КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'77
София . 1980, с. 77—80

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'77
Sofia . 1980, p. 77—80

О СХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ТОЧКАХ РАЗРЫВА КОЭФФИЦИЕНТОВ

В. А. Ильин

Рассматривается оператор Штурма — Лиувилля, заданный на интервале (a, b) при условии, что коэффициенты его имеют разрыв первого рода в некоторой точке x_0 интервала (a, b), т. е. оператор имеющий вид

$$(1)\quad \begin{cases} L_1 u = [p_1(x)u']' - q_1(x)u \text{ при } a < x < x_0, \\ L_2 u = [p_2(x)u']' - q_2(x)u \text{ при } x_0 < x < b. \end{cases}$$

Собственной функцией этого оператора, отвечающей собственному значению λ, мы будем называть такую не равную тождественному нулю функцию $u(x)$, которая удовлетворяет следующим четырем условиям:

1) принадлежит классу C^0 на сегменте $[a, b]$, классу C^1 на каждом из сегментов $[a, x_0]$ и $[x_0, b]$ и классу C^2 на каждом из интервалов (a, x_0) и (x_0, b),

2) удовлетворяет уравнению $L_1 u + \lambda u = 0$ на интервале $a < x < x_0$ и уравнению $L_2 u + \lambda u = 0$ на интервале $x_0 < x < b$,

3) удовлетворяет условиям сопряжения в точке x_0 разрыва коэффициентов: $u(x_0 - 0) = u(x_0 + 0)$, $p_1(x_0)u'(x_0 - 0) = p_2(x_0)u'(x_0 + 0)$,

4) удовлетворяет каким-либо самосопряженным краевым условиям на концах интервала (a, b).

По существу мы будем рассматривать совершенно произвольное самосопряженное неотрицательное расширение оператора (1) с дискретным спектром.

Символом $\{u_n(x)\}$ будем обозначать полную ортонормированную в $L_2[a, b]$ систему собственных функций оператора (1), а символом $\{\lambda_n\}$ соответствующую систему неотрицательных собственных значений.

Коэффициенты дифференциальных операторов (1) подчиним следующим естественным ограничениям: $p_1(x) \in C^2[a, x_0]$, $p_2(x) \in C^2[x_0, b]$, $q_1(x) \in C^0[a, x_0]$, $q_2(x) \in C^0[x_0, b]$, $p_1(x) \geqq a_1 > 0$ всюду на $[a, x_0]$, $p_2(x) \geqq a_2 > 0$ всюду на $[x_0, b]$.

Договоримся там, где это будет понятно, опускать индексы 1 и 2 у функций $p(x)$ и $q(x)$, считая, что

$$p(x)=\begin{cases} p_1(x) \text{ при } x<x_0, \\ p_2(x) \text{ при } x>x_0, \end{cases} \quad q(x)=\begin{cases} q_1(x) \text{ при } x<x_0, \\ q_2(x) \text{ при } x>x_0. \end{cases}$$

Главной целью работы является выяснение условий сходимости разложения по системе собственных функций $\{u_n(x)\}$ в точке x_0 разрыва коэффициентов оператора (1).

Для любого вещественного $\mu>0$ и любой функции $f(x)$ из класса $L_2[a,b]$ составим две суммы: частичную сумму с номером μ разложения по собственным функциям

$$\sigma_\mu(x,f)=\sum_{\sqrt{\lambda_n}<\mu}(f,u_n)\cdot u_n(x)$$

и модифицированную частичную сумму тригонометрического ряда Фурье

$$S_\mu(x,f)=\pi^{-1}\int\limits_{|x-y|\leqq\delta}(x-y)^{-1}\sin\mu(x-y)f(y)dy$$

($\delta>0$ — любое достаточно малое число).

Из основной теоремы работы [2] вытекает, что для любой функции $f(x)\in L_2[a,b]$ равномерно на любом компакте K интервала (a,b), не содержащем точку разрыва коэффициентов x_0, разность $\sigma_\mu(x,f)-S_\mu(x,f)$ стремится к нулю (при $\mu\to\infty$).

Простейшие примеры показывают, что в точке разрыва коэффициентов x_0 разность $\sigma_\mu(x_0,f)-S_\mu(x_0,f)$ уже не стремится, вообще говоря, к нулю. Так для функции $f(x)$, равной нулю при $a\leqq x<x_0$ и единице при $x_0\leqq x\leqq b$, $\lim\limits_{\mu\to\infty}S_\mu(x_0,f)=1/2$ в то время, как

$$\lim_{\mu\to\infty}\sigma_\mu(x_0,f)=\sqrt{p(x_0+0)}/(\sqrt{p(x_0+0)}+\sqrt{p(x_0-0)})\neq 1/2,$$

если коэффициент $p(x)$ имеет разрыв в x_0.

