КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'77
София. 1980, с. 81—93

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'77
Sofia. 1980, p. 81—93

О КРИТЕРИИ m-МЕРОМОРФНОСТИ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ СВОИМ РАЗЛОЖЕНИЕМ В СТЕПЕННОЙ РЯД

Р. К. Ковачева

Резюме. В настоящей работе доказывается достаточное условие для продолжения функции f, голоморфной в нуле, до m-мероморфной, m — фиксированное натуральное число, в области D, $D\ni 0$, где область D обладает (классической) функцией Грина и не содержит бесконечно удаленную точку. Класс m-мероморфных в области D функций определяется как множество всех мероморфных в D функций, имеющих в ней ровно m полюсов.

1. Пусть $D\ni 0$ — фиксированная область в комплексной плоскости, обладающая (классической) функцией Грина $g(z, 0)$. Будем предполагать, что $\infty\notin D$. Пусть f — голоморфная в нуле функция, заданная своим разложением в степенной ряд

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n. \tag{1}$$

Будем писать $f\in M_m(D)$ (m — произвольное натуральное число), если определяемая этим рядом в окрестности нуля функция f допускает продолжение до функции, мероморфной в D и имеющей там ровно m полюсов (с учетом кратностей). В дальнейшем функции из класса $M_m(D)$ будем называть m-мероморфными в D. В настоящей работе рассматривается задача о характеризации рядов вида (1), таких, что $f\in M_m(D)$. Решение этой задачи базируется на конструкции обобщенных аппроксимаций Паде ряда (1), введенных в работе А. А. Гончара [1]. В (1) с помощью таких аппроксимаций решается вопрос о восстановлении (в области D) функции $f\in M_m(D)$ по ее разложению (1). Приведем основные определения и необходимые для дальнейшего результаты этой работы.

Пусть $\omega=\{\omega_n\}_0^\infty$ — последовательность полиномов от z, $\deg\omega_n\leq n$, $\omega_n(0)\neq 0$. Будем писать $\omega\in P(D)$, если

$$\lim_{n\to\infty} |z^n/\omega_n(z)|^{1/n}=C.\lambda(z),\quad \lambda(z)=\exp(-g(z, 0))$$

равномерно внутри D (C — некоторая положительная константа).

Хорошо известно, что такие последовательности существуют [2]. Более того, существуют последовательности $\omega\in P(D)$ такие, что $\omega_n(z)$

$=(z-\beta_n)\omega_{n-1}(z)$ (см. [2]); совокупность всех таких последовательностей обозначим через $P^*(D)$.

Пусть n, m — фиксированные натуральные числа. Обозначим через $S_{n,m}$ множество всех рациональных функций (с комплексными коэффициентами), степень числителя которых не превосходит n, а степень знаменателя — m. Пусть $\varphi(z)=\Sigma_{\nu=0}^{\infty}\varphi_\nu z^\nu$ — степенной ряд (формальный или определяющий голоморфную в нуле функцию). Соответствующая (классическая) аппроксимация Паде типа (n, m) для ряда $\varphi(z)$ определяется как рациональная функция $\pi_{n,m}=\pi_{n,m}(\varphi)\in S_{n,m}$, имеющая максимальный порядок касания (в классе $S_{n,m}$) с $\varphi(z)$ в точке $z=0$. Функцию $\pi_{n,m}(\varphi)$ можно определить так же, как отношение $p_{n,m}/q_{n,m}$ произвольных полиномов степени не выше n и m, соответственно, удовлетворяющих соотношению

$$(q_{n,m}\cdot\varphi-p_{n,m})(z)=A_{n,m}z^{n+m+1}+\ldots$$

(справа стоит ряд по возрастающим степеням z, $q_{n,m}(z)\not\equiv 0$). Хорошо известно, что для любого ряда φ и для любой фиксированной пары (n, m) натуральных чисел существует единственная аппроксимация Паде $\pi_{n,m}(\varphi)$ типа (n, m); нахождение ее сводится к решению системы линейных уравнений, коэффициенты которых выражаются через коэффициенты φ_ν[3].

Пусть $\omega=\{\omega_n\}$ — фиксированная последовательность полиномов, принадлежащая классу $P(D)$ и (n, m) — пара натуральных чисел, связанных соотношением $n\geqq m$. Обобщенная ω-аппроксимация Паде $\pi^{\omega}_{n,m}(f)$ типа (n, m) для ряда (1) определяется формулой

$$\pi^{\omega}_{n,m}=\pi^{\omega}_{n,m}(f)=\pi_{n,m}(f\omega_{n-m})/\omega_{n-m},$$

где $\pi_{n,m}(f\omega_{n-m})$ — классическая аппроксимация Паде типа (n, m) функции $f\omega_{n-m}$. Конечные полюсы функции $\pi_{n,m}(f\omega_{n-m})$ будем называть свободными полюсами функции $\pi^{\omega}_{n,m}(f)$ (их число $\leqq m$); остальные полюсы $\pi^{\omega}_{n,m}(f)$ фиксированы в нулях полинома ω_{n-m}. Обозначим через $q^{\omega}_{n,m}=q^{\omega}_{n,m}(f)$ полином $\Pi^{\mu}_{\nu=1}(z-\alpha_{n,\nu})$, где $\alpha_{n,1},\ldots,\alpha_{n,\mu}$, $0\leqq\mu\leqq m$ — свободные полюсы функции $\pi^{\omega}_{n,m}$. Рациональная функция $\pi^{\omega}_{n,m}$ и полином $q^{\omega}_{n,m}$ однозначно определяются по ряду (1) и последовательности $\omega\in P(D)$. В работе [1] доказана следующая

Теорема 1. *Если $f\in M_m(D)$ и $\omega\in P(D)$, то последовательность $\pi^{\omega}_{n,m}$ равномерно сходится (при $n\to\infty$) к функции f внутри области $D'=D-\{a_\nu\}^m_{\nu=1}$, где $a_1,\ldots,a_m$ — полюсы f в D; для любого компакта $K\subset D'$*

$$\varlimsup_{n\to\infty}\|f-\pi^{\omega}_{n,m}\|^{1/n}_K\leqq l(K)<1, \tag{2}$$

где $\|\times\|_K=\sup$ — норма на K и $l(K)=\sup\{\lambda(z): z\in K\}$. При этом для достатачно больших n функция $\pi^{\omega}_{n,m}$ имеет ровно m свободных полюсов $\alpha_{n,1},\ldots,\alpha_{n,m}$, которые (при надлежащей нумерации) сходятся к полюсам f в D со скоростью геометрической прогрессии.

