КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'77
София . 1980, с. 57—64

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'77
Sofia . 1980, p. 57—64

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ВЕРХНИХ ГРАНЕЙ ФУНКЦИОНАЛОВ И НАИЛУЧШЕЕ ОДНОСТОРОННЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

В. Г. Доронин, А. А. Лигун

Величину

$$\widehat{E}_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{M})_1 = \sup_{f \in \mathfrak{M}} \inf_{\{g \in \mathfrak{N},\ g(x) \leqq f(x)\}} \|f-g\|_1$$

называют наилучшим односторонним приближением множества $\mathfrak{M}$ множеством $\mathfrak{N}$ в метрике пространства L_1.

В докладе, в частности, приведены точные значения для следующих величин:

$$\widehat{E}_{T_{2n-1}}(W^r L_p)_1 = \widehat{E}_{s_{2n,\,\mu}}(W^r L_p)_1 \ (n,\ r=1,\ 2, \ldots;\ 1 \leqq p \leqq \infty;\ \mu \geqq r),$$

$$\widehat{E}_{T_{2n-1}}(W^{2\nu} H_\omega)_1 = \widehat{E}_{s_{2n,\,\mu}}(W^{2\nu} H_\omega)_1 \ (n,\ \nu=1,\ 2, \ldots;\ \mu \geqq 2\nu;$$

$\omega(t)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности).

$$\widehat{E}_{T_{2n-1}}(W^r_\alpha L_1)_1 \ (r>0;\ -\infty<\alpha<\infty;\ n=1,\ 2, \ldots),$$

$$\widehat{E}_{T_{2n-1}}(\Gamma^\varrho_1)_1,\ \widehat{E}_{T_{2n-1}}(A^h_1)_1 \ (0<\varrho<1;\ 0<h<\infty;\ n=1,\ 2, \ldots),$$

где T_{2n-1} — множество всех тригонометрических полиномов порядка $\leqq n-1$, $S_{2n,\,\mu}$ — множество всех сплайнов дефекта I порядка μ с $2n$ равноотстоящими узлами.

1. Пусть L_p $(1 \leqq p < \infty)$ — пространство измеримых 2π-периодических функций f таких, что $\int_0^{2\pi} |f(x)|^p\,dx < \infty$ с нормой

$$\|f\|_p = \{\int_0^{2\pi} |f(x)|^p\,dx\}^{1/p};$$

L_∞ (или, что то же C) — пространство непрерывных 2π-периодических функций $f(x)$ с нормой $\|f\|_\infty = \max\{|f(x)|: x\}$.

Введём в рассмотрение следующие функциональные классы:

$L^{(r)}_\infty$ $(r=0,\ 1, 2, \ldots,\ L^{(0)}_\infty = L_\infty)$ — множество всех функций $f \in L_\infty$, у которых r-я производная $f^{(r)} \in L_\infty$;

$NW_\alpha^r L_p \, (1 \leq p \leq \infty,\ r > 0,\ -\infty < \alpha < \infty)$ — класс функций f, представимых в виде

$$(1) \qquad f(x) = a_0/2 + \pi^{-1} \int_0^{2\pi} K_{r,\alpha}(x-u)\, \varphi(u)\, du,$$

где $\varphi(u)$ — 2π-периодическая, в среднем равная нулю на периоде функция такая, что $\varphi(u) \in L_p$ и $\|\varphi\|_p \leq N$, а

$$(2) \qquad K_{r,\alpha}(u) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r} \cos(ku - 2^{-1}\alpha\pi).$$

При $\alpha = r = 1, 2, \ldots$ классы $NW_\alpha^r L_p$ будем обозначать через $NW^r L_p$. Ясно, что $NW^r L_p$ $(r = 1, 2, \ldots, 1 \leq p \leq \infty;\ 1W^r L_p = W^r L_p)$ — множество всех 2π-периодических функций f, у которых $(r-1)$-ая произвоводная $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна, а $\|f^{(r)}\|_p \leq N$.