Чтобы сформулировать основные результаты работы, введем в рассмотрение две функции $h=\varrho_1(t)$ и $h=\varrho_2(t)$, определив их для всех достаточно малых положительных значений аргумента t равенствами

$$\int\limits_{x_0-\varrho_1(t)}^{x_0}(p(\tau))^{-1/2}d\tau=t,\quad \int\limits_{x_0}^{x_0+\varrho_2(t)}(p(\tau))^{-1/2}d\tau=t.$$

Легко проверить, что эти функции монотонно возрастают для всех t из сегмента $0\leqq t\leqq\delta$, где δ — достаточно малое положительное число и имеют обратные функции, которые мы обозначим символами $t=\overline{\varrho}_1(h)$ $t=\overline{\varrho}_2(h)$, причем

$$\overline{\varrho}_1(x_0-x)=\int\limits_x^{x_0}(p(\tau))^{-1/2}d\tau,\ \overline{\varrho}_2(x-x_0)=\int\limits_{x_0}^{x}(p(\tau))^{-1/2}d\tau.$$

По любой функции $f(x)$ из класса $L_2[a,b]$ построим функцию $\widetilde{f}_{x_0}(x)$ следующего вида:

$$(2)\ \widetilde{f}_{x_0}(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{p(x_0+0)}+\sqrt{p(x_0-0)}}\,f[x_0-\varrho_1(x_0-x)]\cdot\sqrt{p[x_0-\varrho_1(x_0-x)]} & \text{при } x<x_0,\\[2ex] \dfrac{2}{\sqrt{p(x_0+0)}+\sqrt{p(x_0-0)}}\cdot f[x_0+\varrho_2(x-x_0)]\cdot\sqrt{p[x_0+\varrho_2(x-x_0)]} & \text{при } x>x_0.\end{cases}$$

Теорема 1. *Для любой функции $f(x)$ из класса $L_2[a, b]$ в точке x_0 разрыва коэффициентов справедливо соотношение*

$$\lim_{\mu\to\infty}[\sigma_\mu(x_0, f)-S_\mu(x_0, \widetilde{f}_{x_0})]=0,$$

т. е. в точке x_0 разрыва коэффициентов имеет место равносходимость разложения в ряд по собственным функциям функции $f(x)$ с разложением в тригонометрический ряд Фурье функции (2).

Легко проверить, что в окрестности точки x_0 модули непрерывности функций $f(x)$ и $\widetilde{f}_{x_0}(x)$ имеют одинаковый порядок. Поэтому любой критерий сходимости тригонометрического ряда Фурье, выраженный в терминах порядка модуля непрерывности функции, является одновременно критерием сходимости ряда по собственным функциям в точке разрыва коэффициентов.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x)$ имеет в точке разрыва коэффициентов правый и левый пределы $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$. Пусть, кроме того, для всех t из сегмента $0\leqq t\leqq\delta$, где $\delta>0$ — достаточно малое число, найдутся такие положительные числа α_1 и α_2 и такие постоянные C_1 и C_2, что справедливы неравенства*

$$|f(x_0+t)-f(x_0+0)|\leqq C_1\,.\,t^{\alpha_1},$$

$$|f(x_0-t)-f(x_0-0)|\leqq C_2\,.\,t^{\alpha_2}.$$

Тогда

$$(3)\qquad \lim_{\mu\to\infty}\sigma_\mu(x_0, f)=\frac{f(x_0-0)\,.\sqrt{p(x_0-0)}+f(x_0+0)\sqrt{p(x_0+0)}}{\sqrt{p(x_0-0)}+\sqrt{p(x_0+0)}},$$

т. е. ряд по собственным функциям сходится в точке x_0 разрыва коэффициентов к числу, стоящему в правой части (3).

В случае, если дополнительно требуется непрерывность $f(x)$ в точке x_0, число, стоящее в правой части (3), равно $f(x_0)$.

Укажем два важных вспомогательных результата работы, имеющих самостоятельный интерес.

1. Для любого $\mu\geqq 0$ справедлива оценка

$$\sum_{|\sqrt{\lambda_n}-\mu|\leqq 1} u_n^2(x)\leqq C,$$

равномерная относительно x на любом компакте интервала (a, b). (Этот компакт может включать точку разрыва коэффициентов x_0.)

2. Пусть R_1 — любое достаточно малое положительное число, R_0 определено из условия $R_0=\varrho_1(R_1)$, R_2 определено из условия $R_2=\overline{\varrho}_2(R_0)$,

$$\widehat{\Theta}_\mu(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi[\sqrt{p(x_0-0)}+\sqrt{p(x_0+0)}]}\cdot\dfrac{\sin\mu\overline{\varrho}_2(x-x_0)}{\overline{\varrho}_2(x-x_0)} & \text{при } x_0<x<x_0+\overline{R}_2,\\ \dfrac{2}{\pi[\sqrt{p(x_0-0)}+\sqrt{p(x_0+0)}]}\cdot\dfrac{\sin\mu\overline{\varrho}_1(x_0-x)}{\overline{\varrho}_1(x_0-x)} & \text{при } x_0-R_1<x<x_0,\\ 0 & \text{для остальных } x.\end{cases}$$

Тогда для спектральной функции оператора (1) справедлива следующая оценка:

$$\int_a^b\Big[\sum_{\sqrt{\lambda_n}<\mu}u_n(x_0)u_n(x)-\widehat{\Theta}_\mu(x)\Big]^2dx=O(1).$$

Доказательство ряда сформулированных утверждений можно найти в [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Ильин. О сходимости разложений по собственным функциям в точках разрыва коэффициентов дифференциального оператора. *Мат. заметки*, 22, 1977, № 5, 679—698.

2. В. А. Ильин. Необходимые и достаточные условия базисности подсистемы собственных и присоединенных функций пучка М. В. Келдыша обыкновенных дифференциальных операторов. *Доклады АН СССР*, 227, 1976, № 4, 28—31.

Московский государственный университет
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Москва СССР

Получено 4. 11. 1977.