Из (2) следует, что скорость сходимости свободных полюсов $\pi^{\omega}_{n,m}$ к полюсам f характеризуется следующим соотношением: если $q_m=\Pi^m_{\nu=1}(z-a_\nu)$, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \| q_{n,m}^{\omega} - q_m \|^{1/n} \leq l < 1, \quad l = \max \{\lambda(\alpha_k) : 1 \leq k \leq m\}$$

(здесь норма понимается, например, в метрике коэффициентов).

Эти результаты Гончара обобщают классические результаты Адамара и Монтессу де Балора, относящиеся к случаю, когда D — круг с центром в нуле и $\pi_{n,m} (= \pi_{n,m}^{\omega},\ \omega_n \equiv 1,\ n = 0, 1, 2, \ldots)$ — классические аппроксимации Паде.

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 2. *Пусть f — голоморфная в нуле функция, заданная своим разложением* (1), $\omega \in P^*(D)$ *и m — фиксированное натуральное число. Тогда, если существует полином* $q_m(z) = \Pi_{\nu=1}^{m} (z - \alpha_\nu)$, $\alpha_\nu \in D - \{0\}$, $1 \leq \nu \leq m$ *такой, что справедливо соотношение*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \| q_{n,m}^{\omega} - q_m \|^{1/n} \leq l < 1, \quad l = \max_{1 \leq k \leq m} \lambda(\alpha_k), \tag{3}$$

то $f \in M_m(D)$ (*и* $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — *полюсы f в области D*).

Тем самым, для $\omega \in P^*(D)$ условие (3) (выражающее тот факт, что свободные полюсы ω-аппроксимаций Паде ряда (1) стремятся к некоторым точкам $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ области $D - \{0\}$ с определенной скоростью) необходимо и достаточно для m-мероморфности функции f в области D.

Пусть ϱ вещественное число, $0 < \varrho < 1$. В дальнейшем будем придерживаться следующих обозначений:

$$\Gamma_\varrho = \{z \in D,\ \lambda(z) = \varrho\} \quad \text{и} \quad D_\varrho = \{z \in D,\ \lambda(z) < \varrho\}.$$

Множество D_ϱ представляет собой область, содержащую точку $z = 0$ и обладающую классической функцией Грина $g_\varrho(z, 0)$, $g_\varrho(z, 0) = g(z, 0) + \ln \varrho$, поэтому, если $\omega \in P(D)$, $(P^*(D))$, то $\omega \in P(D_\varrho)(P^*(D_\varrho))$ при любом $\varrho \in (0, 1)$.

Из теоремы 2 нетрудно получить

Следствие 1. Пусть f — голоморфная в нуле функция, заданная своим разложением в степенной ряд (1), $\omega \in P^*(D)$ и m — фиксированное натуральное число. Если существует полином $q_m(z) = \Pi_{\nu=1}^{m} (z - \alpha_\nu)$, $\alpha_\nu \in D - \{0\}$, $\nu = 1, \ldots, m$ такой, что справедливо соотношение

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \| q_{n,m}^{\omega} - q_m \|^{1/n} \leq l < 1, \tag{4}$$

то $f \in M_m(D_\sigma)$, где $\sigma = l^{-1} \max \{\lambda(\alpha_\nu) : (1 \leq \nu \leq m)\}$ (и все точки $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — полюсы f в области D). Если $\sigma \geq 1$, то область D_σ совпадает с областью D.

Тем самым, для $\omega \in P^*(D)$ условие (4) необходимо и достаточно для того, чтобы $f \in M_m(D_\sigma)$; при этом $\sigma l = \{\max \lambda(\alpha_\nu) : 1 \leq \nu \leq m\}$.

Доказательство теоремы 2 приведено в 3. Отметим сразу, что ради простоты, мы приведем подробное доказательство теоремы для случая, когда все точки $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ попарно отличны одна от другой. Соотношение (3) при этом дополнительном условии можно переписать так:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} | \alpha_{n,\nu} - \alpha_\nu |^{1/n} \leq l < 1, \quad l = \max \{\lambda(\alpha_\nu) : 1 \leq \nu \leq m\}. \tag{3'}$$

В § 4 изложена схема доказательства теоремы для общего случая. Ряд вспомогательных лемм, используемых для доказательства теоремы 2, приведены в 2.

2. Лемма 1 (формула Эрмита). *Пусть $\overline{B}$ — замкнутая ограниченная область, граница ∂B которой состоит из конечного числа попарно непересекающихся спрямляемых жордановых кривых; пусть точки $a_1, \ldots, a_{n+1}$ лежат в B и функция φ голоморфна в $\overline{B}$. Если r_n — рациональная функция порядка не выше n вида p_n/q_n(p_n, q_n — полиномы степени не выше n, $q(a_k) \neq 0$, $k=1, 2, \ldots, n$), интерполирующая функцию φ в точках $a_1, \ldots, a_{n+1}$, то для $z \in B$ (таких, что $q_n(z) \neq 0$) справедлива формула*

$$(\varphi - r_n)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \prod_{R=1}^{n+1} \frac{z-a_k}{t-a_k} \cdot \frac{q_n(t)}{q_n(z)} \cdot \frac{\varphi(t)}{t-z}\, dt.$$

Формула Эрмита является простым следствием интегральной формулы Коши (см. [2]).