Пусть ещё $W^0 L_p = \{f \in L_p : \|f\|_p \leq 1\}$;

$\Gamma_1^\varrho \, (0 < \varrho < 1)$ — множество всех функций $f(x)$, допускающих представление $f(x) = \pi^{-1} \int_0^{2\pi} \chi_\varrho(x-t)\, z(t)\, dt$, где $\chi_\varrho(x) = 1/2 + \Sigma_{k=1}^{\infty} \varrho^k \cos kx$—ядро Пуассона, а $z \in L_1$ и $\|z\|_1 \leq 1$;

$A_1^h \, (0 < h < \infty)$ — множество всех функций f, представимых в виде, $f(x) = \pi^{-1} \int_0^{2\pi} \Psi_h(x-t)\, z(t)\, dt$, где $\Psi_h(x) = 1/2 + \Sigma_{k=1}^{\infty} \cos kx/\operatorname{ch} kh$ и $z \in L_1$, $\|z\|_1 \leq 1$.

Обозначим через $W^r H_\omega (r = 0, 1, \ldots,\ W^0 H_w = H_\omega)$ — множество всех функций $f \in L_\infty^{(r)}$ таких, что для любых x' и x'' $|f^{(r)}(x') - f^{(r)}(x'')| \leq \omega(|x' - x''|)$, где $\omega(t)$ — заданный модуль непрерывности. При $\omega(t) = t^\alpha$ вместо $W^r H_\omega$ будем писать $W^r H^\alpha$.

Рассмотрим систему узлов $x_k = k\pi n^{-1} (k = 0, 1, \ldots, 2n)$. Функцию $s_{2n,\mu} (\mu = 0, 1, \ldots, n = 1, 2, \ldots)$ периода 2π назовём сплайн-функцией порядка μ дефекта 1, если на каждом из интервалов $(x_{\nu-1}, x_\nu)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, 2n)$ она является алгебраическим многочленом степени $\leq \mu$, и для $\mu = 1, 2, \ldots$ функция $s_{2n,\mu}^{(\mu-1)} \in L_\infty$. Обозначим через $S_{2n,\mu}$ множество всех сплайнов $s_{2n,\mu}$, а через T_{2n-1} — множество тригонометрических полиномов порядка $\leq n-1$. Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — некоторые множества, состоящие из ограниченных функций. Величину

$$E_{\mathfrak{N}}(f)_p = \inf\{\|f - g\|_p : g \in \mathfrak{N}\}$$

называют наилучшим приближением функции $f \in \mathfrak{M}$ множеством $\mathfrak{N}$ в метрике пространства L_p, а величину

$$E_{\mathfrak{N}}^{+}(f)_p = \inf\{\|f - g\|_p : g \in \mathfrak{N},\ g(x) \leq f(x)\}$$

— наилучшим односторонним (снизу) приближением функции $f \in \mathfrak{M}$ множеством $\mathfrak{N}$ в метрике пространства L_p.

Будем рассматривать задачи отыскания величин

$$(\mathrm{I}) \qquad E_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{M})_p = \sup\{E_{\mathfrak{N}}(f)_p : f \in \mathfrak{M}\}$$

и

$$(\mathrm{II}) \qquad E_{\mathfrak{N}}^{+}(\mathfrak{M})_p = \sup\{E_{\mathfrak{N}}^{+}(f)_p : f \in \mathfrak{M}\}.$$

В настоящее время для ряда важных случаев задача I решена, то есть в этих случаях найдено точное значение величин $E_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{M})_p$. В частности, найдены следующие величины; $E_{T_{2n-1}}(W_\alpha^r L_\infty)_\infty$ [1—5], $E_{T_{2n-1}}(W^r L_1)_1$ [6], $E_{T_{2n-1}}(\Gamma_p^\varrho)_p\,(p=1,\ \infty)$ [6—8], $E_{T_{2n-1}}(A_p^h)_p\,(p=1,\ \infty)$ [6], [9], $E_{T_{2n-1}}(W^r L_p)_1$ [10], $E_{T_{2n-1}}(W^r H_\omega)_p\,(p=1,\infty)$ [11, с. 204, 208], $E_{S_{2n,r}}(W^r H_\omega)_\infty$ [11, с. 294], $E_{W^{r+1}L_\infty}(W^r H_\omega)_\infty$ [11, с. 223], $E_{S_{2n,r}}(W^r H_\omega)_1$ [12], $E_{W^r L_1}(W^k L_p)_1\,(k<r)$ [13], $E_{S_{2n,\mu}}(W^r L_p)_1\,(\mu\geqq r-1)$ [11, с. 294; 13]. Поэтому желание точно решить задачу II кажется естественным прежде всего в перечисленных выше случаях, когда имеется точное решение задачи I. Первый успешный шаг в этом направлении был сделан Т. Ганелиусом [14], который доказал, что

$$E^+_{T_{2n-1}}(W^r L_1)_1 = n^{-r} H_{r,r,\infty}\ (n,\ r=1,\ 2,\ldots), \tag{1}$$

