КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'77
*София . 1980, с. 73—75*

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'77
*Sofia . 1980, p. 73—75*

# СХОДИМОСТЬ ТРЕТЬИХ ПРОИЗВОДНЫХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ КУБИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ

**Н. Л. Зматраков**

*Резюме*. В работе исследуются вопросы сходимости и расходимости третьих производных интерполяционных кубических сплайнов. Приводятся достаточные, а также необходимые условия на выбор узлов сетки для того, чтобы была сходимость производных на классах $C^k (k\geqq 3)$ в метриках $L_p (1\leqq p<\infty)$ и $C$.

Обозначим $C=L_\infty$ и введем норму

$$\|f\|_p=\begin{cases}\max\{|f(x)|: a\leqq x\leqq b\},\ p=\infty,\\ \left(\int\limits_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p},\ 1\leqq p<\infty.\end{cases}$$

Через $W_p^k (k\geqq 3)$ обозначим класс функций, у которых $(k-1)$ -я производная абсолютно непрерывна, а $k$ -я принадлежит $L_p$.

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана сетка $\Delta_n$: $a=x_0^{(n)}<x_1^{(n)}<\cdots<x_{N_n}^{(n)}=b$. Положим $h_i^{(n)}=x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)}$, $\delta_n=\max\limits_i h_i^{(n)}$. Через $S_n$ обозначим кубический сплайн, интерполирующий функцию $f$ в узлах сетки $\Delta_n$, т. е. $S_n(x_i^{(n)})=f(x_i^{(n)})\,(i=0, 1, \ldots, N_n;\ N_n\geqq 3)$.

Так как $S_n$ на каждом отрезке $[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$ является кубическим полиномом и $S_n\in C^2[a, b]$, то $S_n'''$ на $[a, b]$ будет кусочно-постоянной функцией с разрывами в точках $x_i^{(n)}$. Положим $S_n'''(x_i^{(n)})=S_n'''(x)$ для $x\in(x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)})$ (в случае непериодического сплайна $S_n'''(x_0^{(n)})=S_n'''(x_1^{(n)})$). На концах отрезка $[a, b]$ сплайн $S_n$ удовлетворяет краевым условиям

$$2h_1^{(n)}r_1+\mu_n h_2^{(n)}r_2=d_1^{(n)},\quad \lambda_n h_{N_n-1}^{(n)}r_{N_n-1}+2h_{N_n}^{(n)}r_{N_n}=d_{N_n}^{(n)}$$

(1)
$$r_i=S_n'''(x_i^{(n)})-f'''(x_i^{(n)})\quad (i=1, 2, \ldots, N_n).$$

Если $f$ является $(b-a)$ -периодической функцией $f\in W_p^3(-\infty, \infty)$, то $S_n$ удовлетворяет условиям

(2)
$$S_n'(a)=S_n'(b),\quad S_n''(a)=S_n''(b),$$

а сетка $\Delta_n$ продолжается по периодичности на всю прямую.

Г. Биркгоф и К. де Бор [1] получили сходимость третьих производных кубических сплайнов для функций с абсолютно непрерывной третьей производной, при ограничениях на сетки

(3) $$\lim_{n\to\infty}\delta_n=0,\ \max_i \delta_n/h_i^{(n)}\leqq K<\infty,$$

где $K$ — абсолютная постоянная. Дж. Алберг, Э. Нильсон, Дж. Уолш [2] при ограничениях (3) доказали сходимость для класса $C^3$. А. Мейер и А. Шарма [3] рассмотрели следующее ограничение на последовательность сеток

(4) $$\lim_{n\to\infty}\delta_n=0,\ \max\{h_i^{(n)}/h_j^{(n)}:|i-j|=1\}\leqq\varrho,\quad 1\leqq\varrho<\infty$$

и доказали для периодических кубических сплайнов, что если $\varrho<2$, то для любой $f\in C^3$ $\|f'''-S_n'''\|_\infty\to 0$ при $n\to\infty$. Далее, Ю. С. Завьялов [4] получил сходимость при $\varrho<\bar{\varrho}\approx 2{,}55$, где $\bar{\varrho}$ — корень некоторого уравнения.

