$ и $\xi\in(a, b)$, а также принадлежность f к классу $\mathrm{Lip}\,\gamma$ на любом отрезке $[a_1, b_1]\subset(a, b)$, — это условие $E_n=0(n^{-\gamma})$. Имелись попытки показать, что аналогичное условие $R_n(f)=O(n^{-\gamma})$ является достаточным (и тогда, очевидно, неулучшаемым достаточным) условием для справедливости заключения первой части теоремы 2.

Теорема 2 показывает, что в случае приближения рациональными функциями окончательное достаточное условие для этого имеет совершенно новую форму и, в частности, что условие $R_n(f)=O(n^{-\gamma})$ не является достаточным.

Определение. Пусть $0<\beta<\infty$. Скажем, что функция $f(x)$ удовлетворяет в точке $\xi\in\Delta$ локальному условию Гельдера порядка β, если существует такой полином $P(x)$ степени не выше $[\beta]$, что $|f(\xi+h)-P(h)|=O(|h|^\beta)$ при $h\to 0$. Из теоремы Марцинкевича и Зигмунда следует, что если $\beta=k$ натуральное число, то из выполнения функцией $f(x)$ локального условия Гельдера порядка k в точках ξ множества $E\subset\Delta$ следует, что почти в каждой точке $\xi\in E$ функция $f(x)$ имеет полный дифференциал порядка k (или, что то же, k-ую производную Пеано), и для любого $\varepsilon>0$ найдется совершенное множество $E(\varepsilon)\subset E$, $\mathrm{mes}(E\setminus E(\varepsilon))<\varepsilon$, на котором сужение $f(x)$ k раз непрерывно дифференцируемо. Если же $\beta=k+\gamma$, где k — целое неотрицательное, $0<\gamma\leq 1$, то из выполнения функцией f локального условия Гельдера порядка β в точках множества E следует существование почти в каждой точке $\xi\in E$ у функции $f(x)$ дифференциала порядка k и существование для любого $\varepsilon>0$ такого совершенного множества $E(\varepsilon)\subset E$, что $\mathrm{mes}(E\setminus E(\varepsilon))<\varepsilon$, на $E(\varepsilon)$ сужение $f_{E(\varepsilon)}(x)$ функции f имеет k непрерывных производных, и $f^{(k)}_{E(\varepsilon)}$ удовлетворяет условию Липшица — Гельдера порядка γ.

Теорема 3. *Пусть* $1\leq\beta<\infty$. *Если* $\Sigma(H_a R_n(f,\Delta))^{1/\beta}<\infty$ *при некотором* $a\geq 0$ *(в частности, если* $\Sigma(R_n(f,\Delta))^{1/\beta}<\infty$*), то почти в каждой точке* $\xi\in\Delta$ $f(x)$ *удовлетворяет локальному условию Гельдера порядка* β, *и в частности, для любого* $\varepsilon>0$ *существует совершенное множество* $E(\varepsilon)\subset E$, $\mathrm{mes}(E\setminus E(\varepsilon))<\varepsilon$, *на котором сужение* $f_{E(\varepsilon)}(x)$ *функции* f *непре-*

рывно дифференцируемо $[\beta]$ *раз, и* $f_{E(\varepsilon)}^{([\beta])}$ *удовлетворяет на* $E(\varepsilon)$ *условию Липшица—Гельдера* $\mathrm{Lip}\,\gamma$ *порядка* $\gamma=\beta-[\beta]$.

С другой стороны, для любой последовательности $a_0\leqq a_1\leqq\cdots>0$, $\Sigma a_n^{1/\beta}=\infty$ *существует непрерывная на* Δ *функция* $f(x)$, *для которой* $H_\alpha R_n(f,\Delta)\leqq R_n(f,\Delta)\leqq a_n$ $(n=0,1,\ldots)$, *в то время как ни на каком множестве* $E\subset\Delta$, $\mathrm{mes}\,E>0$, *у сужения* $f_E(x)$ *функции* f *на множестве* E *не имеется производной порядка* $[\beta]$, *удовлетворяющей условию Липшица—Гельдера порядка* $\beta-[\beta]$. *При этом ни в одной точке* $\xi\in\Delta$ $f(x)$ *не удовлетворяет локальному условию Гельдера порядка* β.