где $H_{r,\alpha,p}=2\min\{\|K_{r,\alpha}-\lambda\|_p:\lambda\}\ (1\leqq p\leqq\infty)$. Идя по этому пути далее, мы, в настоящем докладе, приведём точное решение задачи II в других названных случаях.

Прежде всего отметим, что если класс $\mathfrak{N}$ содержит константы, то $E^+_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{M})_\infty = 2E_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{M})_\infty$, а так как все рассматриваемые нами классы $\mathfrak{N}$ содержат константы, то задача II является не тривиальной (при условии, что соответствующая задача I решена) лишь для $1\leqq p<\infty$.

При доказательстве приведенных ниже утверждений мы используем некоторые факты и методы, возникшие при решении соответствующей задачи I. Однако решение задачи II осложняется тем, что в отличие от задачи I (где, как правило, экстремалями и функциями сравнения являются r-е периодические интегралы от функции $\operatorname{sgn}\sin nx$ или аналогичной ей симметричной функцией, построенной из „кусков" модуля непрерывности $\omega(t)$) здесь приходится иметь дело с несимметричными экстремалями и функциями сравнения. В частности, в этой роли выступают функции $n^{-r}K_{r,r}(nx)$.

Перейдём к точному изложению полученных результатов.

2. Приведём сначала результаты, которые являются непосредственным продолжением исследований Т. Ганелиуса [14].

Теорема 1 [22, 27]. *Для всех n, $r=1, 2,\ldots$, $\mu\geqq r-1$ справедливы равенства*

$$E^+_{S_{2n,\mu}}(W^r L_1)_1 = n^{-r} H_{r,r,\infty}. \tag{2}$$

Теорема 2 [15, 16]. *При всех $r>0, -\infty<\alpha<\infty$ и $n=1,2,\ldots$ имеют место равенства*

$$E^+_{T_{2n-1}}(W_\alpha^r L_1)_1 = \left|\begin{array}{l}\infty\ (r<1, -\infty<\alpha<\infty \text{ или } r=1, \alpha\neq r+2\mu, \mu=0,\pm1,\pm2,\ldots)\\ n^{-r}H_{r,\alpha,\infty}\ (r=1, \alpha=r+2\mu,\ \mu=0,\pm1,\pm2,\ldots \text{ или}\\ \qquad\qquad\qquad\qquad r>1, -\infty<\alpha<\infty)\end{array}\right.$$

и $E^+_{T_{2n-1}}(W_\alpha^r L_\infty)_1 = 8n^{-r}\,M_{r,\alpha}$ *где* $M_{r,\alpha}=\sin\alpha\pi/2\,\Sigma_{j=0}^\infty(2j+1)^{-(r+1)}$ *при* $0<r\leqq1$, $r\leqq\alpha\leqq2-r$, *а при* $0<r\leqq1$, $\alpha\in[0,\ 2]\setminus[r, 2-r]$ *и при* $r>1, -\infty<\alpha<\infty$

$$M_{r,\alpha}=\left|\sum_{j=0}^{\infty}(2j+1)^{-r-1}\sin\left[(2j+1)\beta\pi-\frac{\alpha\pi}{2}\right]\right|.$$

Здесь $\beta\in(0, 1]$ является корнем уравнения $\sum_{j=0}^{\infty}(2j+1)^{-r}\cos[(2j+1)\beta\pi-\alpha\pi/2]=0.$

Теорема 3. *Пусть* $0<\varrho<1$, $0<h<\infty$ *и* $n=1, 2,\ldots$ *Тогда справедливы равенства*

$$E^{+}_{T_{2n-1}}(\Gamma_1^{\varrho})_1=2\varrho^n(1-\varrho^n)^{-1},\quad E^{+}_{T_{2n-1}}(A_1^h)_1=2\sum_{k=1}^{\infty}(\operatorname{ch} nkh)^{-1}.$$