Лемма 2 (лемма Бернштейна — Уолша). *Пусть E — компакт в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, дополнение которого обладает (классической) функцией Грина $G(z, z_0)$, $z_0 \notin E$. Пусть r_n — рациональная функция порядка n, голоморфная на E и такая, что $\| r_n(z) \|_E \leq M$, $(0 < M < \infty)$. Обозначим полюсы функции r_n в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ через $z_1, \ldots, z_n$. При этих предположениях имеет место оценка*:

$$| r_n(z) | \leq M . \exp \sum_{\nu=1}^{n} G(z, z_\nu), \quad z \in \overline{\mathbb{C}} - E.$$

Различные варианты этой леммы содержатся в [2]; см. также [4].

Лемма 3. Пусть $\varphi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu z^\nu$ — формальный степенной ряд и (n, m) — пара натуральных чисел, связанных соотношением $n \geq m$. Положим

$$D_{n,m}(\varphi) = \begin{vmatrix} \varphi_{n-m+2}, & \ldots, & \varphi_{n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{n+1}, & \ldots, & \varphi_{n+m} \end{vmatrix}.$$

Тогда, если классическая аппроксимация Паде $\pi_{n,m} = \pi_{n,m}(\varphi)$ имеет ровно m конечных полюсов $a_{n,1}, \ldots, a_{n,m}$, то $D_{n-1,m}(\varphi)$ и $D_{n,m}(\varphi)$ отличны от нуля, полином $q_{n,m} = \prod_{\nu=1}^{m} (z - a_{n,\nu})$ задается формулой

$$q_{n,m}(z) = \frac{(-1)^m}{D_{n,m}(\varphi)} \begin{vmatrix} \varphi_{n-m+1}, & \varphi_{n-m+2}, & \ldots, & \varphi_{n+1} \\ \vdots & & & \\ \varphi_n, & \varphi_{n+1}, & \ldots, & \varphi_{n+m} \\ z^m, & z^{m-1}, & \ldots, & 1 \end{vmatrix}, \tag{5}$$

а произведение $\prod_{\nu=1}^{m} a_{n,\nu}$ всех полюсов функции $\pi_{n,m}$ определяется выражением

$$\prod_{k=1}^{m} a_{n,k} = D_{n-1,m}(\varphi)/D_{n,m}(\varphi). \tag{6}$$

Доказательство этой леммы по существу содержится в [3].

Заметим, что все полюсы $a_{n,1}, \ldots, a_{n,m}$ отличны от нуля. Известно (см. [3]), что если $D_{n,m}(\varphi) \neq 0$, то полином $q_{n,m}$ (с коэффициентом перед старшей степенью равным единице) имеет вид (5). С другой стороны, в условиях леммы этот определитель должен быть отличным от нуля, так как в противном случае число конечных полюсов $\pi_{n,m}$ меньше m (подробнее см. [3]).

Из формулы (5) немедленно получается и формула (6).

Лемма 4. *Пусть функция f голоморфна в точке $z=0$ и $\omega \in P(D)$. Если f мероморфна в области D и имеет в D не более m полюсов, а свободные полюсы функции $\pi^{\omega}_{n,m} = \pi^{\omega}_{n,m}(f)$ стремятся* (при $n \to \infty$) *к конечным пределам $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m_1}$, $m_1 \leq m$ (или, что последовательность $q^{\omega}_{n,m}(z) = \Pi^{m}_{\nu=1}(z-a_{n,\nu}) = q^{\omega}_{n,m}/(f)(z)$ сходится к некоторому полиному $q_m(z) = \Pi^{m_1}_{\nu=1}(z-\alpha_\nu)$, то последовательность $\pi^{\omega}_{n,m}$ равномерно сходится внутри области $D' = D - \{\alpha_\nu\}^{m_1}_{\nu=1}$ к функции f (тем самым, все полюсы f в D находятся среди точек $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m_1}$). Для любого компакта $K \subset D'$ справедливо соотношение*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|\pi_{n,m} - f\|^{1/n}_K \leq l(K) < 1, \quad l(K) = \max\{\lambda(z) : z \in K\}.$$

В частности, последовательность $q^{\omega}_{n,m} \cdot \pi^{\omega}_{n,m}$ равномерно сходится (при $n \to \infty$) внутри D к функции $q_m \cdot f$.

Утверждения леммы 4 немедленно следуют из результатов работы [1] (см. теорему 2 и лемму 1 этой работы).

Лемма 5. *Пусть функция f голоморфна в точке $z=0$ и $\omega \in P(D)$; предположим, что f мероморфна в D и имеет в D не более m полюсов. Пусть, далее, все функции $\pi^{\omega}_{n,m} = \pi^{\omega}_{n,m}(f)$ (для $n > N$) имеют ровно m свободных полюсов $a_{n,1}, \ldots, a_{n,m}$ и последовательность $q^{\omega}_{n,m} = q^{\omega}_{n,m}(f)$ сходится (при $n \to \infty$) к некоторому полиному $q_m(z) = \Pi^{m}_{\nu=1}(z-\alpha_\nu)$, все нули которого простые ($\alpha_i \neq \alpha_j$, $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, m$) и принадлежат области $D - \{0\}$. Обозначим через $C_{n,k}$, $1 \leq k \leq n$ вычет функции $\pi^{\omega}_{n,m}$ в точке $a_{n,k}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

1. *Функция f имеет полюс в точке α_k*;
2. $\lim_{n\to\infty} C_{n+1,k}/C_{n,k} = 1$; 3. $\lim_{n\to\infty} |C_{n,k}|^{1/n} = 1$.

Эта лемма также легко следует из результатов работы [1]. Отметим, во-первых, что из следствия 2 и леммы 1 работы [1] вытекает, что в условиях леммы 5 все полюсы f в D простые; множество полюсов f в D принадлежит множеству $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$. Если f имеет полюсы в точке α_k, $1 \leq k \leq m$, то вычет f в α_k обозначим через C_k; положим $C_k = 0$, если f голоморфна в α_k. Из леммы 4 следует, что $C_{n,k} \xrightarrow[n\to\infty]{} C_k$, причем $\overline{\lim}_{n\to\infty} |C_{n,k} - C_k|^{1/n} \leq \lambda(\alpha_k)$. Если f имеет полюс в точке α_k, то $C_{n,k} \xrightarrow[n\to\infty]{} C_k \neq 0$; тем самым, 1. $\Longrightarrow$ 2. Импликация 2. $\Longrightarrow$ 3. очевидна. Если f не имеет полюса в точке α_k ($C_k = 0$), то $\overline{\lim}_{n\to\infty} |C_{n,k}|^{1/n} < 1$ и тем самым, 3. $\Longrightarrow$ 1. и лемма доказана.