Следствие. Если $\Sigma\sqrt[k]{H_\alpha R_n(f,\Delta)}<\infty$ при $\alpha\geqq 0$ и некотором натуральном k (в частности, если $\Sigma\sqrt[k]{R_n(f,\Delta)}<\infty$), то почти в каждой точке $\xi\in\Delta$ функция f имеет дифференциал порядка k. Теорема неулучшаема.

Напомним в связи с этим, что неулучшаемым достаточным условием для существования у $f(x)$ k-ой производной (и дифференциала k-ого порядка) во внутренних точках отрезка Δ является условие $\Sigma n^{k-1}E_n(f,\Delta)<\infty$, а неулучшаемым достаточным условием для выполнения функцией f локального условия Гельдера порядка β является условие $E_n(f,\Delta)=O(n^{-\beta})$ при нецелом β, и условие $\Sigma n^{\beta-1}E_n(f,\Delta)<\infty$ при целом $\beta=1,2,3\ldots$. Напомним также, что никакая скорость убывания к нулю величины $R_n(f,\Delta)$ не обеспечивает в какой-либо наперед заданной точке $\xi\in\Delta$ дифференцируемости функции f или какой-либо наперед заданной скорости убывания к нулю величины $f(x)-f(\xi)$ при $x\to\xi$. Так же никакая скорость убывания величин $H_\alpha R_n(f,\Delta)>0$ не обеспечивает в наперед заданной точке $f\in\Delta$ непрерывности функции f. Историю вопроса см. в [2].

Определение. Величина $\Omega(\delta,\xi,f)=\sup\{|f(x')-f(x'')|:x',x''\in[\xi-\delta,\xi+\delta]\cap\Delta\}$ называется локальным модулем колебания функции $f(x)$ $(x\in\Delta)$ в точке ξ. Средним модулем колебания функции $f(x)\,(x\in\Delta)$ в метрике L_p назовем величину

$$\Omega_p(\delta,f)=\Big(\frac{1}{|\Delta|}\int_\Delta(\Omega(\delta,x,f))^p dx\Big)^{1/p}.$$

$$(0<p\leqq\infty,\ \Omega_\infty(\delta,f)=\max\{\Omega(\delta,x,f):x\in\Delta\},\ |\Delta|=\mathrm{mes}\,\Delta).$$

Эта величина обладает всеми свойствами обычного модуля непрерывности $\omega(\delta,f)$ функции f ([6] §0) и, кроме того, при $p=1$ является выпуклой кверху функцией переменного $\delta\geqq 0$. С обычным модулем непрерывности $\omega(\delta,f)$ и средним модулем непрерывности $\omega_p(\delta,f)$ в метрике L_p

$$\omega_p(\delta,f)=\sup_{0<h<\delta}\Big\{\Big(\frac{1}{|\Delta|}\int_{\Delta\cap\Delta_h}|f(x+h)-f(x)|^p dx\Big)^{1/p}\Big\},\ \Delta_h=[a-h,b-h]$$

средний модуль колебания связан очевидными неравенствами:

$$\omega_p(\delta,f)\leqq\Omega_p(\delta,f)\leqq\omega(2\delta,f).$$

Теорема 4 [6]. *Для любой ограниченной функции* $f(x)\,(x\in\Delta)$ *и любых* $\alpha>0$, $n\geqq 0$ *и* $\delta\geqq\alpha H_\alpha M_n(f,\Delta)$ *имеем:*

$$\Omega_1(\delta,f)\leqq\frac{2}{\alpha}\Big(\frac{2\alpha\Omega(f)}{|\Delta|}n+1\Big)\delta,$$

где $\Omega(f)$ — *полное колебание функции* f $(\Omega(f)=\sup\{|f(x')-f(x'')|\})$. Следствием ее является первая часть следующего утверждения.