В нашей работе получен окончательный результат, а именно, доказана сходимость третьих производных при $\varrho<\varrho^*=(3+\sqrt{5})/2\approx 2{,}618$ и возможность расходимости при $\varrho\geqq\varrho^*$ для функций из класса $C^3$. Кроме того, показано, что увеличение гладкости функции не дает увеличения $\varrho^*$. Здесь также дан положительный ответ на вопрос З. Цесельского о сходимости третьих производных в метрике $L_1$, если лишь только $\delta_n\to 0$ при $n\to\infty$.

Рассмотрим вопросы сходимости третьих производных при следующих ограничениях на сетки:

$$\lim_{n\to\infty}\delta_n=0,\ \max\{h_i^{(n)}/h_j^{(n)}:|i-j|=s\}\leqq\varrho<\infty,\ \lim_{n\to\infty}\max\{h_i^{(n)}\omega(h_i^{(n)})/h_j^{(n)}:|i-j|\leqq s/2\}=0,$$

(5)

где $s$ — фиксированное натуральное число, $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности $f'''\in C$.

Будем предполагать, что краевые условия (1) удовлетворяют ограничениям

(6) $$\inf_n \min\{4-\mu_n,\ 4-\lambda_n\}>0,\ \sup_n \max\{|\mu_n|,\ |\lambda_n|\}<\infty,$$

$$|d_1^{(n)}|/\min\{h_i^{(n)}:1\leqq i\leqq s\}+|d_{N_n}^{(n)}|/\min\{h_i^{(n)}:N_n-s\leqq i\leqq N_n\}\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Определим функцию $\varrho(s,p)$, где $s$ — натуральное число, $1<p\leqq\infty$, следующим образом: $\varrho(1,p)>1$ является корнем уравнения $2\varrho^{1-1/p}(1+\varrho)=1+\varrho^{3-2/p}$, $\varrho(1,\infty)=(3+\sqrt{5})/2$, $\varrho(s,p)=2^{s/(1-1/p)}$ $(s=2,3,\ldots)$. Пусть кубический сплайн $S_n$ интерполирует функцию $f$ в узлах сетки $\Delta_n$ и удовлетворяет краевым условиям (1) с ограничениями (6) или, если $f$ есть $(b-a)$ -периодическая функция, условиям (2). Тогда справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Если функция $f\in C^3$ и последовательность сеток $\Delta_n$ удовлетворяют условиям* (5) *при $\varrho<\varrho(s,\infty)$, то* $\lim_{n\to\infty}\|f'''-S_n'''\|_\infty=0$.

Теорема 2. *Пусть $1<p\leqq\infty$. Существует последовательность сеток $\Delta_n$, удовлетворяющая* (5) *при* $\varrho\geqq(\varrho(1,p))^s$, *и функция $f\in C^3$ такие, что*

(7) $$\lim_{n\to\infty}\|f'''-S_n'''\|_p=\infty,\ 1<p<\infty$$

*и для некоторой точки* $c\in[a, b]$

(8) $$f'''(c)-S_n'''(c)\to\infty \text{ при } n\to\infty.$$

*Если же* $\varrho>(\varrho(1, p))^s$, *то существует функция* $f\in C^k(k=3, 4, 5, \ldots)$, *для которой выполняется* (7) *и* (8).

Теорема 3. *Для любой функции* $f\in W_1^3$ *имеем* $\lim_{n\to\infty}\|f'''-S_n'''\|_1=0$, *как только* $\delta_n\to 0$ *при* $n\to\infty$.

Отметим, что если последовательность сеток удовлетворяет условию (3), то при $s$, выбранном из условия $K<2^s$, она удовлетворяет условию теоремы 1.

## ЛИТЕРАТУРА


1. G. Birkhoff, C. de Boor. Error bounds for spline interpolation. *J. Math. Mech.*, 13, 1964, 827—835.
2. Дж. Алберг, Э. Нильсон, Дж. Уолш. Теория сплайнов и ее приложения. Москва, 1972.
3. A. Sharma, A. Meir. Degree of approximation of spline interpolation. *J. Math. Mech.*, 15, 1966, 759—767.
4. Ю. С. Завьялов. Интерполирование кубическими многозвенниками. Вычислительные системы. Новосибирск, 1970, вып. 38, с. 23—73.



*Институт математики*
*и механики УНЦ АН СССР*
*Свердловск СССР*



*Получено 14. 9. 1977.*