Из леммы 5 (см. также ее доказательство) вытекает

Лемма 6. *В условиях леммы 5 следующие утверждения эквивалентны*:

1. *Все точки $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ являются полюсами функции f в D.*

2. $\lim_{n\to\infty}\Pi_{k=1}^{m} C_{n+1,k}/C_{n,k}=1$.

3. $\lim_{n\to\infty}\Pi_{k=1,\ldots,m}|C_{n,k}|^{1/n}=1$.

В дальнейшем мы используем только импликацию 2. $\Longrightarrow$ 1. (в лемме 6).

Лемма 7. *Пусть $\varphi(z)=\Sigma_{\nu=0}^{\infty}\varphi_\nu z^\nu$ — функция, голоморфная в нуле и (n, m) — фиксированная пара натуральных чисел, $n\geqq m$. Пусть, далее, классическая аппроксимация Паде $\pi_{n,m}=\pi_{n,m}(\varphi)$ имеет ровно m конечных полюсов $a_{n,1},\ldots, a_{n,m}$, попарно отличных друг от друга. Обозначим через $C_{n,k}$ вычет функции $\pi_{n,m}$ в точке $a_{n,k}$, $1\leqq k\leqq m$, а через $W(a_{n,1},\ldots, a_{n,m})=W_n$ — определитель Вандермонда для $a_{n,1},\ldots, a_{n,m}$. Тогда имеет место представление*

$$\prod_{k=1}^{m} C_{n,k}=(-1)^m W_n^{-2} D_{n,m}(\varphi)\Big(\prod_{k=1}^{m} a_{n,k}\Big)^{n+m+1}. \tag{7}$$

Доказательство. Из определения аппроксимаций Паде (в условиях леммы 7) получаем

$$(\varphi-p_{n-m})(z)-\sum_{k=1}^{m} C_{n,k}/(z-a_{n,k})=A_{n,m}\cdot z^{n+m+1}+\ldots$$

Справа стоит ряд по возрастанию степеней z. Здесь p_{n-m} — некоторый полином степени не выше n. Для наших целей более удобна запись

$$\varphi-p_{n-m}+\sum_{k=1}^{m} C_{n,k}a_{n,k}^{-1}\Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n,k}^{-\nu}z^\nu\Big)=A_{n,m}z^{n+m+1}+\ \ldots$$

Отсюда видно, что для коэффициентов $\varphi_{n-m+1}, \varphi_{n-m+2},\ldots, \varphi_{n+m}$ справедливы формулы

$$\varphi_{n-m+1}=-\sum_{k=1}^{m} C_{n,k}\cdot a_{n,k}^{m-n-2},$$

$$\varphi_{n-m+2}=-\sum_{k=1}^{m} C_{n,k}\cdot a_{n,k}^{m-n-3},$$

$$\vdots$$

$$\varphi_{n+m}=-\sum_{k=1}^{m} C_{n,k}\cdot a_{n,k}^{-n-m-1}.$$

Подставляя эти выражения в определитель $D_{n,m}(\varphi)$, получаем

$$D_{n,m}(\varphi)=(-1)^m\begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{m} C_{n,k}a_{n,k}^{-n-3+m}, & \ldots, & \sum_{k=1}^{m} C_{n,k}a_{n,k}^{-n-2} \\ \vdots & & \\ \sum_{k=1}^{m} C_{n,k}a_{n,k}^{-n-2}, & \ldots, & \sum_{k=1}^{m} C_{n,k}a_{n,k}^{-n-m-1} \end{vmatrix}$$

$$
=(-1)^m \prod_{k=1}^{m} C_{n,k} \begin{vmatrix} 1, & 1, & \dots, & 1 \\ \alpha_{n,1}^{-1}, & \alpha_{n,2}^{-1}, & \dots, & \alpha_{n,m}^{-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n,1}^{-m+1}, & \alpha_{n,2}^{-m+1}, & \dots, & \alpha_{n,m}^{-m+1} \end{vmatrix}
$$

$$
\times \begin{vmatrix} \alpha_{n,1}^{m-n-3}, & \alpha_{n,1}^{m-n-4}, & \dots, & \alpha_{n,1}^{-n-2} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{n,m}^{m-n-3}, & \alpha_{n,m}^{m-n-4}, & \dots, & \alpha_{n,m}^{-n-2} \end{vmatrix}
$$

$$
=(-1)^m \prod_{k=1}^{m} C_{n,k} W_n^2 \Big(\prod_{\nu=1}^{m} \alpha_{n,\nu}\Big)^{-n-m-1}.
$$

Находя отсюда $\Pi_{k=1}^{m} C_{n,k}$, получаем соотношение (7).

3. Этот параграф посвящен доказательству теоремы 2 (для случая, когда все точки $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ различны).

Доказательство теоремы разобьем на две части. Сначала будет установлено, что в условиях теоремы 2 ряд (I) продолжается до функции, голоморфной во всей области D, кроме, может быть, точек $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, в которых f может иметь (простые) полюсы; другими словами, сначала устанавливается, что функция $f \cdot q_m$ голоморфна в области D. Во второй части будет показано, что каждая из точек $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ является полюсом функции f.

Перенумеруем точки $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ так, что $\lambda(\alpha_k) \leqq \lambda(\alpha_{k+1})$, $k=1, 2, \dots, m-1$.

1. По условию функция $f \cdot q_m$ голоморфна в некоторой окрестности нуля. Пусть D_σ — максимальная область, содержащая точку $z=0$ и ограничена линией уровня функции $g(z, 0)$, $z \in D$, внутри которой функция $f \cdot q_m$ голоморфна. Покажем, что D_σ совпадает с областью D. Допустим, что это неверно, т. е. что $\sigma<1$. Если в области D_σ функция f имеет полюсы, то все они простые и лежат среди точек $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_{m_1}$ — полюсы f в D. Возможны два случая: а) $0 \leqq m_1 < m$ и б) $m_1 = m$. Положим $q_{m_1}(z) = \Pi_{\nu=1}^{m}(z-\alpha_\nu)$; очевидно, функция $f \cdot q_{m_1}$ голоморфна в области D.