Теорема 5 [6]. *Если* $H_\alpha M_n(f,\Delta)=O(n^{-\gamma})$ *при некоторых* $\alpha>0$ *и* $\gamma>1$, *то при каждом* $p\geqq 1$ *будет*

$$\omega_p(\delta,f)=O(\delta^{\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{1}{p}})$$

Теорема точна: для любых $\alpha>0$, $\gamma>1$ *существует функция* $f(x)(x\in\Delta)$, *для которой* $H_\alpha M_n(f,\Delta)=O(n^{-\gamma})$, $\omega_p(\delta,f)\geqq A\delta^{(1-1/\gamma)(1/p)}$ *при любом* $p\geqq 1$, *где* $A>0$ *и не зависит от* δ, $0\leqq\delta\leqq|\Delta|$.

Приведем два результата, касающихся влияния скорости приближения аналитической функции $f(z)$ рациональными функциями на свойства производной функции $f(z)$.

Пусть D — единичный круг $|z|<1$ на плоскости комплексной переменной z, Γ — его граница; $f(z)$ — аналитическая в D функция, $R_n(f)$ — ее наименьшее равномерное уклонение на D от рациональных функций степени не выше n, $E_n^{(2)}(f)$ — ее наименьшее уклонение от алгебраических полиномов переменной z степени $\leqq n$ в метрике Харди $H_2(D)$. При $p\geqq 1$ и $\alpha>0$ скажем, что $f\in B_{p,\alpha}$, если

$$\|f\|_{p,\alpha}=\left(\iint_D(1-|z|)^{\alpha-1}|f'(z)|^p dx\,dy\right)^{1/p}<\infty.$$

Теорема 6 [4]. *Пусть* $f(z)$ *аналитична в* D *и непрерывна на* $\bar{D}=D\cup\Gamma$. *Тогда:*

1) *если* $\alpha>p$, *то* $f'\in B_{p,\alpha}$;

2) *если* $p-1<\alpha<p$ *и* $a_1\geqq a_2\geqq\cdots\geqq 0$, *то условие* $R_n(f)=O(a_n)\,(n\to\infty)$ *с необходимостью влечет принадлежность* $f'\in B_{p,\alpha}$ *тогда и только тогда, когда* $\Sigma n^{-\alpha+p-1}a_n^p<\infty$;

3) *при* $\alpha<p-1$ *никакая скорость убывания величин* $R_n(f)>0$ (*при* $n\to\infty$) *не обеспечивает принадлежности* $f'\in B_{p,\alpha}$.

Теорема 7 [4]. *Для любой функции* $f(z)$, *аналитической в* D, *имеем:*

$$C_1(\alpha)\sum_{n=1}^{\infty}n^{1-\alpha}(E_{n-1}^{(2)}(f))^2\leqq\|f'\|_{2,\alpha}^2\leqq C_2(\alpha)\sum_{n=1}^{\infty}n^{1-\alpha}(E_{n-1}^{(2)}(f))^2,$$

где $C_1(\alpha)$, $C_2(\alpha)$ — *положительные величины, зависящие только от* $\alpha>0$

Следствие. *Пусть* $0\leqq\beta<1$. *Если* $n^{-\beta}(R_n(f))^2<\infty$ *или* $n^{-\beta}(E_n^{(2)}(f))^2<\infty$ *то найдется такое множество* $E(f)\subset\Gamma$ *нулевой* β-*емкости* $\mathrm{cup}_\beta\,E(f)=0$ *что для любой точки* $\zeta\in\Gamma\setminus E(f)$ *образ любой полухорды круга* D *с концом в* ζ *имеет конечную длину на римановой сфере, в частности, функция* f *имеет в каждой точке* $\zeta\in\Gamma\setminus E(f)$ *угловой предел.*

2. Теоремы для приближений полиномами в хаусдорфовой метрике В случае действительной 2π-периодической функции $f(x)$ (не обязательно однозначной) через $E_n(f)$ и $H_\alpha E_n(f)$ обозначим наименьшее уклонение функции f на числовой прямой от действительных тригонометрических полиномов степени не выше n соответственно в равномерной метрике и α-метрике Хаусдорффа. Очевидно, что $H_\alpha E_n(f)\leqq E_n(f)$ при всех n. Заметим, что в этом случае $H_\alpha E_n(f)$ уже, как правило, не выражается просто через $H_1 E_n(\varphi)$, где функция φ получится из f линейной заменой независимой переменной — как это было для $H_\alpha E_n(f,\Delta)$.