3. Дальнейшие результаты получены с помощью метода промежуточного приближения. Этот метод разработан в фундаментальных работах [1, 11 и 17] и сводится к тому, что для получения оценки сверху приближения класса $\mathfrak{M}$ подпространством M_n сначала рассматривается задача приближения класса $\mathfrak{M}$ некоторым классом $\mathfrak{N}$ с лучшими, чем у $\mathfrak{M}$ дифференциальными свойствами, а затем используется оценка приближения класса $\mathfrak{N}$ подпространством M_n. Позже выяснилось, что задача приближения класса классом имеет и самостоятельный интерес. Это становится ясным, например, в связи с изучением наилучших методов приближения неограниченных операторов ограниченными (наилучшие формулы численного дифференцирования и др.), в связи с исследованием неравенств Колмогоровского типа и др. (см., например, [17, 18, 13] и др.).

Теорема 4. *Пусть* $r=2, 3, 4,\ldots, k=1, 2,\ldots, r-1$. *Тогда*

$$(3)\qquad E^{+}_{NW^rL_1}(W^kL_{p'})_1\leq\sup\{b^kH_{k,k,p}-Nb^rH_{r,r,\infty}\mid b>0\}$$

$$=\frac{(r-k)H_{k,k,p}}{r}\left(\frac{kH_{k,k,p}}{rNH_{r,r,\infty}}\right)^{k/(r-k)}(1/p+1/p'=1).$$

Пусть $\nu=1, 2, 3,\ldots$, $k=2, 3, 4,\ldots$ и $\omega(t)$ — *выпуклый вверх модуль непрерывности. Тогда*

$$(4)\qquad E^{+}_{NW^{2\nu+k}L_1}(W^{2\nu}H_\omega)_1\leq\sup\Big\{\int_0^{\pi b}2b^{2\nu}\Phi(K_{2\nu+1,\,2\nu+1},\ t/b)\,\omega'(t)\,dt$$

$$-Nb^{2\nu+k}H_{2\nu+k,\,2\nu+k,\,\infty}\mid b>0\Big\},$$

где $\Phi(f, x)$ — Σ-*перестановка функции* $f(x)$ [11, с. 144].

Кроме того [19], *для любого модуля непрерывности* $\omega(t)$

$$E^{+}_{NW^1L_\infty}(H_\omega)_p\leq\{2\pi\sup_{0<b\leq\gamma}\frac{1}{b}\int_0^b\{\omega(f, t)-Nt\}^p\,dt\}^{1/p},$$

где $\gamma=\min\{2\pi, \inf\{t:t\in Q\}\}$, *а* $Q=\{t>0:\omega(t)=Nt\}$.

Доказательство соотношений (13) и (14) базируется на следующих утверждениях, при доказательстве которых мы существенно пользуемся методом, основанным на сравнении перестановок, развитым Н. П. Корнейчуком [11].

Пусть $W^rC_+=\{f\colon f\in L_\infty^{(r)},\ \max_x f^{(r)}(x)\leq 1\}$.

Лемма 1 [20]. *Пусть* $g(x)\in W^{r+1}C_+$ $(r=1, 2,\ldots)$ *и* $\min_\lambda\|g-\lambda\|_\infty\leq b^{r+1}H_{r+1,\,r+1,\infty}$.

Тогда для всех $x \in [0, 2\pi]$ *справедливы неравенства*

$$\int_0^x \overline{\{[g'(t)]_\pm\}}\, dt \leqq 2b^r \int_0^x \overline{\{[(-1)^r K_{r,r}(t)]_\pm\}}\, dt,$$

где $\overline{f}$ — *невозрастающая на* $[0, 2\pi]$ *функция, равноизмеримая с функцией* $|f|$.