В условиях теоремы 2 для ω-аппроксимаций Паде функции f при всех достаточно больших n справедливо соотношение (ниже $q_{n,m} = q_{n,m}^{\omega}$)

$$
(f \cdot q_{n,m} - \pi_{n,m}^{\omega} \cdot q_{n,m})(z) = A_{n,m} z^{n+m+1} + \dots
$$

Отсюда получаем

$$
[f \cdot q_{m_1}(q_{n+1,m} - q_{n,m}) - q_{m_1}(\pi_{n+1,m}^{\omega} q_{n+1,m} - \pi_{n,m}^{\omega} q_{n,m})](z) = A_{n,m} z_{n,m}^{n+m+1} + \dots \tag{8}
$$

Рассмотрим сначала случай a) $0 \leqq m_1 < m$. Обозначим через R_{n+1} рациональную функцию $q_{m_1}(\pi^{\omega}_{n+1,m} \cdot q_{n+1,m} - \pi^{\omega}_{n,m} \cdot q_{n,m})$. Напомним, что $\omega \in P^*(D)$; пусть $\beta_1, \ldots, \beta_n$ — корни полинома $\omega_n(\omega_n = \Pi^n_{k=1}(z-\beta_k))$.

Нетрудно установить, что степень числителя R_{n+1} не превосходит $n+1+m_1$, а степень знаменателя — $(n-m+1)$. По сделанному предположению $m_1 < m$, а по (8) функция R_{n+1} интерполирует функцию $f \cdot q_{m_1} \cdot (q_{n+1,m} - q_{n,m})$ в точке $z=0$, $0 \in D_\sigma$ до порядка $n+m+1$ и имеет конечные полюсы в корнях полинома ω_{n+1-m} (и не больше, чем $2m$ в бесконечности). Из формулы Эрмита (лемма 1) следует

$$(f \cdot q_{m_1}(q_{n+1,m} - q_{n,m}) - R_{n+1})(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\sigma_1}} \frac{z^{n+m+1}}{t^{n+m+1}} \tag{9}$$

$$\times \frac{\omega_{n-m+1}(t)}{\omega_{n-m+1}(z)} \frac{f q_{m_1}(q_{n+1,m} - q_{n,m}) dt}{t-z},$$

где σ_1 произвольное, близкое к σ вещественное число, меньше σ, а $z \in D_{\sigma_1}$. Фиксируем числа σ_1, σ_2, $0 < \sigma_2 < \sigma_1 < \sigma$. Из определения класса $P^*(D)$ следует, что для любого $\theta > 0$ и всех достаточно больших n имеет место оценка

$$\| z^{n-m+1}/\omega_{n-m+1}(z) \|_{\Gamma_{\sigma_2}} \leqq C_1(C \exp(\theta/3) \cdot \sigma_2)^{n-m+1},$$

$$\| t^{-n+m-1}/\omega_{n-m+1}(t) \|_{\Gamma_{\sigma_1}} \leqq C_2(\sigma_1^{-1} \exp(\theta/3) \cdot C^{-1})^{n-m+1},$$

с другой стороны, из соотношения (3) получаем оценку $\| q_{n+1,m} - q_{n,m} \| \leqq C_3(\exp(\theta/3) \cdot l)^n$. Здесь и далее C_1, C_2, $C_3, \ldots$ — положительные константы, не зависящие от n.

На основании этих оценок, из формулы (9) для $n \geqq N$ получаем

$$\| R_{n+1} \|_{\Gamma_{\sigma_2}} = \| R_{n+1} \|_{\overline{D}_{\sigma_2}} \leqq \| f \cdot q_{m_1} \|_{\Gamma_{\sigma_1}} (C_4 \sigma_1^{-1} (\exp(2\theta/3) \cdot \sigma_2)^n + C_3)(\exp \theta l/3)^n$$

и

$$\| R_{n+1} \|_{\overline{D}_{\sigma_2}} \leqq C_5 (l \exp \theta)^n.$$

Обозначая через $G(z, z_0)$, $z_0 \notin \overline{D}_{\sigma_2}$ функцию Грина для внешности компакта $\overline{D}_{\sigma_2}$ с особенностью в точке $z_0 \notin \overline{D}_{\sigma_2}$, на основании леммы Бернштейна — Уолша (лемма 2) получаем оценку

$$| R_{n+1}(z) | \leqq C_5 (l \exp Q)^n \exp\Big(\sum_{k=1}^{n+1-m} G(z, \beta_k) + 2m G(z, \infty)\Big), \; z \notin D_{\sigma_2}. \tag{10}$$

Рассмотрим функцию $\Sigma^{n+1-m}_{k=1}(G(z, \beta_k) + \ln |(z-\beta_k)/z|)$. Она гармонична вне $\overline{D}_{\sigma_2}$ и, по принципу максимума, вне $\overline{D}_{\sigma_2}$ не превосходит своего максимума на Γ_{σ_2}. Имея в виду, что $G(z, \beta_k) = 0$ на Γ_{σ_2}, $k = 1, 2, \ldots$ для $z \notin \overline{D}_{\sigma_2}$ получаем

$$\exp\Big(\sum_{k=1}^{n+1-m} G(z, \beta_k) + \ln |(z-\beta_k)/z)|\Big) \leqq \| (\omega_{n+1-m}(z)) z^{-n-1+m} \|_{\Gamma_{\sigma_2}}.$$

Фиксируем вещественное число ϱ, $\sigma_1 < \varrho < 1$; для всех достаточно больших n справедливы оценки:

$$\left\|\frac{\omega_{n+1-m}(z)}{z^{n+1-m}}\right\|_{\Gamma_{\sigma_2}} \leqq C_6 (C^{-1} . \sigma_2^{-1} \exp(\theta/2))^{n+1-m},$$

$$\left\|\frac{z^{n+1-m}}{\omega_{n+1-m}(z)}\right\|_{\Gamma_\varrho} \leqq C_6 (C \exp(\theta/2) . \varrho)^{n+1-m}.$$