Как известно (Бл. Сендов [7]), если функция f непрерывна, и $\omega(\delta)$ — ее модуль непрерывности, то

$$H_\alpha E_n(f) \leqq E_n(f) \leqq H_\alpha E_n(f) + \omega(\alpha H_\alpha E_n(f), f).$$

Следующее неравенство позволяет оценить $E_n(f)$ через $H_\alpha E_n(f)$, не зная о функции f ничего, кроме ее наименьших уклонений от тригонометрических полиномов в некоторой α-метрике Хаусдорффа.

Теорема 8. *Всегда*

$$H_\alpha E_n(f) \leqq E_n(f) \leqq H_\alpha E_n(f) \exp\{\alpha(3+2\sqrt{2})(H_\alpha E_0(f) + H_\alpha E_1(f) + \cdots + H_\alpha E_{n-1}(f))\} \; (n=1, 2, \ldots); \; E_0(f) = H_\alpha E_0(f).$$

Следствие 1. Если $\Sigma_{n=0}^{\infty} H_\alpha E_n(f) = \sigma < \infty$, то

$$H_\alpha E_n(f) \leqq E_n(f) \leqq e^{6\alpha\sigma} H_\alpha E_n(f), \text{ то есть } E_n(f) \asymp H_\alpha E_n(f).$$

Следствие 2. Если $\Sigma H_\alpha E_n(f) < \infty$ при некотором $\alpha \geqq 0$, то $\Sigma H_\beta E_n(f) < \infty$ при любом $\beta \geqq 0$ в том числе $\Sigma E_n(f) < \infty$.

Следствие 3. Если $\Sigma H_\alpha E_n(f) < \infty$, то $f(x)$ непрерывно дифференцируема. С другой стороны, как показал С. Н. Бернштейн, если $a_n \searrow 0$, $\Sigma a_n = \infty$, то существует не непрерывно дифференцируемая функция f, для которой $a_n \geqq E_n(f) (\geqq H_\alpha E_n(f))$ при всех $n = 0, 1, \ldots$

Следствие 4. Пусть некоторое условие A на скорость убывания (порядок малости) величин $a_n = E_n(f)$ обеспечивает наличие у функции f некоторого свойства *Б*. Тогда то же условие A, наложенное на величины $a_n = H_\alpha E_n(f)$ $(\alpha = \text{const} \geqq 0)$ при дополнительном условии $\Sigma a_n < \infty$, также обеспечивает наличие у f свойства *Б*.

Аналогичная теорема справедлива и для непериодического случая.

Теорема 8а. *Для любой ограниченной функции* $f(x)$ $(x \in \Delta)$ *и любого* $\alpha \geqq 0$ *имеем:*

$$H_\alpha E_n(f, \Delta) \leqq E_n(f, \Delta) \leqq H_\alpha E_n(f, \Delta)$$

$$\times \exp\left\{\frac{2\alpha}{|\Delta|}(3+2\sqrt{2})(8H_\alpha E_0(f, \Delta) + 1H_\alpha E_1(f, \Delta) + 2H_\alpha E_2(f, \Delta) + \cdots + (n-1)H_\alpha E_{n-1}(f, \Delta))\right\} \; (n=1, 2, \ldots), \; E_0(f, \Delta) = H_\alpha E_0(f, \Delta).$$

Следствие. Если $\Sigma n H_\alpha E_n(f, \Delta) < \infty$, то $E_n(f, \Delta) \asymp H_\alpha E_n(f, \Delta)$, а функция f непрерывно дифференцируемая на Δ. (Последнее утверждение неулучшаемо.)