Кроме того [24], *если* $r = 2\nu$ *и функция* g *имеет нули на периоде, то в каждой точке* $x \in (0, \pi b)$, *где* $\Phi'(g, x)$ *существует (то есть почти всюду на* $(0, \pi b)$) *выполняется, по крайней мере, одно из неравенств*

$$|\Phi'(g, x)| \leqq 2b^{2\nu} |\Phi'(K_{2\nu+1,\, 2\nu+1}, x/b)|, \tag{5}$$

$$\Phi(g, x) \leqq 2b^{2\nu}\, \Phi(K_{2\nu+1, 2\nu+1}, x/b). \tag{6}$$

Лемма 2. *Пусть* $1 \leqq p \leqq \infty$, $f(x) \in L_\infty^{(r)}$ $(r = 2, 3, \ldots)$, $f(x) \neq \mathrm{const}$ *и* $k = 1, 2, \ldots, r-1$. *Тогда имеют место точные на* $L_\infty^{(r)}$ *неравенства*

$$\{\|f^{(r-k)}\|_p / 2\, \|K_{k,k}\|_p \|f_+^{(r)}\|_\infty\}^{1/k} \leqq \{\|f\|_\infty / H_{r,r,\infty}\, \|f_+^{(r)}\|_\infty\}^{1/r}, \tag{7}$$

$$\{\inf_\lambda \|f^{(r-k)} - \lambda\|_p / H_{k,k,p}\, \|f_+^{(r)}\|_\infty\}^{1/k} \leqq \{\|f\|_\infty / H_{r,r,\infty}\, \|f_+^{(r)}\|_\infty\}^{1/r},$$

где $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$.

Неравенство (7) содржится в работе [20], а неравенства (5) — (6) при $b = n^{-1}$ в работе [21].

Пусть $\Psi(f)$ — произвольная полунорма, заданная на пространстве ограниченных периодических функций. Положим

$$m_0 = \sup\,\{\Psi(f) : f \geqq 0,\ \int_0^{2\pi} f(t)\, dt \leqq 1\} \text{ и } l_\mu(p) = \sup\{\Psi(f) : f \in W^\mu L_p\}.$$

С помощью промежуточного приближения, из теоремы 4 получаем следующее утверждение:

Теорема 5. *Для* $r = 2, 3, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots, r-1$ и $1 \leqq p \leqq \infty$, $1/p + 1/p' = 1$ *имеет место неравенство*

$\{e_k(p')/m_0 H_{k,k,p}\}^{1/k} \leqq \{l_r(1)/m_0 H_{r,r,\infty}\}^{1/r}$, а для $\nu = 1, 2, \ldots$, $k = 2, 3, \ldots$ и $0 < \alpha \leqq 1$ — неравенство

$\sup\,\{\Psi(f) : f \in W^{2\nu} H^\alpha\} \leqq m_0 B_{\alpha,\nu}\, (l_{2\nu+k}(1)/m_0 H_{2\nu+k,\, 2\nu+k,\, \infty})^{(2\nu+\alpha)/(2\nu+k)}$,

где $B_{\alpha,\nu} = 2\alpha \int_0^\pi \Phi(K_{2\nu+1,\, 2\nu+1}, t)\, t^{\alpha-1}\, dt$.

Кроме того [19], для произвольного выпуклого вверх модуля непрерывности $\omega(t)$ справедливо неравенство

$$\sup\,\{\Psi(f) : f \in H_\omega\} \leqq \frac{2\pi^2 m_0^2}{l_1(1)} \int_0^{\frac{l_1(1)}{\pi m_0}} \omega(t)\, dt.$$

4. Полагая $\Psi(f)$ равным $E^+_{T_{2n-1}}(f)_1$ и $E^+_{S_{2n,\mu}}(f)_1$ в теореме 5 и, учитывая, что в этом случае $m_0 = 1$, а в силу равенств (1) и (2) $l_r(1) = n^{-r} H_{r,r,\infty}$, немедленно получаем оценки сверху для величин $E^+_{T_{2n-1}}(W^r L_{p'})_1$,

$E^{+}_{S_{2n,\mu}}(W^r L_{p'})_1,\ E^{+}_{T_{2n-1}}(W^{2\nu} H_a)_1,\ E^{+}_{S_{2n,\mu}}(W^{2\nu} H^a)_1, E^{+}_{T_{2n-1}}(H_\omega)_1\ E^{+}_{S_{2n,\mu}}(H_\omega)_1.$

Оценки сверху для величин $E^{+}_{T_{2n-1}}(W^{2\nu} H_\omega)_1$, $E^{+}_{S_{2n,\mu}}(W^{2\nu} H_\omega)_1$ можно получить [21] с помощью непосредственного применения теорем двойственности. Оценки снизу, совпадающие с оценками сверху, находятся без особого труда (см. [15, 21 и 23]). Таким образом мы приходим к утверждению:

Теорема 6 [19—24]. *Справедливы равенства*

$$E^{+}_{T_{2n-1}}(W^r L_p)_1 = E^{+}_{S_{2n,\mu}}(W^r L_p)_1 = n^{-r} H_{r,r,p'}\ (\mu \geqq r,\ n,\ r=1,\ 2, \ldots,\ 1 \leqq p \leqq \infty\quad 1/p+1/p'=1),$$

$$E^{+}_{T_{2n-1}}(W^{2\nu} H_\omega)_1 = E^{+}_{S_{2n,\mu}}(W^{2\nu} H_\omega)_1 = 2n^{-2\nu} \int\limits_0^{\pi/n} \Phi(K_{2\nu+1,\,2\nu+1}, nt)\, \omega'(t)\, dt$$

$$(n,\ \nu=1,\ 2, \ldots,\ \mu \geqq 2\nu,\ \omega(t) \text{ — выпукла вверх}),$$

$$E^{+}_{T_{2n-1}}(H_\omega)_1 = E^{+}_{S_{2n,\mu}}(H_\omega)_1 = 2n \int\limits_0^{\pi/n} \omega(t)\, dt$$

$$(n=1,\ 2, \ldots,\ \mu \geqq 0,\ \omega(t) \text{ — выпукла вверх}).$$

5. Приведём соотношения, которые являются аналогами неравенств Сунь Юн-Шена [4] и Л. В. Тайкова [10].

Теорема 7. *Пусть* $n,\ r=1,\ 2, \ldots,\ \mu \geqq r$ *и* $1 \leqq p \leqq \infty$. *Тогда* [20]

$$\sup\ \{E^{+}_{T_{2n-1}}(f)_1 / E_{T_{2n-1}}(f^{(r)})_p : f \in L^{(r)}_p,\ f \notin T_{2n-1}\} = 2\,\|K_{r,r}\|_{p'}$$

и [27]

$$\sup\{E^{+}_{S_{2n,\mu}}(f)_1 / E_{S_{2n,\mu}}(f^{(r)})_p : f \in L^{(r)}_p, f \notin S_{2n,\mu}\} = 2\,\|K_{r,r}\|_{p'}.$$

6. Пусть

$$\chi^{+}_{n,r} = \sup\ \{n^r E^{+}_{T_{2n-1}}(f)_1 / \omega(f^{(r)},\ \tfrac{\pi}{n}) : f \in L^{(r)}_\infty,\ f \not\equiv \mathrm{const}\ \}$$

и

$$\chi^{+}_{n,r,\mu} = \sup\{n^r E^{+}_{S_{2n,\mu}}(f)_1 / \omega(f^{(r)},\ \tfrac{\pi}{n}) : f \in L^{(r)}_\infty,\ f \not\equiv \mathrm{const}\}.$$

Ясно, что $\chi^{+}_{n,r}$ и $\chi^{+}_{n,r,\mu}$ есть точные константы в теореме Джексона для одностороннего приближения дифференцируемых периодических функций тригонометрическими полиномами и сплайнами порядка μ, соответственно.

Теорема 8. *Пусть* $n=1,\ 2,\ 3, \ldots$. *Тогда при* $r=1,\ 3,\ 5, \ldots$ [25] $\chi^{+}_{n,r} = \|K_{r,r}\|_1$ *и при* $r=0,\ 1,\ 2, \ldots$ [26] $\chi^{+}_{n,r,r} = \|K_{r,r}\|_1$.

7. Пусть $C[-1,\ 1]$ — пространство непрерывных на отрезке $[-1,\ 1]$ функций $f(x)$ с нормой

$$\|f\| = \max\{|f(x)| : -1 \leqq x \leqq 1\};$$

$C^{(r)}[-1,\ 1]\ (r=0, 1,\ 2, \ldots)$ — множество всех функций $f(x)$, у которых $f^{(r)} \in C\,[-1,\ 1]\ (f^{(0)}(x) = f(x))$.