Имея в виду последние неравенства, из оценки (10) для $z \in D_\varrho$ получаем (для достаточно больших n)

$$|R_{n+1}(z)| \leqq C_5 (\exp\theta . l)^n \exp\Big(\sum_{k=1}^{n+1-m} (G(z, \beta_k) + \ln|z^{-1}(z-\beta_k)|$$

$$+ 2mG(z, \omega)) . |z^{n+1-m}/\omega_{n+1-m}(z)$$

и

$$|R_{n+1}(z)| \leqq C_7 (\exp(2\theta) . \varrho l/\sigma_2)^n.$$

Из этой оценки следует, что ряд $\Sigma_{n=m}^\infty R_{n+1}$ равномерно сходится в области $\overline{D}_\varrho$, если только $\exp(2\theta) . \varrho l/\sigma_2 < 1$, т. е. $\varrho < \sigma_2/l^{-1} \exp(2\theta)$. Ввиду произвольности чисел θ и σ_2, σ_1, мы можем утверждать, что этот ряд сходится равномерно внутри области $D(\sigma . l^{-1})$, тем самым, он определяет голоморфную функцию в $D(\sigma . l^{-1})$. * Однако по определению функция R_{n+1} равна функции $q_{m_1}(\pi_{n+1,m}^\omega . q_{n+1,m} - \pi_{n,m}^\omega . q_{n,m})$, а по лемме 4 последовательность $\pi_{n,m}^\omega . q_{n,m}$ равномерно сходится к функции $f . q_m$ внутри области D_σ (лемму 4 надо применить к f и D_σ). Следовательно, функция $q_{m_1} . q_m . f$ голоморфна в области $D(\sigma . l^{-1})$. Так как по предположению все корни полинома q_{m_1} находятся в области D_σ, а полином q_m делится на полином q_{m_1}, то и функция $f . q_m$ голоморфна в области $D(\sigma . l^{-1})$. Поскольку $\sigma/l > \sigma$, последнее противоречит определению числа σ. Следовательно, $\sigma = 1$ и наше утверждение для случая а) доказано.

Остановимся теперь на случае б). Из условия $m_1 = m$ ясно, что число σ находится в интервале $(\lambda(\alpha_m), 1)$. Выберем ϱ так, что $0 < \varrho < \lambda(\alpha m)$. В области D_ϱ функция f имеет $\leqq m-1$ полюсов. Следуя конструкции предыдущего случая, получим, что функция $f . q_m$ голоморфна в области $D(\varrho/l)$. Устремляя затем ϱ к $\lambda(\alpha_m)$ и имея в виду, что по условию теоремы $l = \max \lambda(\alpha_\nu)$, $1 \leqq \nu \leqq m$, сделаем вывод, что функция $f . q_m$ голоморфна в $D_1 = D$.

Этим закончена первая часть доказательства теоремы 2.

2. Перед тем как мы продолжим дальше, введем еще одно обозначение. Если φ — голоморфная в нуле функция, $\varphi(z) = \Sigma_{\nu=0}^\infty \varphi_\nu z^\nu$, то положим $T_n(\varphi) = \varphi_n$.

Нетрудно убедиться в том, что вычет $C_{n,k}$ функции $\pi_{n,m}^\omega = \pi_{n,m}^\omega(f)$ в точке $\alpha_{n,k}$ задается формулой:

$$C_{n,k} = \mathrm{Res}(\pi_{n,m}((f . \omega_{n-m}), \alpha_{n,k}))/\omega_{n-m}(\alpha_{n,k}).$$

---

* Для $\varrho \geqq 1$ считаем по определению $D_\varrho = D$.

По условию $C_{n,k}\neq 0$ для всех достаточно больших n, $k=1, 2, \ldots, m$. На основании леммы 7 имеем право написать, что

$$\prod_{k=1}^{m} C_{n,k}=\prod_{k=1}^{m} \operatorname{Res}(\pi_{n,m}(f\,\omega_{n-m}),\ \alpha_{n,k})/\omega_{n-m}(\alpha_{n,k})$$

$$=(-1)^m D_{n,m}(f\omega_{n-m})\prod_{k=1}^{m}\alpha_{n,k}^{n+m+1}/\prod_{k=1}^{m}\omega_{n-m}(\alpha_{n,k})W_n^2.$$

Тогда для отношения $\prod_{k=1}^{m} C_{n+1,k}/C_{n,k}$ получим

$$\prod_{k=1}^{m}\frac{C_{n+1,k}}{C_{n,k}}=\frac{D_{n+1,m}(f\omega_{n+1-m})}{D_{n,m}(f\omega_{n-m})}\cdot\prod_{k=1}^{m}\frac{\omega_{n-m}(\alpha_{n,k})}{\omega_{n+1-m}(\alpha_{n+1,k})}\cdot\frac{\prod\alpha_{n+1,k}^{n+m+2}}{\prod\alpha_{n,k}^{n+m+1}}\cdot\frac{W_n^2}{W_{n+1}^2}. \tag{11}$$

Докажем сначала, что

$$\frac{D_{n+1,m}(f\omega_{n+1-m})}{D_{n,m}(f\omega_{n-m})}\prod_{k=1}^{m}\alpha_{n+1,k}=(-1)^m q_{n,m}(\beta_{n+1-m}). \tag{12}$$

Действительно, по лемме 3 имеем (формула 6)

$$\prod_{k=1}^{m}\alpha_{n+1,k}=D_{n,m}(f\omega_{n+1-m})/D_{n+1,m}(f\omega_{n+1-m}),$$

что дает

$$\frac{D_{n+1,m}(f\omega_{n+1-m})}{D_{n,m}(f\omega_{n-m})}\cdot\prod_{k=1}^{m}\alpha_{n+1,k}=\frac{D_{n,m}(f\omega_{n+1-m})}{D_{n,m}(f\omega_{n-m})}.$$