Модуль непрерывности $\omega(\Delta, f)$ функции f оценивается через $H_\alpha E_n(f)$ и $H_\alpha E_n(f, \Delta)$ следующим образом:

Теорема 9. *При* $\alpha \geqq 0$ и $n = 1, 2, \ldots$ *имеем*

$$\omega\left(\frac{1}{n}, f\right) \leqq \frac{1}{\alpha n}\left(\exp\{\alpha(3+2\sqrt{2})(H_\alpha E_0(f) + H_\alpha E_1(f) + \cdots + H_\alpha E_{n-1}(f))\} - 1\right)$$

($f(x)$ — *2π-периодическая, a priori не обязательно однозначная*),

$$\omega\left(\frac{|\Delta|}{2n}, f\right) \leqq \frac{|\Delta|}{2\alpha n}\left(\exp\left\{\frac{2\alpha}{|\Delta|}(3+2\sqrt{2})(8H_\alpha E_0(f, \Delta) + 1H_\alpha E_1(f, \Delta) + [\sqrt{n}] H_\alpha E_{[\sqrt{n}]}(f, \Delta)\right\} - 1\right)$$

($f(x)$ $(x \in \Delta)$ *a priori не обязательно непрерывная или однозначная*).

Теорема 10. *Пусть* $\underline{\lim}\, nH_\alpha E_n(f)=c$. *Если* $c<\pi/\alpha$, *то* $f(x)$ *непрерывна почти всюду; если* $c<\pi/2\alpha$, *то* $f(x)$ *непрерывна всюду; если* $c<1/\alpha$, *то* $f(x)$ *удовлетворяет условию Липшица—Гёльдера некоторого порядка* $\gamma(c)<1$, *причём* $\gamma(c)\to 1$ *при* $c\to 0$.

Теорема 11. *Если* $\underline{\lim}\, n^2 H_\alpha E_n(f, \Delta)<(|\Delta|/2\alpha)(\pi^2/2)$, *то* $f(x)$ *непрерывна на* Δ.

Теорема 12. *Пусть* $0<\gamma<1$, x *корень уравнения* $1+x+\log x=0$. *Тогда, если* $\overline{\lim}\, nH_\alpha E_n(f)\leqq\frac{1}{\alpha}(x\gamma)^\gamma(1-\gamma)$, *то* $f\in \mathrm{Lip}\,\gamma$. *Если* $\overline{\lim}\, n^2 H_\alpha E_n(f, \Delta)\leqq(|\Delta|/2\alpha)(x\gamma)^\gamma(1-\gamma)$, *то* $f\in \mathrm{Lip}\,\gamma$ *на* Δ.

Теоремы 8—12 содержатся в работах [8, 9]. В [9] указано, что непрерывность 2π-периодической функции $f(x)$ следует из условия $\underline{\lim}\, nH_\alpha E_n(f)<\pi/3\alpha$ (ср. с теоремой 10). Это условие было ослаблено до условия $\underline{\lim}\, nH_\alpha E_n(f)<\pi/2\alpha$ независимо Е. П. Долженко и Е. А. Севастьяновым [8] и П. Петрушевым и С. Ташевым [10]. В [10] также установлена невозможность дальнейшего ослабления последнего условия и независимо доказана теорема 11. В [11] Б. Сендовым и А. Поповым показано, что, если $H_1 E_n(f)=O(n^{-p-\gamma})$ (p — натуральное, $0<\gamma<1$), то существует $f^{(p)}\in \mathrm{Lip}\,\gamma$ (сравните со следствием 4 из теоремы 8).

3. Теоремы для приближений рациональными функциями в интегральных метриках.