Модуль непрерывности $\omega(f,\ t)$ функции $f \in C[-1,\ 1]$ определим, как обычно, равенством

$$\omega(f,\ t) = \sup\ \{|f(x') - f(x'')| : |x' - x''| \leqq t,\ x',\ x'' \in [-1,\ 1]\}.$$

Следующие утверждения являются аналогами соответствующих результатов работ [28—30] применительно к односторонним приближениям.

Теорема 9. *Пусть* $r=1, 2, \ldots$. *Тогда для любой функции* $f \in C^{(r)}[-1, 1]$ *можно указать последовательность алгебраических многочленов* $P^{+}_{n,r}(f, x)$ *степени* n *таких, что при* $n \to \infty$ *равномерно относительно* $x \in [-1, 1]$ $0 \leqq f(x) - P^{+}_{n-1,r}(f, x) \leqq 2 \ K_r n^{-r} (\sqrt{1-x^2})^r \| f^{(r)} \| + o(n^{-r})$, *где* K_r — *константы Фавара. При этом, если* $r=1$, *то в этом соотношении вместо* $o(n^{-1})$ *можно писать* $O(n^{-2} \ln n)$.

Теорема 10. *Пусть* $r=0, 1, 3, 5, \ldots$. *Тогда для любой функции* $f \in C^{(r)}[-1, 1]$ *существует последовательность алгебраических многочленов* $Q^{+}_{n,r}(f, x)$ *степени* n *таких, что при* $n \to \infty$ *равномерно относительно* $x \in [-1, 1]$ $0 \leqq f(x) - Q^{+}_{n-1,r}(f, x) \leqq n^{-r} \theta_r \ K_r (\sqrt{1-x^2})^r \omega(f^{(r)}, \pi n^{-1} \sqrt{1-x^2}) + o(n^{-r} \omega(f^{(r)}, n^{-1}))$,
где $\theta_r = 1$ *при* $r=1, 3, 5, \ldots$, $1 \leqq \theta_0 \leqq 2$. *Причём, если функция* $\omega(f, x)$ *выпукла вверх, то* $\theta_0 = 1$.

Теорема 11. *Пусть* $\theta(x)$ *четная неубывающая на* $[0, 1]$ *функция, удовлетворяющая условию* $\theta(x) \geqq a > 0$ $(x \in [-1, 1])$. *Обозначим через* $W'_{\theta}C$ *множество всех абсолютно непрерывных на отрезке* $[-1, 1]$ *функций* f *таких, что почти всюду на* $[-1, 1]$ $|f'(x)| \leqq \theta(x)$. *Тогда для любой функции* $f \in C[-1, 1]$ *существует функция* $\varphi_f \in W'_{\theta}C$ *такая, что*

$$0 \leqq f(x) - \varphi_f(x) \leqq \max \{ \omega(f, |x| - \delta) - \int_{\delta}^{|x|} \theta(u)\, du : -1 \leqq \delta \leqq |x| \}.$$

Порядки поточечных односторонних приближений в случаях, перечисленных в этом пункте, получены В. И. Ивановым в работе [31].

В заключение мы с удовольствием выражаем сердечную благодарность Н. П. Корнейчуку за постоянную поддержку в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. I. Favard. Sur les meilleurs procédés d'approximation de certaines classes de fonctions par des polynomes trigonométriques. *Bull. Sci. Math.*, **61**, 1937, 209—224, 243—256.
2. Н. И. Ахиезер, М. Г. Крейн. О наилучшем приближении тригонометрическими суммами дифференцируемых периодических функций. *Доклады АН СССР*, **15**, 1937, 107—112.
3. В. К. Дзядык. О наилучшем приближении на классах функций, определяемых ядрами, являющимися интегралами от абсолютно монотонных функций. *Известия АН СССР, сер. матем.*, **23**, 1969, 933—950.
4. Сунь Юн-Шен. О наилучшем приближении периодических дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами. *Известия АН СССР, сер. матем.*, **25**, 1961, 143—153.
5. В. К. Дзядык. О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых интегралами от абсолютно монотонных ядер. *Матем. заметки*, **16**, 1974, № 5, 691—701.
6. С. М. Никольский. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем. *Известия АН СССР, сер. матем.*, **10**, 1946, 207—256.
7. М. Г. Крейн. К теории наилучшего приближения периодических функций. *Доклады АН СССР*, **18**, 1938, 245—251.
8. B. Nagy. Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen. *Ber. Acad. Wiss., Leipzig*, **90**, 1938, 103—134.