Из определения следует далее, что

$$\frac{D_{n,m}(f\,\omega_{n+1-m})}{D_{n,m}(f\,\omega_{n-m})}=\frac{1}{D_{n,m}(f\,\omega_{n-m})}\begin{vmatrix} T_{n-m+2}(f\,\omega_{n+1-m}), & \ldots, & T_{n+1}(f\omega_{n+1-m})\\ \cdot & & \cdot\\ \cdot & & \cdot\\ \cdot & & \cdot\\ T_{n+1}(f\,\omega_{n+1-m}), & \ldots, & T_{n+m}(f\omega_{n+1-m})\end{vmatrix}.$$

Пользуясь равенством $T_{n-m+k+1}(f\,\omega_{n+1-m})=T_{n-m+k}(f\,\omega_{n-m})-\beta_{n+1-m}\times T_{n-m+k+1}(f\omega_{n-m})$, получим

$$\frac{D_{n,m}(f\omega_{n+1-m})}{D_{nm}(f\omega_{n-m})}=\frac{1}{D_{n,m}(f\omega_{n-m})}$$

$$\times\begin{vmatrix}(T_{n-m+1}-\beta_{n-m+1}T_{n-m+2})(f\,\omega_{n-m}), & \ldots, & (T_n-\beta_{n+1-m}T_{n+1})(f\omega_{n-m})\\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ (T_n-\beta_{n-m+1}T_{n+1})(f\,\omega_{n-m}), & \ldots, & (T_{n+m}-\beta_{n+1-m}T_{n+m-1})(f\omega_{n-m})\end{vmatrix}.$$

Элементарными преобразованиями определитель, стоящий в правой части последнего равенства, приводит к формуле (12). (Надо воспользоваться также формулой (5) для полинома $q_{n,m}$.)

Далее имеем

$$\prod_{k=1}^{m} \frac{\omega_{n-m}(\alpha_{n,k})}{\omega_{n+1-m}(\alpha_{n+1,k})} = \prod_{k=1}^{m} \frac{\omega_{n-m}(\alpha_{n,k})}{\omega_{n-m}(\alpha_{n+1,k})} \cdot \frac{(-1)^m}{q_{n+1,m}(\beta_{n+1-m})}. \tag{13}$$

С учетом равенств (12) и (13), из (11) получаем

$$\prod_{k=1}^{m} \frac{C_{n+1,k}}{C_{n,k}} = \prod_{k=1}^{m} \frac{\omega_{n-m}(\alpha_{n,k})}{\omega_{n-m}(\alpha_{n+1,k})} \tag{14}$$

$$\cdot \frac{q_{n,m}(\beta_{n+1-m})}{q_{n+1,m}(\beta_{n+1-m})} \prod_{k=1}^{m} \left(\frac{\alpha_{n+1,k}}{\alpha_{n,k}}\right)^{n+m+1}$$

$$\cdot \frac{W_n^2}{W_{n+1}^2} = A_n \, . \, B_n \, . \, C_n \, . \, D_n.$$

Докажем сначала, что $\lim_{n\to\infty} A_n = 1$. Выберем достаточно малые числа $\theta > 0$ и $\delta > 0$; положим $m_k = \max\{|t| : |t-\alpha_k| = \delta\}$, $\mu_k = \min\{\lambda(t) : |t-\alpha_k| = \delta\}$, $q = \max \exp \theta \, . \, l \, . \, \lambda(\alpha_k) \, . \, m_k/\mu_k |\alpha_k|$. Ясно, что $q < 1$, если только θ и δ достаточно малы; фиксируем такие θ и δ, что $q < 1$ и $\delta < \min\{|\alpha_i - \alpha_j| : i \neq j, 1 \leq i, j \leq m\}$. По формуле Коши имеем (для любого $k = 1, 2, \ldots, m$)

$$\omega_{n-m}(\alpha_{n,k}) - \omega_{n-m}(\alpha_{n+1,k}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t-\alpha_k|=\delta} \frac{\omega_{n-m}(t)(\alpha_{n+1,k} - \alpha_{n,k})}{(t-\alpha_{n,k})(t-\alpha_{n+1,k})} \, dt.$$

Для достаточно больших n отсюда получаем (нужно использовать тот факт, что $\omega \in P^*(D)$ и соотношение (3'))

$$|\omega_{n-m}(\alpha_{n,k}) - \omega_{n-m}(\alpha_{n+1,k})| \leq C_7 | C^{-1} \exp(\theta/2) \, . \, l m_k/\mu_k)^n. \tag{15}$$

С другой стороны, имеем $|\omega_{n-m}(\alpha_{n+1,k})| \geq |\omega_{n-m}(\alpha_k)| - |\omega_{n-m}(\alpha_{n+1,k}) - \omega_{n-m}(\alpha_k)|$. Аналогично предыдущему из формулы Коши получаем

$$|\omega_{n-m}(\alpha_{n+1,k}) - \omega_{n-m}(\alpha_k)| \leq C_8 (C^{-1} . \exp(\theta/2) \, . \, l \, m_k/\mu_k)^n;$$

из того, что $\omega \in P^*(D)$, вытекает оценка

$$|\omega_{n-m}(\alpha_k)| \geq C_9 \, . \, (\lambda(\alpha_k))^{-1} C^{-1} \exp(-\theta/2) \, . \, |\alpha_k|)^n$$

(и та, и другая оценка справедливы для достаточно больших n). Следовательно,

$$|\omega_{n-m}(\alpha_{n+1,k})| \geq C_{10} [(C^{-1} \lambda^{-1}(\alpha_k) \exp(-\theta/2) \cdot |\alpha_k|)^n \tag{16}$$
$$-(C^{-1} \mu_k^{-1} \exp(\theta/2) \, . \, l \, m_k)^n].$$

Объединяя оценки (15) и (16), получаем

$$\left| \frac{\omega_{n-m}(\alpha_{n,k})}{\omega_{n-m}(\alpha_{n+1,k})} - 1 \right| = \left| \frac{\omega_{n-m}(\alpha_{n,k}) - \omega_{n-m}(\alpha_{n+1,k})}{\omega_{n-m}(\alpha_{n+1,k})} \right|$$
$$\leq C_{11} (C^{-1} . \, l \, . \exp(\theta/2) \, . \, m_k/\mu_k)^n / ((C^{-1} \cdot \exp(-\theta/2) \cdot |\alpha_k|/\lambda(\alpha_k))^n$$
$$-(C \exp(\theta/2) \, . \, l \, m_k/\mu_k)^n) = C_{11} \, . \, q^n/(1-q^n).$$