Определение. Скажем, что функция $f(x)\in L_p(E)$ ($0<p\leqq\infty$, $E\subset R^k$, $k\geqq 1$) имеет в точке $\xi\in E$ локальный дифференциал порядка $\lambda>0$ в p-среднем, если существует полином $p(x)=P(x;\xi,f)$ степени не выше λ по совокупности переменных $x_1,\ldots,x_k$ ($(x_1,\ldots,x_k)=x$), для которого $\sup\{|f(x)-P(x;\xi,f)|: x\in E\cap Q(\varrho,\xi)\}=o(\varrho^\lambda)$ — при $p=\infty$, и

$$\Big(\varrho^{-k}\int\limits_{Q(p,\,\xi)\cap E}|f(x)-P(x;\xi,f)|^p dx\Big)^{1/p}=o(\varrho^\lambda) \text{ — при } p<\infty,$$

где $Q(\varrho,\xi)=\{x=(x_1,\ldots,x_k): |x_i-\xi_i|\leqq\varrho/2,\ i=1,\ldots,k\}$ — куб с центром в $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_k)$ и длиной ребра $\varrho\to 0$. $R_n(f,p,E)$ — наименьшее уклонение f от рациональных функций степени $\leqq n$ в метрике $L_p(E)$.

Теорема 13 [3]. *Если* $R_n(f,p,E)=O(n^{-\lambda})$ ($\lambda>0$), *в частности, если* $\Sigma n^{\lambda-1}R_n(f,p,E)<\infty$, *то при любом положительном* $\lambda_1<\lambda$ *у функции* $f(x)$ *существует локальный дифференциал в* p*-среднем порядка* λ_1 *в каждой точке* $\xi\in E$, *кроме разве лишь точек некоторого множества* $E(\lambda_1)$ *хаусдорфовой размерности не выше* $k-1+(p\lambda_1+1)/(p\lambda+1)$ (*при* $p=\infty$ *дробь* $(p\lambda_1+1)/(p\lambda+1)$ *считается равной* λ_1/λ).

При этом для любых $\beta<k-1+(p\lambda_1+1)/(p\lambda+1)$ *и* $\varepsilon>0$ *существует такая последовательность кубов* $\{k_j\}$ *с ребрами* d_j, $\Sigma d_j^\beta<\varepsilon$, *что сужение* $f(x)$ *на множество* $E\setminus Uk_j$ *непрерывно дифференцируемо* $[\lambda_1]$ *раз и его дифференциальные коэффициенты порядка* $[\lambda_1]$ *удовлетворяют условию* $\mathrm{Lip}(\lambda_1-[\lambda_1])$ ($Uk_j\supset E(\lambda_1)$).

Следующее утверждение показывает, что этот результат в определенном смысле не может быть усилен.

Теорема 13а [3]. *Для любого натурального* k, *любого* p, $0<p\leqq\infty$ *и любых чисел* $\lambda>\lambda_1>0$, $a\geqq 0$ *существует ограниченная измеримая функция* $f(x)$, *определенная на* k*-мерном единичном кубе* $D^k=[0,1]^k$, *для которой:* (1) $R_n(f,p,D^k)=O(n^{-\lambda}\ln^{-a} n)$, (2) *множество* $E(\lambda_1)$ *тех* *точек* $x \in D^k$, *в каждой из которых у* $f(x)$ *не существует локального дифференциала порядка* λ_1 *в метрике* L_p, *имеет метрическую размерность* $k-1+(p\lambda_1+1)/(p\lambda+1)$; *в частности, размерность* $k-1+\lambda_1/\lambda$ *при* $p=\infty$ (*т. е. в случае равномерных приближений*), *причем* $\operatorname{mes}^{k-1+\lambda_1/\lambda} E(\lambda_1)=1$ *при* $a=0$.

Теорема 13 обобщает результаты А. А. Гончара, Е. П. Долженко и Е. А. Севастьянова. Аналогов теоремы 13а не было. По поводу истории вопроса см. [3, с. 193—194].