9. Н. И. Ахиезер. О наилучшем приближении аналитических функций. *Доклады АН СССР*, **18**, 1938, 241—245.
10. Л. В. Тайков. О приближении в среднем некоторых классов периодических функций. *Труды матем. ин-та АН СССР*, **88**, 1967, 61—70.
11. Н. П. Корнейчук. Экстремальные задачи теории приближения, Москва, 1976.
12. Н. П. Корнейчук. Наилучшее приближение сплайнами на классах периодических функций в метрике L. *Матем. заметки*, **20**, 1976, № 5, 655—664.
13. A. A. Ligun. Inequalities for upper bounds of functionals. *Analysis Math.*, **2**, 1976, 11—40.
14. T. Ganelius. On one-sided approximation by trigonometric polynomials. *Math. Scand.*, **4**, 1956, 247—258.
15. В. Г. Доронин. Оценка наилучшего одностороннего приближения для одного класса дифференцируемых периодических функций. Научные записки, Сб. работ аспирантов ДГУ. Днепропетровск, 1970, 72—87.
16. В. Г. Доронин, А. А. Лигун. О наилучшем одностороннем приближении классов $W^r\alpha V$ $(r>-1)$ тригонометрическими полиномами в метрике L_1. *Матем. заметки*, **22**, 1977, № 3, 357—370.
17. С. Б. Стечкин. Наилучшее приближение линейных операторов. *Матем. заметки*, 1, 1967, № 2, 137—148.
18. В. В. Арестов. Приближение операторов, инвариантных относительно сдвига. *Труды Матем. ин-та АН СССР*, **138**, 1975, 43—70.
19. В. Г. Доронин, А. А. Лигун. О наилучшем одностороннем приближении одного класса функций другим. *Матем. заметки*, 14, 1973, № 5, 627—632.
20. А. А. Лигун. Классы W^rC+ и наилучшее одностороннее приближение функций тригонометрическими многочленами. Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям. Днепропетровск, 1976, 34—38.
21. В. Г. Доронин, А. А. Лигун. О наилучшем одностороннем приближении классов $W^rH\omega$. *Матем. заметки*, 21, 1977, № 3, 313—327.
22. В. Г. Доронин, А. А. Лигун. Верхние грани наилучших односторонних приближений сплайнами классов $W^r\ L_1$. *Матем. заметки*, 19, 1976, № 1, 11—17.
23. В. Г. Доронин, А. А. Лигун. Верхние грани наилучших односторонних приближений классов $W^r\ L\psi$ в метрике L. *Матем. заметки*, 22, 1977, № 2, 257—268.
24. В. Г. Доронин, А. А. Лигун. Наилучшее односторонее приближение некоторых классов дифференцируемых периодических функций. *Доклады АН СССР*, **230**, 1976, 19—21.
25. В. Г. Доронин, А. А. Лигун. Об одностороннем приближении некоторых классов дифференцируемых функций. Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям. Днепропетровск, 1973, 36—38.
26. В. Г. Доронин, А. А. Лигун. О точных значениях наилучших односторонних приближений сплайнами. *Матем. заметки*, **20**, 1976, № 3, 417—424.
27. В. Г. Доронин, А. А. Лигун. О точных значениях наилучших односторонних приближений сплайнами. Вопросы теории приближений функций и её приложений. Киев, 1976, 97—109.
28. С. М. Никольский. О наилучшем приближении многочленами функций, удовлетворяющих условию Липшица. *Известия АН СССР, сер. матем.*, **10**, 1946, № 4 295—318.
29. А. Ф. Тиман. Теория приближения функций действительного переменного. Москва, 1960.
30. Н. П. Корнейчук, А. И. Половина. О приближении непрерывных функций алгебраическими многочленами. *Укр. матем. ж.*, **24**, 1972, № 3, 328—340.
31. В. И. Иванов. Об односторонних приближениях функций в метриках L_p. *Доклады АН СССР*, **232**, 1977, № 4, 760—762.

Днепропетровский гос. унив.
320070 Днепропетровск СССР
Днепродзержинский индустриальный институт
322618 Днепродзержинск СССР

Получено 14. 7. 1977.