Следовательно, $\lim_{n\to\infty}(\omega_{n-m}(\alpha_{n,k}))/(\omega_{n-m}(\alpha_{n+1,k}))=1$ для любого $k=1, 2, \ldots, m$. Тем самым, $\lim_{n\to\infty}A_n=1$. Заметим также, что $A_n . B_n = \prod_{k=1}^{m}\omega_{n+1-m}(\alpha_{n,k})/\omega_{n+1-m}(\alpha_{n+1,k})$ (ср. (13)); из доказанного, очевидно, следует, что $\lim_{n\to\infty}A_n . B_n=1$.

Далее, при любом $k=1, 2, \ldots, m$

$$\alpha_{n+1,k}/\alpha_{n,k}=1+(\alpha_{n+1,k}-\alpha_{n,k})/\alpha_{n,k}=1+o(q_1^n)$$

(см. (3′)). Следовательно, $\lim_{n\to\infty}((\alpha_{n+1,k})/\alpha_{n,k})^{n+m+1}=1$ и $\lim C_n=1$. Наконец, очевидно, $\lim_{n\to\infty}D_n=1$.

Тем самым, $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{m}(C_{n+1,k})/C_{n,k}=1$ (см. (14)); утверждение теоремы 2 следует немедленно из леммы 6.

4. Доказательство теоремы 2 в общем случае (когда среди точек $a_1, \ldots, a_m$ могут быть совпадающие, что соответствует кратным полюсам функции f) технически значительно усложняется. Голоморфность функции $f . q_m$ во всей области доказывается совершенно аналогично предыдущему (см. § 3, п. 1). Однако для доказательства того, что в каждой из точек a_k, $1\leqq k\leqq m$, функция f действительно имеет полюс (кратность которого равна кратности нуля полинома q_m в соответствующей точке) леммы 6 и 7 уже непригодны. Ограничимся формулировкой аналогов этих лемм, с помощью которых (следуя общей схеме п. 2, § 3) может быть доказана теорема 2 для общего случая.

Лемма 6. *Пусть f — функция, голоморфная в точке $z=0$ и $\omega\in P(D)$; предположим, что f мероморфна в D и имеет в этой области не более m полюсов (с учетом кратностей). Пусть далее все ω-аппроксимации Паде $\pi^{\omega}_{n,m}=\pi^{\omega}_{n,m}(f)$, $n>N$ имеют ровно m свободных полюсов последовательность $q_{n,m}(z)=\prod_{k=1}^{m}(z-a_{n,k})$ сходится* (*при* $n\to\infty$) к полиному $q_m=\prod_{k=1}^{m_1}(z-a_k^*)^{\tau_k}$, где $\sum_{k=1}^{m_1}\tau_k=m$ и $a_i^*\neq a_j^*$ при $i\neq j$, $1\leqq i, j\leqq m_1$. Пусть $a_{n,j}$, $j\in I_k$,

$$I_k=\{\tau_1+\ldots+\tau_{k-1}+1, \ldots, \tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_k\}$$

— нули полинома $q_{n,m}$, которые стремятся к точке a_k^* ($k=1, 2, \ldots, m_1$) Обозначим через $P_{n,k}(z)/\prod_{j\in I_k}(z-a_{n,j})$ сумму главных частей функции $\pi^{\omega}_{n,m}$ в точках an, j; $j\in I_k$ ($P_{n,k}$ — полином степени $\leqq\tau_k-1$). Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. При любом $k=1, 2, \ldots, m_1$ функция f имеет полюс кратности τ_k в точке a_k^*;

2. $$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{m_1}\prod_{j\in I_k}P_{n+1,k}(a_{n+1,j})/P_{n,k}(a_{n,j})=1;$$

3. $$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{m_1}\prod_{j\in I_k}|P_{n,k}(a_{n,j})|^{1/n}=1.$$

Лемма 7. *Пусть $\varphi(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\varphi_\nu z^\nu$ и (n, m) — фиксированная пара натуральных чисел, $n\geqq m$. Пусть (классическая) аппроксимация Паде $\pi_{n,m}=\pi_{n,m}(\varphi)$ имеет ровно m конечных полюсов $a_{n,1}, \ldots, a_{n,m}$. Разобьем множество $\{1, \ldots, m\}$ на m_1 попарно не пересекающихся множеств $I_1, \ldots, I_{m_1}$ (в любом случае индексы совпадающих точек $a_{n,j}$ относим* *к одному классу). Пусть $P_{n,k}(z)/\Pi_{j\in J_k}(z-\alpha_{n,j})$ — сумма главных частей функции $\pi_{n,m}$ в точках $\alpha_{n,j}$, $j\in J_k$. Тогда справедлива формула*

$$\prod_{k=1}^{m_1}\prod_{j\in J_k} P_{n,k}(\alpha_{n,j})=(-1)^m D_{n,m}(\varphi)\prod_{k=1}^{m}(\alpha_{n,k}^{n+m+1})^{-1}\prod_{\substack{k\in J_k\\ s\in J_s\\ 1\leq s<k\leq m}}|\alpha_{n,k}-\alpha_{n,s}|^2$$

В заключение я выражаю глубокую благодарность проф. А. А. Гончару за предложенную тему и руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Гончар. О сходимости обобщенных аппроксимаций Паде мероморфных функций. *Матем. сб.*, 98, 1975, 564—577.
2. Дж. Д. Уолш. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. Москва, 1961.
3. O. Perron. Die Lehre von den Kettenbrüchen, Band II, Stuttgart, 1957.
4. А. А. Гончар. О задачах Е. И. Золотарева, связанных с рациональными функциями. *Матем. сб.*, 78, 1969, 640—654.

Центр математики
и механики п. я. 373
1000 София Болгария

Получено 1. 9. 1977.