Определение: Скажем, что функция $f \in L_p(E)$ $(0<p\leqq\infty$, $E\subset R^k$ $k\geqq 1)$ на множестве E имеет в p-среднем глобальный дифференциал порядка $\lambda>0$, если существует такой полином $P(h;\xi,f)$ степени не выше λ по совокупности переменных $h_1, \ldots, h_k$ $((h_1, \ldots, h_k)=h)$, коэффициенты которого суть суммируемые в p-ой степени функции от $\xi \in E$, что

$$\Big(\int\limits_{E\cap E_h} |f(\xi+h)-P(h;\xi,f)|^p d\xi\Big)^{1/p}=o(\|h\|^\lambda),$$

где E_h — параллельный перенос множества E на вектор — h, $\|h\| = \sqrt{h_1^2+\cdots+h_k^2}\to 0$.

Теорема 14 [3]. *Если* E*—ограниченное измеримое множество из*,

$$R^k\,(k\geqq 1),\ \lambda>0 \text{ и } R_n(f,p,E)=O(n^{-\lambda}),$$

в частности, если $\Sigma n^{\lambda-1}R_n(f,p,E)<\infty$, *то при любых положительных* $\lambda_1<\lambda$, $q<p/(p\lambda_1+1)$ *у функции* $f(x)$ *существует глобальный дифференциал в* q*-среднем порядка* λ_1.

Обратим внимание, что приближение функции в L_p с достаточно высокой скоростью влечет существование у функции f глобального дифференциала уже не в метрике L_p, а в более слабой метрике, именно, в метрике L_q с $q<p/(p\lambda+1)$. Можно показать, что при каждом $q>p/(p\lambda+1)$ уже никакая скорость убывания величин $R_n(f,p,E)$ не обеспечивает существования у функции f глобального дифференциала порядка λ в q-среднем. Случай $k=1$ рассмотрен в работе [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. П. Долженко. О дифференцируемости функций, достаточно хорошо приближаемых в хаусдорфовой или равномерной метрике. *Доклады АН СССР*, **230**, 1976, № 4, 765—768.
2. А. А. Гончар. Скорость приближения рациональными дробями и свойства функций Труды Международного конгресса математиков. Москва, 1968, 329—356.
3. Е. П. Долженко, В. И. Данченко. Дифференцируемость функций нескольких переменных в зависимости от скорости их приближения рациональными функциями. *Известия АН СССР, сер. матем.*, **41**, 1977, № 1, 182—202.
4. Е. П. Долженко. О зависимости граничных свойств аналитической функции от скорости ее приближения рациональными функциями. *Матем. сб.*, **103**, 1977, № 1, 131—142.
5. Е. П. Долженко, Е. А. Севастьянов. Приближения рациональными функциями в интегральных метриках и дифференцируемость в среднем. *Матем. заметки*, **16**, 1974, № 5, 801—811.
6. Е. П. Долженко, Е. А. Севастьянов. О приближениях функций в хаусдорфовой метрике посредством кусочно-монотонных (в частности, рациональных) функций. *Матем. сб.*, **101**, 1976, 508—541.

7. Бл. Сендов. Некоторые вопросы теории приближений функций и множеств в хаусдорфовой метрике. *Успехи мат. наук*, **24**, 1969, № 5, 141—178.
8. Е. П. Долженко, Е. А. Севастьянов. О зависимости свойств функций от скорости их приближения полиномами. *Известия АН СССР, сер. матем.*, **42**, 1978, № 2, 270—304.
9. Е. П. Долженко, Е. А. Севастьянов. О приближениях функций в хаусдорфовой метрике. *Доклады АН СССР*, **226**, 1976, № 4, 768—770.
10. П. Петрушев, С. П. Ташев. Некоторые обратные теоремы в метрике Хаусдорфа. *Доклады БАН*, **29**, 1976, № 12, 1721—1724.
11. Бл. Сендов, В. А. Попов. Аналог теоремы С. М. Никольского для приближения функций алгебраическими полиномами в хаусдорфовой метрике. Труды Международной конференции по конструктивной теории функций, Варна, 1970, 95—105.

Московский государственный университет
Москва СССР

Получено 15.12.1977.